XA
.T75

Vol. 19
1883/84

THE NEW YORK BOTANICAL GARDEN
PRO SCIENTIA POPULIQUE SALUTE
1891

LIBRARY

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

VOL. XIX, DISP. 1ª (*Novembre-Dicembre* **1883**)

---

**Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.**

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI

DELLE DUE CLASSI

---

VOLUME DECIMONONO

1883-84

---

**Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.**

LIBRARY
NEW YORK
BOTANICAL
GARDEN

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1883

XII
.T75
Vol.19
1883/84

PROPRIETÀ LETTERARIA

STAMPERIA REALE
della Ditta G. B. Paravia e Comp.
di I. Vigliardi.

# ELENCO DEGLI ACCADEMICI

## RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, STRANIERI E CORRISPONDENTI

al 1° Gennaio 1884

LIBRARY
NEW YORK
BOTANICAL
GARDEN

---

PRESIDENTE

Fabretti (Ariodante), Professore di Archeologia greco-romana nella Regia Università, Direttore del Museo di Antichità, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia di Archeologia, Letteratura e Belle Arti di Napoli, della R. Accademia della Crusca, dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, e dell' Istituto di Corrispondenza archeologica, Professore Onorario dell' Università di Perugia, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Uffiz. ✻, Comm. ⊜; ✠, Cav. della Leg. d'O. di Francia, e C. O. R. del Brasile.

VICE-PRESIDENTE

Richelmy (Prospero), Professore emerito di Meccanica applicata nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, ecc.; Comm. ✻ e ⊜.

TESORIERE

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, ✻ e Comm. ⊜.

AUG 7 - 1923 Geneva Bot. Garden

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

*Direttore*

Delponte (Giovanni Battista), Dottore in Medicina e in Chirurgia, Professore Onorario di Botanica nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Uffiz. ❋, e Comm. ✠.

*Segretario Perpetuo*

Sobrero (Ascanio), Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore emerito di Chimica docimastica nella Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino, Membro del Collegio di Scienze fisiche e matematiche della Regia Università e Presidente della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Ateneo di Venezia, dell'Ateneo di Brescia, della Società di Agricoltura, Storia naturale ed Arti utili di Lione, della Società di Farmacia di Parigi, Socio onorario della Società degl' Ingegneri ed Industriali di Torino, ecc., Comm. ❋; ✠, Uffiz. ✠.

### Accademici residenti

Sobrero (Ascanio), *predetto.*
Richelmy (Prospero), *predetto.*
Delponte (Giovanni Battista), *predetto.*

Genocchi (Angelo), Professore di Analisi infinitesimale nella R. Università di Torino. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei. Comm. ❋, Uffiz. ⊕; ✠.

Lessona (Michele), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore e Direttore de' Musei di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Torino. Socio delle RR. Accademie di Agricoltura e di Medicina di Torino, Uffiz. ❋, e Comm. ⊕.

Dorna (Alessandro), Professore d'Astronomia nella R. Università e di Meccanica razionale nella R. Militare Accademia di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Torino, ❋, Uffiz. ⊕.

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova-York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi, e della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, ⊕.

Cossa (Alfonso), Dottore in Medicina, Professore di Chimica docimastica nella R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze

naturali di Napoli, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino e dell'Accademia Gioenia di Catania. Comm. ✻, ⊖, e dell'O. d'I. Catt. di Sp.

Bruno (Giuseppe). Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e Professore di Geometria descrittiva nella R. Università di Torino, ✻.

Berruti (Giacinto). Direttore del R. Museo Industriale Italiano, e dell'Officina governativa delle Carte-Valori. Uffiz. ✻, e Comm. ⊖, dell'O. di Francesco Gius. d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

Curioni (Giovanni), Professore di Costruzioni e Vice-Direttore della R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri. Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino. Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Lucca. Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo, ✻, e Comm. ⊖.

Siacci (Francesco), Maggiore nell'Arma d'Artiglieria. Professore di Meccanica Superiore nella R. Università di Torino, e di Matematiche applicate nella Scuola d'Applicazione delle Armi di Artiglieria e Genio. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✻, Uffiz. ⊖.

Bellardi (Luigi). Conservatore delle collezioni paleontologiche presso il Museo di Geologia della R. Università di Torino, Prof. di Storia naturale al Liceo *Gioberti*. Uffiz. ✻, Cav. ⊖, e dell'O. di Cristo del Portogallo. Membro di varii Istituti scientifici, ecc.

Basso (Giuseppe). Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche e matematiche. Prof. di Fisica matematica nella R. Università di Torino, ⊖.

D'Ovidio (Dott. Enrico). Professore ordinario d'Algebra e Geometria analitica, incaricato di Geometria superiore, e Rettore della Regia Università di Torino. Socio corrispondente della

R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e Socio dell'Accademia Pontaniana, ecc., ✻, Comm. ⊖.

Bizzozero (Giulio). Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino. Socio corrispondente del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ecc., ✻, ⊖.

Ferraris (Galileo), Ingegnere, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Professore di Fisica tecnica nel R. Museo Industriale Italiano, e di Fisica nella R. Scuola di Guerra, ⊖.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Socio corrispondente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ⊖.

Mosso (Angelo). Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino. Socio nazionale della R. Accademia de' Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, e Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ✻, ⊖.

## Accademici Nazionali non residenti

S. E. Ménabrèa (Conte Luigi Federigo), Marchese di Val Dora, Senatore del Regno, Professore emerito di Costruzioni nella Regia Università di Torino. Dottore in Leggi nelle Regie Università di Oxford e di Cambridge, Luogotenente Generale, Ambasciatore di S. M. a Parigi, Primo Aiutante di campo Generale Onorario di S. M., Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Membro Onorario del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ecc.; C. O. S. SS. N., Gr. Cord. e Cons. ✻, Cav. e Cons. ⊕, Gr. Cr. ⊕, ⊖, dec. della Med. d'oro al Valor Mi-

litare e della Medaglia d'oro Mauriziana. Gr. Cr. dell'O. Supr. del Serafino di Svezia. dell'O. di Sant'Alessandro Newski di Russia, di Dannebrog di Danim.. Gr. Cr. dell'O. di Torre e Spada di Portogallo. dell'O. del Leone Neerlandese, di Leop. del Belg. (Categ. Militare). della Probità di Sassonia, della Corona di Wurtemberg, e di Carlo III di Sp.. Gr. Cr. dell'O. di S. Stefano d'Ungheria, dell'O. di Leopoldo d'Austria. di quelli della Fedeltà e del Leone di Zöhringen di Baden. Gr. Cr. dell'Ord. del Salvatore di Grecia. G. Cr. dell'Ordine di S. Marino. Gr. Cr. degli Ordini del Nisham *Ahid* e del Nisham *Iftigar* di Tunisi, Comm. dell'Ordine della Leg. d'On. di Francia. di Cristo di Portogallo. del Merito di Sassonia, ecc., ecc.

Sella (Quintino). Membro del Cons. dell'Miniere. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze. Sezione di Mineralogia). Presidente della R. Accademia dei Lincei. Gr. Cord. ❋ e ⊗, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. degli O. di S. Anna di R., di Leop. d'A., dell'Aquila Rossa di Prussia. di Carlo III di Spagna. della Concez. di Port., del Mejidié di Turchia, e di S. Marino, ecc. ecc.

Brioschi (Francesco). Senatore del Regno. Prof. d'Idraulica. e Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze. Sezione di Geometria). e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, ecc., Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, delle Società matematiche di Londra e di Parigi. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. della Reale Accademia delle Scienze di Napoli. dell'Accademia delle Scienze di Bologna. ecc.. Gr. Uffiz. ❋. ⊗; ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Govi (Gilberto). Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Napoli. Membro del Comitato internazionale dei Pesi e delle Misure. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze e dell'Accademia Pontaniana di Napoli. della R. Ac-

cademia d'Agricoltura di Torino. Uffiz. ✻; ✠. Comm. ⊕, e della L. d'O. di Francia.

Moleschott (Jacopo), Senatore del Regno, Professore di Fisiologia nella R. Università di Roma. Professore Onorario della Facoltà Medico-Chirurgica della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino. Socio corrispondente delle Società per le Scienze mediche e naturali a Hoorn, Utrecht, Amsterdam, Batavia, Magonza, Lipsia, Cherbourg, degli Istituti di Milano, Modena, Venezia, Bologna, delle Accademie Medico-Chirurgiche in Ferrara e Perugia, Socio Onorario della *Medicorum Societas Bohemicorum* a Praga, della *Société médicale allemande* a Parigi, della Società dei naturalisti in Modena, dell'Accademia Fisio-medico-statistica di Milano, della *Pathological Society* di S. Louis, della *Sociedad antropolojica Española* a Madrid, Socio dell'Accademia Veterinaria Italiana, del Comitato Medico-Veterinario Toscano, della *Société Royale des Sciences Médicales et Naturelles de Bruxelles*, Socio Straniero della Società Olandese delle Scienze a Harlem. Socio fondatore della Società Italiana d'Antropologia e di Etnologia in Firenze. Membro ordinario dell'Accademia Medica di Roma, Comm. ✻ e ⊕.

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Uffiz. ⊕; ✠.

Betti (Enrico), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Pisa. Direttore della Scuola normale superiore, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Gr. Uffiz. ⊕; ✠.

Scacchi (Arcangelo), Senatore del Regno, Professore di Mineralogia nella R. Università di Napoli, Presidente della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, Presidente del Reale Istituto di Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Segretario della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Gr. Uffiz. ⊕; ✠.

Ballada di S. Robert (Conte Paolo). Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei.

Schiaparelli (Giovanni). Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano. Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. della R. Accademia dei Lincei. dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Istituto di Bologna. Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze. Sezione di Astronomia). delle Accademie di Monaco. di Vienna. di Berlino. di Pietroborgo. di Stockolma. di Upsala. della Società de' Naturalisti di Mosca. e della Società astronomica di Londra. Comm. ❋; ⊛. ✠. Comm. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

---

## Accademici Stranieri

Dumas (Giovanni Battista). Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia. Gr. Cr. della L. d' O. di Francia.

Helmholtz (Ermanno Luigi Ferdinando). Professore nella Università di Berlino. Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Fisica generale).

Dana (Giacomo). Professore di Storia naturale a New Haven. Socio corrispondente dell'Istituto di Francia.

Hofmann (Guglielmo Augusto). Prof. di Chimica. Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino. della Società Reale di Londra. Corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze. Sezione di Chimica).

Chevreul (Michele Eugenio). Membro dell'Istituto di Francia. Gr. Cr. della L. d'O. di Francia, ecc.

Hermite (Carlo). Membro dell'Istituto di Francia. Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

Joule (James) Prescott. della Società Reale di Londra.

WEIERSTRASS (Carlo). Professore di Matematica nell'Università di Berlino.

THOMSON (Guglielmo), dell'Istituto di Francia, Professore di Filosofia naturale nell'Università di Glasgow.

GEGENBAUR (Carlo), della R. Accademia Bavarese delle Scienze, Professore di Anatomia nell'Università di Heidelberg.

# CORRISPONDENTI

## SEZIONE

## DI MATEMATICA PURA E ASTRONOMIA

PLANTAMOUR (Emilio). Professore d'Astronomia *Ginevra*

DE GASPARIS (Annibale), Professore d'Astronomia nella R. Università di . . . . . *Napoli*

TARDY (Placido), Professore emerito della Regia Università di . . . . . *Genova*

BONCOMPAGNI (D. Baldassarre), dei Principi di Piombino . . . . . *Roma*

CREMONA (Luigi), Professore di Matematiche superiori nella R. Università di . . . . . *Roma*

CANTOR (Maurizio), Professore di Matematica nell'Università di . . . . . *Heidelberg*

SCHWARZ (Ermanno A.), Professore di Matematica nell'Università di . . . . . *Gottinga*

KLEIN (Felice), Professore di Matematica nell'Università di . . . . . *Lipsia*

FERGOLA (Emanuele), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Beltrami (Eugenio), Professore di Fisica matematica e di Meccanica superiore nella R. Università di . . . . . *Pavia*

Casorati (Felice), Professore di Calcolo infinitesimale e di Analisi superiore nella R. Università di *Pavia*

Dini (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . . *Pisa*

## SEZIONE

### DI MATEMATICA APPLICATA

#### E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

Colladon (Daniele), Professore di Meccanica . *Ginevra*

Liagre (J. B.), Segretario Perpetuo della R. Accademia delle Scienze del Belgio; alla Scuola militare, *à la Cambre* . . . . . *Ixelles* (Bruxelles)

Turazza (Domenico), Professore di Meccanica razionale nella R. Università di . . . . . *Padova*

Narducci (Enrico), Bibliotecario della Biblioteca Alessandrina di . . . . . *Roma*

Pisati (Giuseppe), Professore di Fisica tecnica nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in . . *Roma*

Sang (Edoardo), Socio e Segretario della Società di Scienze ed Arti di . . . . . *Edimborgo*

Clausius (Rodolfo), Professore nell'Università di *Bonn*

Castigliano (Alberto), Ingegnere, Capo Sezione presso la Società delle Strade Ferrate A. I. . *Milano*

## SEZIONE

### DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

WEBER (Guglielmo), della Società Reale delle Scienze di . . . . . *Gottinga*

FECHNER (Gustavo Teodoro) . . . . . *Lipsia*

BLASERNA (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Roma*

KOHLRAUSCH (Federico), Professore nell' Università di . . . . . *Würtzburg*

JAMIN (Giulio Celestino), dell'Istituto di Francia *Parigi*

CORNU (Maria Alfredo), dell' Istituto di Francia *Parigi*

FELICI (Riccardo), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Pisa*

ROSSETTI (Francesco), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Padova*

VILLARI (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . . *Bologna*

ROITI (Antonio), Professore nell' Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di *Firenze*

## SEZIONE

### DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

BONJEAN (Giuseppe) . . . . . *Chambéry*

PLANTAMOUR (Filippo), Professore di Chimica . *Ginevra*

WILL (Enrico), Professore di Chimica . . . *Giessen*

BUNSEN (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . . . . . *Heidelberg*

MARIGNAC (Giovanni Carlo), Professore di Chimica *Ginevra*

PÉLIGOT (Eugenio Melchiorre), dell' Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

WURTZ (Adolfo), dell'Istituto di Francia . . *Parigi*

BERTHELOT (Marcellino), dell'Istituto di Francia *Parigi*

PATERNÒ (Emanuele), Professore di Chimica nella R. Università di . . . . . *Palermo*

KÖRNER (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

FRIEDEL (Carlo), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

FRESENIUS (Carlo Remigio), Professore a . *Wiesbaden*

## SEZIONE

### DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

MENEGHINI (Giuseppe), Professore di Geologia, ecc. nella R. Università di . . . . . *Pisa*

STUDER (Bernardo), Professore di Geologia . . *Berna*

KONINK (Lorenzo Guglielmo DI) . . . . *Liegi*

DE ZIGNO (Achille), Uno dei XL della Società italiana delle Scienze . . . . . *Padova*

FAVRE (Alfonso), Professore di Geologia . . *Ginevra*

KOKSCHAROW (Nicola DI), dell'Accademia Imperiale delle Scienze di . . . . . *Pietroborgo*

RAMSAY (Andrea), della Società Reale di . . *Londra*

STRÜVER (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di . . . . . *Roma*

ROSENBUSCH (Enrico), Professore di Petrografia nell'Università di . . . . . *Strasborgo*

NORDENSKIÖLD (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di . . . . . *Stoccolma*

DAUBRÉE (Gabriele Augusto), dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Nazionale delle Miniere a . . . . . *Parigi*

ZIRKEL (Ferdinando), Professore di Petrografia a *Lipsia*

DES CLOIZEAUX (Alfredo Luigi Oliviero LEGRAND), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

CAPELLINI (Giovanni), Professore nella R. Università di . . . . . *Bologna*

STOPPANI (Antonio), Professore nell' Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*

## SEZIONE

## DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (Conte Vittore), Corrispondente del R. Istituto Lombardo . . . . *Milano*

CANDOLLE (Alfonso DE), Professore di Botanica. *Ginevra*

BOISSIER (Pietro Ed.), Botanico, della Società di Fisica e di Storia naturale di . . . . . *Ginevra*

GENNARI (Patrizio), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . . *Cagliari*

TULASNE (Luigi Renato), dell'Istituto di Francia *Parigi*

CARUEL (Teodoro), Professore di Botanica nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

GIBELLI (Giuseppe), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . . *Torino*

ARDISSONE (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola Superiore d'Agricoltura in . . . *Milano*

## SEZIONE

## DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

FRANCESCHI (Giovanni), Professore nella Regia Università di . . . . . *Bologna*

Rüppel (Edoardo), Segretario della Società Senckenbergiana di Scienze naturali in . . *Francoforte s/M.*

De Selys Longchamps (Edmondo) . . *Liegi*

Burmeister (Ermanno), Direttore del Museo pubblico di . . . . . *Buenos Aires*

Philippi (Rodolfo Armando) . . . . *Santiago* (Chili)

Schlegel (Ermanno), Direttore del Museo di *Leida*

De Cigalla (Conte Giuseppe), Protomedico onorario, nell'isola di . . . . . *Santorino*

Owen (Riccardo), Direttore delle Collezioni di Storia naturale al *British Muséum* . . *Londra*

Koelliker (Alberto), Professore di Anatomia e Fisiologia . . . . . *Würtzburg*

De-Siebold (Carlo Teodoro), Professore di Zoologia e Anatomia comparata nell'Università di . . . . . *Monaco* (Baviera)

Milne Edwards (Henri), dell' Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Golgi (Camillo), Professore di Istologia, ecc. nella R. Università di . . . . *Pavia*

Haeckel (Ernesto), Professore nell' Università di . . . . . *Jena*

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

*Direttore*

PEYRON (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Comm. ✠.

*Segretario Perpetuo*

GORRESIO (Gaspare), Senatore del Regno, Prefetto della Biblioteca Nazionale, già Professore di Letteratura orientale nella R. Università di Torino, Membro dell'Istituto di Francia, Socio nazionale della R. Accademia de'Lincei, Socio corrispondente della Reale Accademia della Crusca, e della R. Accademia di Scienze e Lettere di Palermo, ecc., Membro Onorario della Reale Società Asiatica di Londra, Vice-Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✠, Gr. Uffiz. ⊕; ✠. dell'O. di Guadal. del Mess., e dell'O. della Rosa del Brasile, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

## Accademici residenti

GORRESIO (Gaspare), *predetto.*
FABRETTI (Ariodante), *predetto.*
PEYRON (Bernardino), *predetto.*

Vallauri (Tommaso), Senatore del Regno, Professore di Letteratura latina nella R. Università. Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione pubblica, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, e dell'Accademia Romana di Archeologia. Comm. ❋, Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno.

Flechia (Giovanni), Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine e di Sanscrito nella R. Università di Torino. Socio nazionale della R. Accademia de' Lincei, Uffiz. ❋, Comm. ⊗; ✠.

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Membro della Società di Archeologia e Belle Arti e della Giunta conservatrice dei monumenti d'Antichità e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✠ e ⊗.

Bianchi (Nicomede), Senatore del Regno, Soprantendente degli Archivi Piemontesi, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria delle antiche Provincie e della Lombardia, Membro corrispondente delle Deputazioni di Storia patria delle Provincie Modenesi, delle Provincie della Toscana, dell'Umbria e delle Marche, Membro Onorario della Società storica Svizzera, della R. Accademia Palermitana di Scienze e Lettere, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Petrarca di Scienze, Lettere ed Arti in Arezzo, dell'Accademia Urbinate di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Ateneo di Bergamo, e della Regia Accademia Paloritana di Messina. Gr. Uffiz. ❋, Comm. ⊗, e Gr. Uffiz. dell'O. di S. Mar.

Promis (Vincenzo), Dottore in Leggi, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M., Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro e Segretario della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Ispettore degli scavi e monumenti d'antichità in Torino, ❋, Uffiz. ⊗, Gr. Uffiz. dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, Comm. dell'O. di S. Michele di Baviera e della Corona di Rumenia.

Rossi (Francesco). Adiutore al Museo d'Antichità. Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino. Membro ordinario dell'Accademia orientale di Firenze, ⊕.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele). Dottore in Leggi. Direttore dell'Archivio di Stato, detto Camerale, Consigliere d'Amministrazione nel R. Economato generale delle antiche Provincie. Membro della R. Deputazione sopra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia. Socio corrispondente della Società Ligure di Storia Patria, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, e della Società per la Storia di Sicilia, Uffiz. ❋, ⊕.

Schiaparelli (Luigi). Dottore aggregato. Professore di Storia antica, e Direttore della Scuola di Magistero della Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, ❋, Comm. ⊕.

Pezzi (Domenico). Dottore aggregato e Professore straordinario nella Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, ⊕.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Professore di Storia militare nell'Accademia Militare. Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, e della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna, e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, ⊕.

Carle (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore della Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino. Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ⊕.

Nani (Cesare), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ⊕.

## Accademici Nazionali non residenti.

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Consigliere di Stato, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio e Segretario della R. Accademia dei Lincei, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, della R. Accademia Lucchese, della Pontaniana di Napoli, Socio onorario dell'Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti di Bergamo, ecc., Membro del Consiglio degli Archivi, Gr. Uffiz. ✻, Comm. ⊗, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Sp. e di S. Mar., Gr. Uffiz. dell'O. di Leop. del B., dell'O. del Sole e del Leone di Persia, e del Mejidié di 2ª cl. di Turchia, Gr. Comm. dell'Ord. del Salv. di Gr., ecc.

Amari (Michele), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Palermo e del R. Istituto di studi superiori di Firenze; Dottore in Filosofia e Lettere delle Università di Leida e di Tubinga; Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei in Roma, delle RR. Accademie delle Scienze in Monaco di Baviera e in Copenhagen; Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze in Palermo, della Crusca, dell'Istituto Veneto, della Società Colombaria in Firenze, della R. Accademia d'Archeologia in Napoli, delle Accademie di Scienze, Lettere ed Arti in Lucca e in Modena, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie Parmensi, di quella per le Provincie Toscane, dell'Umbria e delle Marche, delle Accademie Imperiali di Pietroborgo e di Vienna e dell'Ateneo Veneto; Socio Onorario della R. Società Asiatica di Londra, della Società orientale di Germania, della Società geografica italiana, delle Accademie di Padova e di Gottinga; Presidente Onorario della Società Siciliana di Storia patria e Socio Onorario della Ligure, della Veneta e della Società storica di Utrecht; Gr. Uffiz. ✻, e Gr. Croce ⊗, Cav. e Cons. ✠.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella R. Università di Torino, ❋.

Ricci (Marchese Matteo), Socio Residente della Reale Accademia della Crusca, Uffiz. ❋.

Minervini (Giulio), Bibliotecario e Professore Onorario della Regia Università di Napoli, Segretario generale Perpetuo dell'Accademia Pontaniana, Socio Ordinario della Società R. di Napoli, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), della R. Accademia delle Scienze di Berlino, ecc., Uffiz. ❋, e Comm. ⊖, Cav. della L. d'O. di Francia, dell'Aquila Rossa di Prussia, di S. Michele del Merito di Baviera, ecc.

De Rossi (Comm. Giovanni Battista), Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), e della R. Accademia delle Scienze di Berlino e di altre Accademie, Presidente della Pontificia Accademia Romana d'Archeologia.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore, Consigliere della Corte di Cassazione di Roma e del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Uffiz. ❋, e Comm. ⊖.

Cantù (Cesare), Membro effettivo del R. Istituto Lombardo, Direttore dell'Archivio di Stato di Milano, e Soprantendente degli Archivi Lombardi, Socio delle Accademie della Crusca, dei Lincei, di Madrid, di Bruxelles, ecc.: Corrispondente dell'Istituto di Francia e d'altri, Gr. Uffiz. ❋ e Comm. ⊖, Cav. e Cons. ✠, Comm. dell'O. di C. di Port., Gr. Uffiz. dell'O. della Guadalupa, ecc., Officiale della Pubblica Istruzione e della L. d'O. di Francia, ecc.

Tosti (D. Luigi), Abate Benedittino Cassinese, Socio Ordinario della Società Reale delle Scienze di Napoli.

Berti (Domenico), Ministro d'Agricoltura, Industria e Commercio, Deputato al Parlamento nazionale, Professore emerito delle R. Università di Roma e di Bologna, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Cord. ⊖; ✠.

## Accademici Stranieri

Mommsen (Teodoro). Professore di Archeologia nella Regia Università e Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Müller (Massimiliano). Professore di Letteratura straniera nell'Università di Oxford. Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Mignet (Francesco Augusto Alessio), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia Francese) e Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze morali e politiche. Gr. Uffiz. della L. d'O. di Francia.

Renier (Leone), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere). Uffiz. della L. d'O. di Francia.

Egger (Emilio). Professore alla Facoltà di Lettere di Parigi. Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. della L. d'O. di Francia.

Bancroft (Giorgio). Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

De Witte (Barone Giovanni Giuseppe Antonio Maria), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Gregorovius (Ferdinando). Membro della R. Accademia Bavarese delle Scienze in Monaco.

Ranke (Leopoldo), Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, e Membro *Straniero* dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

Meyer (Paolo), Professore delle lingue e letterature dell'Europa meridionale nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes*, Cav. della L. d'O. di Francia.

# CORRISPONDENTI

## I. — SCIENZE FILOSOFICHE.

JOURDAIN (Carlo) dell' Istituto di Francia . *Parigi*
RENDU (Eugenio) . . . . . *Parigi*
MAMIANI (Terenzio), Senatore del Regno . . *Roma*
BONATELLI (Francesco), Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di . . . . . *Padova*
FERRI (Luigi), Professore di filosofia teoretica nella R. Università di . . . . . *Roma*

## II. — SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI.

LAMPERTICO (Fedele), Senatore del Regno . *Roma*
SERAFINI (Filippo), Professore di Diritto romano nella R. Università di . . . . . *Pisa*
SERPA PIMENTEL (Antonio DI) . . . . . *Madrid*
RODRIGUEZ DE BERLANGA (Manuel) . . . *Madera*

## III. — SCIENZE STORICHE.

MICHEL (Francesco) . . . . . *Bordeaux*
REUMONT (Alfredo DI), Corrispondente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti . . . . *Borcette* presso Acquisgrana
KRONE (Giulio) . . . . . *Vienna*
SANGUINETTI (Abate Angelo), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria . . . *Genova*
CHAMPOLLION-FIGEAC (Amato) . . . . . *Parigi*
ADRIANI (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria . . . . . *Cherasco*

DAGUET (Alessandro) . . . . . *Neuchâtel* (Svizzera)

PERRENS (Francesco) . . . . . *Parigi*

ODORICI (Federico). Prefetto della Biblioteca nazionale di . . . . . *Milano*

CAMPORI (Marchese Giuseppe), Presidente della R. Accademia di Scienze, Lettere, Arti in . . *Modena*

HAULLEVILLE (Prospero DE) . . . . . *Brusselle*

VILLARI (Pasquale), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*

GIESEBRECHT (Guglielmo), dell'Accademia Bavarese delle Scienze in . . . . . *Monaco*

DE LEVA (Giuseppe), Professore di Storia moderna nella R. Università di . . . . . *Padova*

SYBEL (Enrico Carlo Ludolfo DI), Direttore dell'Archivio di Stato in . . . . . *Berlino*

GACHARD (Luigi Prospero), Socio della R. Accademia delle Scienze del Belgio . . . . . *Brusselle*

WALLON (Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) . . . . . *Parigi*

TAINE (Ippolito), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

RIANT (Conte Paolo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

## IV. — ARCHEOLOGIA.

HENZEN (Guglielmo) . . . . . *Roma*

BOISSIEU (Alfonso DE) . . . . . *Lione*

WIESELER (Federico) . . . . . *Gottinga*

LEPSIUS (Riccardo), della R. Accademia delle Scienze di . . . . . *Berlino*

PALMA DI CESNOLA (Conte Luigi) . . . . *New-York*

GOZZADINI (Giovanni), Senatore del Regno . *Bologna*

RAWLINSON (Giorgio), Professore nella Università di . . . . . *Oxford*

GARRUCCI (P. Raffaele), della C. d. G. . . . *Roma*
FIORELLI (Giuseppe), Senatore del Regno . *Roma*
CURTIUS (Ernesto), Professore nell'Università di *Berlino*
BIRCH (Samuele), Conservatore delle Antichità orientali, ecc., e delle Collezioni etnografiche del *Museo Britannico* in . . . . . *Londra*

## V. — GEOGRAFIA.

NEGRI (Barone Cristoforo), Console generale di I^a^ Classe, Consultore legale del Ministero per gli affari esteri . . . . . *Torino*
KIEPERT (Enrico), Professore nell'Università di *Lipsia*
PIGORINI (Luigi), Professore di Paleoetnologia nella Regia Università di . . . . . *Roma*

## VI. — LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE.

KREHL (Ludolfo) . . . . . *Dresda*
RENAN (Ernesto), dell'Istituto di Francia . *Parigi*
SOURINDRO MOHUN TAGORE . . . . . *Calcutta*
ASCOLI (Isaia Graziadio), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di . . . . . *Milano*
WEBER (Alberto), Professore nell'Università di *Berlino*
WITHNEY (Guglielmo), Prof. nel Collegio *Yale*. *New Haven*
KERBAKER (Michele), Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di . . . . . *Napoli*

## VII. — FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA.

FRANCESCHI-FERRUCCI (Catterina), Corrispondente della R. Accademia della Crusca . . . *Pisa*
SILORATA (Pietro Bernabò), Prof., Comm. . *Roma*

Giuliani (P. Giambattista), Professore nel R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

Regnier (Adolfo), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

Linati (Conte Filippo) . . . . . *Parma*

Comparetti (Domenico), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*

Curtius (Giorgio), Professore di Filologia greca nell'Università di . . . . . *Lipsia*

# MUTAZIONI

*avvenute nel Corpo Accademico*
*dal* 1° *Gennaio* 1883 *al* 1° *Gennaio* 1884.

## ELEZIONI

Manno (Barone D. Antonio), eletto Tesoriere il 18 Febbraio e approvato con Decreto Reale dell'8 Marzo 1883.

Fabretti (Ariodante), eletto Presidente dell'Accademia il 6, e approvato con Decreto Reale del 20 Maggio 1883.

Peyron (Bernardino), eletto Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche il 17 Giugno, ed approvato con Decreto Reale del 27 Agosto 1883.

## SOCI.

Meyer (Paolo), eletto il 4, *Socio Straniero* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, e approvato con Decreto Reale del 15 Febbraio 1883.

Kiepert (Enrico), eletto il 17 Giugno 1883 a *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pigorini (Luigi), | id. | id. | id. |
| Serpa Pimentel (Antonio Di), | id. | id. | id. |
| Rodriguez de Berlanga (Manuel), | id. | id. | id. |
| Ferri (Luigi), | id. | id. | id. |
| Kerbaker (Michele), | id. | id. | id. |

## MORTI.

15 Gennaio 1883.

STANNIUS (Armando Federico). *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

13 Febbraio 1883.

CESATI (Barone Vincenzo). Professore di Botanica e Direttore dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli, *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche. matematiche e naturali.

24 Febbraio 1883.

RICOTTI (Ercole), Senatore del Regno, Presidente della R. Accademia delle Scienze di Torino. e della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ecc.

6 Marzo 1883.

WITTE (Carlo). Professore nell' Università di Halle, *Corrispondente* della Classe di Scienze morali. storiche e filologiche.

25 Maggio 1883.

LABOULAYE (Edoardo). dell' Istituto di Francia, *Corrispondente* della Classe di Scienze morali. storiche e filologiche.

9 Giugno 1883.

VANNUCCI (Atto), Senatore del Regno, *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

26 Giugno 1883.

Sabine (Edoardo), della Società Reale di Londra, *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

6 Novembre 1883.

Bruzza (P. Luigi), Barnabita, *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

15 Novembre 1883.

Ercolani (G. B.), Segretario della R. Accademia delle Scienze di Bologna, *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

20 Novembre 1883.

Barco (G. B.), Preside del R. Liceo *G. B. Beccaria* in Mondovì, *Socio nazionale residente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

1883.

Poli (Baldassarre), Socio del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Novembre-Dicembre**

1883.

# CLASSE
## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza del 18 Novembre 1883.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Cav. Prof. Giulio BIZZOZERO presenta e legge il seguente lavoro del signor Dott. Edoardo BONARDI, Assistente al Laboratorio di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Pavia:

# CONTRIBUZIONE ALL'ISTOLOGIA
DEL
# SISTEMA DIGERENTE
## DELL' *HELIX POMATIA*.

Gli individui da me adoperati per lo studio presente appartenevano alla varietà *grandis*, Moq. Tand. della specie *Helix pomatia*, Linn. Per il conveniente induramento delle varie porzioni del sistema digerente ricorsi a diversi metodi, cioè al trattamento successivo con alcool e gomma, con acido picrico e gomma arabica, e soprattutto alle miscele proposte dal Latteux e dal Langerhans. La soluzione del Latteux (1) consta di 100 gr. di acqua, di 50 gr. di glicerina, di 200 gr. di sciroppo di gomma ben denso, di 100 gr. di sciroppo di glucosio, di 1 gr. di acido fenico e di 100 gr. di alcool ordinario. Questo liquido di consistenza sciropposa, reso limpido per filtrazione attraverso una flanella, si

(1) LATTEUX, *Manuel de Technique microscopique*. Paris 1877.

conserva indefinitamente ed indurisce sufficientemente i pezzi, senza raggrinzarli. Tale pregio lo gode eminentemente il miscuglio proposto dal Langerhans (1) preparato con una soluzione di 5,0 di gomma arabica in 5,0 di acqua, a cui si aggiunge, dopo 12 ore, 5,0 di glicerina, 10,0 di una soluzione di acido fenico al 5 %, facendo seguire alla sua azione quella dell'alcool ordinario.

Induriti i pezzi ne preparai le sezioni sottili, fissandoli con paraffina o midollo di sambuco, ed operando col microtomo del sig. E. Zeiss di Jena.

Il tubo digerente dell'*Helix pomatia* incomincia con un *orificio boccale*, a figura di Y quando è chiuso, situato alla parte anteriore ed inferiore della testa. È contornato da labbra in numero di due; uno superiore, intero, l'altro inferiore, diviso in due parti (lobi labiali) da una fenditura verticale.

All'orificio boccale, segue la *saccoccia boccale*, ampia, scavata nella massa del *bulbo faringeo*, che è ovale, a pareti grosse e resistenti. Nella bocca sono situati due organi che servono principalmente alla masticazione. Uno è impiantato nella parete superiore della cavità boccale; è piccolo, duro, di colore bruno intenso, leggermente ricurvo dall'avanti all'indietro, provvisto anteriormente di salienze più o meno parallele fra loro, che sorpassando il margine libero, terminano in salienze dentiformi: vien chiamato impropriamente *mascella*. L'altro è una placca apparentemente cartilaginea, elastica, biancastra, situata sul pavimento della cavità boccale. È coperta da una membrana chitinosa, tenue, rugosa, munita di eminenze solide, acute, allineate regolarmente nel senso trasversale, conosciute sotto il nome di denti. È puntuta in avanti e termina all'indietro in un piccolo *cono*, corto e smussato, di cui l'estremità sporge fuori dalla massa carnosa, sotto l'esofago, al disopra dell'inserzione dei muscoli retrattori della massa boccale (2). Spaccando, come consiglia il Semper (3), il faringe dal disopra e gettando i lembi sui lati, si vede appunto la parte anteriore e posteriore della lingua, restando la parte mediana nascosta dal-

---

(1) Langerhans, *Modification der Farrand'schen Flüssigkeit. Zool. Anzeiger.* 1880, p. 575.

(2) Cuvier, *Mémoire pour servir à l'histoire et à l'anatomie des Mollusques* (*Mémoire sur la Limace et le colimaçon*, p. 16). Paris, 1817.

(3) Semper, *Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Pulmonaten.* — *Zeitschrift für wissentschaftliche Zoologie.* — Leipzig. 1857, vol. VIII, p. 355.

l'esofago che vi si apre sopra. Dirò ora dell'istologia di questa prima porzione del canale digerente.

La parete del *bulbo faringeo* risulterebbe, secondo le mie osservazioni, di cinque strati ben distinti. Il più esterno è di natura connettiva, con una sostanza fondamentale apparentemente fibrillare, finamente granulosa invece ad un forte ingrandimento. Contiene abbondanti nuclei irregolarmente disposti, contornati da residui di protoplasma; le cellule complete sono rare. I nuclei sono granulosi e le cellule contengono spesso delle concrezioni calcaree che scompaiono nel trattamento coll'acido acetico. Vi si trovano pure delle vescicolette splendenti, che abbruniscono coll'acido osmico, si sciolgono nell'alcool e nell'etere e che molto probabilmente sono di natura grassa. Il Semper, nell'opera citata (1), non dubita di chiamarle vescicole adipose. Sotto questa tunica connettiva segue un grosso strato muscolare in cui sono evidenti due ordini di fibre, longitudinali, cioè, le più esterne, circolari le più interne. È evidente la continuazione della tonaca muscolare faringea col tubo muscolare della parete del corpo. Le fibre, secondo i vari autori, sono lisce costantemente nei Molluschi, derivanti dallo sviluppo di una sola cellula (2), granulose e più opache nella porzione assile, più trasparenti ed omogenee nella porzione periferica. Anch'io ho, in generale, riscontrati questi caratteri nella musculatura dell'*Helix pomatia*, ma al faringe le fibre offrono spesso una vera apparenza di strie trasversali. Il Leydig (3) ammette addirittura i muscoli striati nel faringe di parecchi Gasteropodi. Per quanto riguarda l'*Helix pomatia* io credo che ciò non sia esatto. Infatti io trattai parecchi elementi primitivi dissociati col bicromato di potassa (10 %), coll'acido cromico al 2000°, coll'idrato di cloralio al 5 % (4), mediante il picrocarminato e l'acido osmico (5) ma non ottenni che la colorazione di un solo nucleo, di forma elittica, piuttosto grande. Perciò venni nella convinzione che la sopraccennata striatura dipendesse unicamente da una particolare disposizione della sostanza muscolare dentro il sarcolemma.

---

(1) Semper, Op. cit., p. 354.

(2) Leydig, *Traité d'histologie de l'homme et des animaux*, 1866, p. 110.

(3) Leydig, Op. cit., p. 148.

(4) Lavdowsky, *Zur feineren Anatomie und Physiologie der Speicheldrüsen, inbesondere der Orbitaldrüse. Arch. für mik. Anat.* XIII, p. 359.

(5) Weber, *Note sur les noyaux des muscles striés chez la grénouille adulte. Arch. de Physiol.*, 1875, p. 489 e seguenti.

Procedendo verso l'interno succede alla tonaca muscolare *uno straterello di tessuto connettivo* sul quale riposa l'epitelio, e che può considerarsi quale una continuazione della tonaca connettiva, molto sviluppata, secondo le mie ricerche, nelle altre parti del canale digerente. Presenta una sostanza fondamentale granulosa, in cui vedonsi poche cellule complete; talune di queste offrono un contorno ben marcato, a guisa di membrana. I loro protoplasmi sono granulosi. Sono copiose le cellule incomplete, costituite cioè del solo nucleo, con avanzi di protoplasma che lo circondano. Col nitrato d'argento a 0,03 restano intatti i nuclei e le fibrocellule muscolari, mentre i rimasugli di protoplasma si colorano in nero. Ricevono questa tinta, ma in grado più intenso, anche le granulazioni della sostanza fondamentale. Col metodo delle doppie colorazioni, ho potuto metter ben in evidenza questo tessuto connettivo. Così trattando le sezioni, secondo il consiglio di Stirling (1), dapprima con acido picrico, poi con picrocarmino, il tessuto connettivo si tinge in rosso, mentre le fibre muscolari assumono una colorazione giallo-intensa. I nuclei particolarmente si mostrano tinti dal picrocarmino. Anche adoperando la porporina, come indica il Ranvier (2), si possono mettere egregiamente in evidenza i nuclei i quali, per la tinta marcata che ricevono, risaltano sulla sostanza fondamentale rimasta incolora. L'epitelio che fa seguito allo strato connettivo è cilindrico, a cellule molto lunghe, distintamente nucleate, e provvedute di cilia sulla salienza indicata dal Semper (3), che partendo dal fondo della cavità boccale, si stende abbastanza in avanti sulla parete superiore della cavità stessa. Il nucleo si tinge assai bene col picrocarmino, e col nero di anilina (4). La forma delle cellule la rilevai facilmente coll'impiego del nitrato d'argento nel modo descritto dal Latteux (5). Il protoplasma è ricco di granulazioni abbastanza grosse.

La cuticola annessa all'epitelio faringeo è di uno spessore considerevole. Presentasi stratificata nel senso longitudinale. Sono però evidenti anche delle grosse strie perpendicolari all'epitelio, che di-

---

(1) Stirling, *On double an treble steining of microscopic specimens. Journ. of Anat. und Physiol.*, vol. XV, p. 319 e seg.

(2) Ranvier, *Des applications de la purpurine à l'histologie. Arch. de Physiologie*, 1875, p. 761 e seg.

(3) Semper, Op. cit., p. 354.

(4) Sankey, *On an new solution for steining sections of hardened animal tissues. Quart. Journ. of mic. science*, 1876, p. 95 e seg.

(5) Latteux, Op. cit., p. 172.

vidono la cuticola in tanti prismi più o meno regolari, presentanti diagonalmente un terzo ordine di finissime striature. Probabilmente le strie perpendicolari corrispondono a poricanali. La miscela delle soluzioni di eosina e di verde di metile proposte da Calberla (1) produsse nelle mie sezioni di faringe delle stupende colorazioni. I nuclei delle cellule epiteliari si tingono in rosso-violetto, quelli della sostanza connettiva in bleu-verdastro, la cuticola in verde-erba, le fibro-cellule muscolari in verde, la loro sostanza inter-cellulare in rosso, il protoplasma delle cellule in rosso. L'epitelio e la cuticola faringea, derivano da un'introflessione dell'epitelio esterno.

La mascella dell'*Helix pomatia* dovrebbe essere, secondo il parere di Braconnot (2) del muco indurito, contenente una piccola quantità di carbonato di calce. Il Leydig (3) la pone tra le produzioni cuticolari inspessite. Contiene quella particolare sostanza che nomasi *chitina*. Le sezioni cimentate colla potassa caustica offrono l'aspetto di una sostanza omogenea, priva di elementi, stratificata in vario senso, colorantesi in rosa colla eosina ed in verde-erba colla citata soluzione di Calberla. La lingua può dirsi col Semper (4) formata principalmente da una porzione fondamentale muscolare, divisibile in tre muscoli distinti, due dei quali simmetrici, sono disposti in tal maniera da lasciare anteriormente un' infossatura e posteriormente un divaricamento per ricevere l'estremità anteriore della così detta papilla; il terzo, impari, giace inferiormente agli altri due, in direzione trasversale, nella porzione mediana e posteriore della lingua, e serve, unitamente al tessuto connettivo che lo avvolge a tener uniti i due primi. I quali sono indipendenti l'uno dall'altro essendo separati da tessuto connettivo (fig. 11, *a*), che esiste, anche fra essi, ed il muscolo trasverso.

Nel trattamento delle sezioni, con ematoxilina ed acido picrico (5), risalta bene la presenza del connettivo attorno ai tre muscoli, per la sua colorazione bruno-rossa, che contrasta con quella gialla delle fibre muscolari. La disposizione delle fibre

---

(1) Calberla, *Beitrag zur mikroskop. Technik. Morph. Jahrb.*, 1877, III, p. 625 e seg.

(2) Moquin-Tandon, *Histoire naturelle des Mollusques terrestres et fluviatiles de France*, 1855, p. 31.

(3) Leydig, Op. cit., p. 378.

(4) Semper, Op. cit., p. 355.

(5) Gerlach, *Structur der Gefässhäute. Sitzungsberichte der phys. med. Societät zu Erlangen*, 1872, 29 luglio.

muscolari del muscolo trasverso è, come già dissi, parallela al piano della lingua. Sono stipate ed uniformi. La sostanza che le unisce non presenta elementi. Invece i muscoli laterali sono formati da numerosi fascetti, tenuti insieme da una sostanza particolare, che forma altrettante liste, più o meno tortuose, larghe presso a poco quanto i fascetti. La direzione delle fibre è perpendicolare al piano della lingua (fig. 11, *b*, *c*). La sostanza interposta ai fascetti è di aspetto gelatinoso, granulosa però a forti ingrandimenti. Offre una reticolazione che la divide in tante aree poligonali (fig. 11, *c*) più o meno regolari, che il Semper osservò nella lingua di molti Molluschi, e figurò per quella del Vaginulus (1). L'illustre osservatore considera quelle aree poligonali come cellule cartilaginee. Per conto mio, ho osservato che non tutte sono provviste di nucleo, che il loro contorno non è sempre ben definito, che colle sostanze coloranti, e soprattutto colla soluzione iodata, si colora leggiermente ed uniformemente. I nuclei invece risaltano distintamente colle varie miscele già citate. Si osservano anche delle cellule elittiche, rare, irregolarmente sparse, a contorno marcato ed a nucleo distinto (fig. 11, *d*).

In vicinanza della radula, la sostanza interposta ai fascetti muscolari dei muscoli laterali, è molto probabilmente connettiva. Contiene qualche cellula a contorno molto spiccato e numerosi nuclei (fig. 5ª).

Il tessuto connettivo che avvolge i descritti muscoli è costituito da sostanza intercellulare granulosa, coi granuli spesso allineati, ricca di cellule elittiche e di nuclei contornati da residui di protoplasma. Spesso le cellule hanno un contorno marcatissimo. Talune hanno i poli appuntati a guisa di limoni. Sopra il connettivo sta l'epitelio, a cellule cilindriche, con protoplasma granuloso e nucleo ovale. La cuticola che succede all'epitelio è sviluppata alla lingua più che in qualunque altro punto del tubo digerente. La sua stratificazione è evidentissima, come anche le strie perpendicolari già citate e quelle diagonali, sicchè assume un aspetto veramente reticolato. La cuticola della lingua presenta qualche cellula a protoplasma ialino ed anche qualche nucleo. Probabilmente sono riduzioni di cellule epiteliari. Finalmente dopo la cuticula viene la radula sotto forma di una membrana ben

(1) Semper, *Zum feineren Baue der Mollusk nzunge. Zeitsch. für wiss. Zool.*, 1857-58, fig. 5, tav. 12.

distinta, che nella sezione verticale presenta due strati: uno inferiore, rugoso, ed un altro superiore o dentale che offre una struttura stratificata.

Nell'*Helix pomatia* la radula copre la placca linguale in tutta la sua estensione.

È provveduta di solchi trasversali e di solchi longitudinali che danno luogo a tanti piccoli quadrilateri nel mezzo dei quali si trovano delle papille biancastre irregolarmente piriformi, ottuse in numero di 5.600 secondo Moquin-Tandon (1). La papilla o matrice della lingua, entro cui la radula termina a fondo cieco (fig. 1, *h*) presenta esternamente un rivestimento connettivo simile a quello che trovasi esternamente alla tonaca muscolare faringea; gli succede uno strato di fibre muscolari circolari (fig 1, *f*) a cui fa seguito *una tonaca connettiva*, ben distinta, non notata nei lavori ch'io conosco, provvista di cellule ovalari, a contorno spiccato, nucleate, cementate dalla solita sostanza granulosa (figura 1, *a*; fig. 12, *a*). Questo strato connettivo è in contatto coll'epitelio della radula (fig. 12, *b*; fig. 1, *b*) cilindrico, nucleato, il quale presenta, a ridosso della radula, uno strato cuticolare (fig. 12, *c*; fig. 1, *e*).

Colla miscela delle soluzioni di carmino ed indigo-carmino al borace, come è proposta da Norris e Shakespeare (2) e da Merbel (3) ho ottenuto una netta distinzione del tessuto connettivo posto tra l'epitelio della radula e lo strato muscolare. Si tinsero egregiamente in bleu la sostanza fondamentale ed i nuclei.

La porzione centrale della papilla si compone di una sostanza translucida, incolora, che nella parte sua periferica, vicino alla radula, presenta una struttura prettamente connettiva, con elementi simili a quelli sopradescritti dello strato connettivo esterno di questa membrana (fig. 12, *h*; fig. 1, *g*) Nel resto è fibrillare: le fibrille hanno varie direzioni, e solo verso la parte aperta della figura a ferro di cavallo che si vede nella sezione (fig. 1) si mostrano parallele ed offrono anche, secondo il Semper (4).

---

(1) MOQUIN-TANDON, Op. cit., p. 37.

(2) NORRIS e SHAKESPEARE, *A new method of double staining. American Journal of the medical sciences*, January, 1877.

(3) MERBEL, *Double staining with a single fluid. Monthly mic. Journ. Nov. and Dec.* 1877, p. 242.

(4) SEMPER, *Beit. zur. Anat. und Phys. Mollk.*, p. 338.

dei rigonfiamenti in cui sarebbe collocato il nucleo. Queste fibre andrebbero a costituire le *gambe della papilla*; che si confondono poi coi muscoli laterali della lingua. Si tratterebbe quindi di elementi muscolari.

I metodi di colorazioni già citati mi hanno persuaso della verità di queste vedute del Semper. Devo però aggiungere che quelle fibre muscolari sono aggruppate a fasci, aventi varie direzioni, e tenuti insieme da abbondante tessuto connettivo con nuclei e con elementi cellulari ben definiti, simile a quello confinante coll'epitelio della radula. Il Kölliker (1), ed il Sicard per lo *Zonites algirus* (2) hanno ritenuto di natura connettiva questo nocciolo centrale della papilla.

L'esofago ha origine dalla parte posteriore-superiore della *massa boccale* o *bulbo faringeo*, guardando colla sua apertura la porzione posteriore-superiore della lingua. Passa sopra la papilla, attraversa il cingolo esofago e va a metter capo nello stomaco dopo un decorso di 15 millim. all'incirca. La sua parete è delicata e striata internamente nel senso longitudinale. Lo stomaco non si distingue nettamente dall'esofago; è allungato, quasi cilindrico, largo, distensibile assai; termina in un cul di sacco allato del quale si apre il piloro. La parete dello stomaco è pure gracile, semitrasparente, con dei punti più opachi qua e là (3); internamente presenta delle salienze e dei solchi che si continuano con quelli dell'esofago. L'intestino è cilindrico, flessuoso, presso a poco del medesimo calibro in tutta la sua lunghezza, che è di 9 cent. All'esame macroscopico non è divisibile in parti diverse; tuttavia gli anatomici riguardano la prima parte o anteriore, come un *duodeno*, la seconda, o terminale, come un *retto* (4). La parte duodenale è provveduta internamente delle salienze e dei solchi, continuantisi pressochè ininterrotti e più o meno evidenti, fino all'estremità faringea dell'esofago. L'intestino fa una grande piega che si infossa della cavità della conchiglia

---

(1) Kölliker, *Mittheilungen zur vergl. Gewebelehre. Würtb. Verhandl.*, 1857, 1, Hft.

(2) Sicard, *Recherches sur les Zonites algirus. Annales des Sciences naturelles.* 1874, tomo I, p. 46.

(3) Cuvier, Op. cit., p. 18

(4) Moquin-Tandon, Op. cit., p. 47.

seguendo la direzione della spirale. È tenuto in posto specialmente dai lobi del fegato ai quali è fissato per mezzo del tessuto connettivo e di numerosi vasi, tanto arteriosi che venosi. Ritornando su se stesso, entra nella cavità respiratoria, si mette in rapporto coll'organo renale, il cui canale escretore decorre appunto accollato al retto. Termina all'ano, situato vicino all'apertura respiratoria, alla base e sul lato destro del collare.

Per quanto riguarda la fina anatomia della parete di queste parti, dall'esofago alla terminazione del duodeno, le mie osservazioni m'hanno condotto ad ammettere un rivestimento connettivo esterno analogo alla sierosa degli animali superiori, una duplice tonaca muscolare che gli fa seguito, un epitelio munito di cuticola, e, fra questo e lo strato muscolare, una seconda tonaca connettiva analoga alla mucosa (fig. 3).

Sul rivestimento sieroso e sugli strati muscolari, poco ho da aggiungere a quanto ho già detto pel bulbo faringeo. La sostanza fondamentale del connettivo qui è più manifestamente fibrillare. Le fibro-cellule muscolari non hanno mai l'aspetto striato. Le esterne sono dirette longitudinalmente, le interne trasversalmente, non mancando di quelle a direzione obliqua.

I fascetti muscolari sono tenuti insieme da un tessuto connettivo amorfo, che, nelle maglie lasciate dall'intreccio di quelli, mostrasi distintamente granuloso.

Il connettivo sottoepiteliare (fig. 3, *c*) costituisce una tonaca separabile colla macerazione nel siero iodato e nell'alcool al terzo, dall'epitelio e dai muscoli. Essa è sottile in corrispondenza delle solcature descritte; è invece molto sviluppata in corrispondenza delle salienze nelle quali penetra, dimodochè, nelle sezioni trasversali, mostrasi sotto forma di irregolari coni, o di clave, di ampiezza commisurata al volume della salienza. Questo tessuto connettivo è percorso da qualche fibra muscolare; la sua sostanza fondamentale è granulosa, raramente fibrillare; gli elementi completi sono scarsi; abbondano invece i nuclei contornati spesso da rimasugli di protoplasma. Si vede anche qualche sezione di fibra muscolare che si distingue facilmente colle doppie colorazioni. Ciò che sembrami importante in questa specie di mucosa è la presenza di lacune irregolari, ora isolate (fig. 3, *d*, *f*), ora comunicanti fra di loro. Spesso anzi il cono o la clava connettiva succennata offre un vero canale che la percorre nel senso longitudinale. Degli Autori ch'io conosco credo che nessuno, finora, abbia descritto

una cosiffatta tunica connettiva. Il Leydig (1) parla in generale di una *tunica propria* negli Invertebrati, ma non si estende ad alcuna particolarità. Il Sabatier invece nell'Anatomia del *Mytilus edulis* (2) ha descritto un connettivo sottoepiteliare affatto simile a quello ch'io vidi nell'*Helix pomatia*, e che egli chiama *tessuto adenoide*.

Servendomi della già citata soluzione di nitrato d'argento ho potuto metterlo bene in evidenza. Mi giovò assai a questo scopo anche la soluzione di verde di iodio proposta da Griesbach (3). Questa, mentre colora in verde l'epitelio ed i muscoli, tinge appena, o lascia intatto il connettivo.

Anche la comune miscela di carmino e picrocarmino e varie altre citate soluzioni mi servirono per controllare i risultati. Mediante la macerazione nell'alcool al terzo ho potuto ottenere, dopo allontanato l'epitelio, qualche lembo del tessuto in discorso. Si presenta come è disegnato nella fig. 4.

Le lacune sono sprovviste di endotelio ed io non saprei pronunciarmi sulla loro natura. Certo che debbono avere una certa importanza fisiologica. L'epitelio è cilindrico, a cellule allungate, distintamente nucleate, e sprovviste di cilia. Colla macerazione nell'alcool al terzo ho distaccato dei magnifici lembi di epitelio. Le fig. 7 e 9 danno un'idea dei diversi aspetti con cui mi si presentarono al microscopio. Le cellule isolate hanno talora figure singolari (fig. 8 e 10, *a*, *b*, *c*, *d*).

Servendomi della soluzione di metil violetto consigliata dal Ranvier (4), ho potuto accertarmi della mancanza delle cilia nelle cellule epiteliari. Siebold, la aveva già sostenuta nel noto Manuale di Anatomia comparata (5). Il Sicard (6), non ha veduto cilia nello *Zonites algirus*. Fa rilevare giustamente la contraddizione in cui è caduto il Leydig (7) negando la presenza di

(1) Leydig, Op. cit., p. 576.

(2) Sabatier, *Anatomie de la Moule commune. Ann. Sciences Nat.*, 1877, tom. 5, p. 20.

(3) Griesbach, *Ein neues Tinctions-mittel für menschliche und thieriche Gewebe. Zool. Anz.*, 1882, n. 17.

(4) Ranvier, *De l'emploi de l'alcool dilué en histologie. Arch. de Physiol.* 1875, p. 784 e seg.

(5) Siebold und Stannius, *Manuel d'Anatomie comparée*, tom. 1, p. 317, nota 1.

(6) Sicard, Op. cit., p. 50.

(7) Leydig, Op. cit., p. 376.

cellule epiteliari ciliate nell'intestino e nello stomaco dell'*Helix hortensis*, e poi dando una figura che prova precisamente l'opposto. Quanto al Semper, egli ammette che l epitelio sia ciliare in tutti i Polmonati (1).

L'epitelio tanto nell'esofago quanto nello stomaco e nell'intestino riveste e i solchi e le salienze. Rivestendo i primi diventa un epitelio ghiandolare. Infatti, le sezioni trasversali dei solchi mostrano delle vere ghiandole (fig 3, *h*) e per tali furono ritenute dal Leukart (2), dal Leydig (3), dal Semper (4) e più recentemente dal Sabatier (5) nel *Mytilus edulis*.

L'epitelio disposto attorno ai sopraccennati coni connettivi può dirsi di funzione assorbente; e tali coni rivestiti da epitelio, scavati, come ho detto, da canali e da lacune, possono bene considerarsi quali villosità, in qualche modo analoghe ai villi degli animali superiori. E forse anche si dovrebbe, nelle *analogie* da me ricordate, vedere delle vere *omologie*, considerando la natura palingenetica del tubo digerente in generale, nell'albero della organizzazione animale

Tanto l'epitelio ghiandolare quanto il villoso, sono rivestiti da una tonaca intima o cuticola, pressochè uniforme in ispessore nei solchi e sulle salienze, assai meno sviluppata che nel faringe. È noto ch'essa deriva dalla metamorfosi e dalla fusione più o meno completa delle estremità delle cellule epiteliari.

È stratificata. Non presenta le altre particolarità che ho descritto nel faringe.

I diversi strati, che ho passato in rassegna, si trovano, come già dissi, tanto nell'esofago, quanto nello stomaco, nel cul-di-sacco, e nel duodeno. Esistono solamente differenze di sviluppo. Così nell'esofago la porzione ghiandolare è meno sviluppata che nelle altre parti: è però ben manifesta. Nel cul-di-sacco assume uno spessore ragguardevole il connettivo sottoepiteliare, e conseguentemente sono sviluppatissime le villosità.

Ricordando ora che la *porzione ghiandolare* corrisponde ai solchi e *la villosa* alle salienze, e ricordando pure che gli uni

(1) Semper, loc. cit., p. 363.

(2) Leukart, *Zoolomie*.

(3) Leydig, Op. cit., p. 381, *Ueber Paludina vivipara. Zeitsch. wiss. Zool.*, vol. II, p. 125.

(4) Semper, *Beit. zur Anat. und Physiol. der Pulmonaten*, p. 361.

(5) Sabatier, Op. cit., p. 28.

e le altre si estendono dall'esofago alla fine del duodeno, sembrami poco corretta, dal punto di vista anatomo-fisiologico, la distinzione usata di esofago, stomaco e duodeno. Si potrà conservarla per comodità di descrizione, ma istologicamente e funzionalmente è probabile che abbia poco valore. Sembrami quindi ragionevole lo ammettere nel tubo digerente dell'*Helix pomatia*, due porzioni estreme, meccaniche, una di prensione e di triturazione, l'altra di espulsione, ed una porzione mediana che comprende esofago, stomaco, cul-di-sacco e duodeno, in cui una localizzazione di funzioni, che giustifichi queste denominazioni, non è peranco avvenuta.

Le ghiandole salivali sono situate lungo i lati dello stomaco, che abbracciano coi loro lobi. Sono corpi appiattiti, biancastri; i condotti escretori accompagnano l'esofago, passano con esso pel cingolo esofageo, perforano la parete superiore del bulbo faringeo e si aprono nel cavo boccale, ai lati della lingua. Leydig (1) le colloca tra le ghiandole monocellulari a membrana chiusa, non prolungantesi in un canale di escrezione. Le chiama ghiandole monocellulari solo perchè ciascuna cellula è contornata di una tunica propria. Il Semper (2) ha meglio osservato che le cellule secretrici sono avviluppate da una tunica connettiva non chiusa, ma continuantesi in un canale di escrezione che mette capo nel canale escretore comune. La membrana connettiva è nucleata. Il condotto escretore consta di tre tonache. La esterna è connettiva, a sostanza fondamentale granulosa e scarsa con cellule ben evidenti, abbastanza voluminose. Poche sono incomplete. Questo strato connettivo è una continuazione di quello che riunisce i varî lobuli ghiandolari. La media è muscolare, con fibrocellule circolari incrociantisi con parecchie oblique. La interna è un epitelio a cellule cilindriche, assai piccole in confronto delle secretrici. Io non ho potuto verificarne le cilia ammesse da Siebold (3). Il Semper afferma di non aver mai riscontrato cilia nell'epitelio delle ghiandole salivali dei Polmonati (4). Così pure il Sicard nello *Zonites algirus* (5).

(1) Leydig, *Traité d'Histologie comparée*, p. 396.
(2) Semper, Op. cit., 363.
(3) Siebold e Stannius, Op. cit., p. 320.
(4) Semper, *Beit. zur Anat. und Physiol. der Pulmonaten*, p. 366.
(5) Sicard, Op. cit., p. 51.

Le cellule secretrici sono grosse, ovali, con nuclei voluminosi che si tingono egregiamente coi metodi già accennati.

Il fegato dell'*Helix pomatia* è diviso in quattro grandi lobi ciascuno dei quali è decomponibile in un'infinità di lobuli (1). È di un colore bruno intenso. Ciascun lobulo ha il suo vasellino biliare che si riunisce successivamente ai vicini, formandosi così un grosso condotto per ciascun lobo. I quattro condotti si riuniscono in un tronco solo che sbocca nel cul-di-sacco, in modo da versare porzione della bile nel così detto duodeno, e porzione nello stomaco (2).

Gli otricoli che entrano nella costituzione dei lobuli epatici (fig. 2) sono irregolarmente poligonali o rotondeggianti. Constano di pareti connettive molto grosse, con cellule e nuclei a sostanza fondamentale granulosa al centro della parete, distintamente fibrillare invece ai margini, laddove il tessuto circoscrive l'otricolo.

La fibrillatura del tessuto connettivo del fegato è ancor più evidente di quella ricordata nei muscoli laterali e trasverso della lingua e nel rivestimento sieroso del tubo gastro-enterico. È una di quelle località ammesse in generale dal Brock (3) dove il connettivo a sostanza fondamentale granulosa con elementi e nuclei provvisti o meno di resti di protoplasma, passa gradatamente al connettivo fibrillare (fig. 2, *e*). Sulla parete interna degli otricoli sono applicate delle cellule di varia natura. Alcune (fig. 2, *d*) uniformemente grosse, con nucleo voluminoso, ripiene di granulazioni incolore e rifrangenti, addossate alla parete dell'otricolo, sono indicate dal Barfurth (4) come cellule calcaree. Quelle granulazioni infatti rimangono inalterate all'acido osmico e si sciolgono negli acidi forti. Sono dunque probabilmente del carbonato di calce. Le altre cellule, irregolarmente poliedriche per reciproca pressione, sono di colore giallo-verdognolo, di grossezza variabile, spesso sferiche se libere. Sono le vere cellule epatiche. Il loro protoplasma è ricco di vescicole di adipe e di varie granulazioni; io non sono riuscito a distinguere, anche coll'impiego dell'acido osmico, le cellule dette *del fermento* (Fermentenzellen) dal Barfurth (5).

---

(1) Cuvier, Op. cit., p. 19.

(2) Cuvier, Op. cit., p. 20.

(3) Brock, *Ueber homogene und fibrilläre Bindesubstanz bei Mollusken. Zool. Anzeiger*, 1852, N. 124, p. 579 e seguenti.

(4) Barfurth, *Die Leber der Gasteropoden, ein Hepatopancreas. Zool. Anzeiger*, 1880, N. 66, p. 499 e seg.

(5) Barfurth, Mem. cit., p. 500.

Finalmente accennerò alla presenza di numerose fibro-cellule muscolari (fig. 2, *a*) aventi direzione diversa, nell'inviluppo peritoneale del fegato. Il Sicard dice di non averle riscontrate nello *Zonites algirus* (1). Il Leydig le aveva già descritte nella *Paludina vivipara* (2).

Colle miscele coloranti ho conseguito una netta distinzione degli elementi del fegato di cui ho discorso.

Dal Laboratorio di Anatomia e Fisiologia comparata dell'Università di Pavia

Luglio 1883.

---

(1) SICARD, Op. cit., p. 53.
(2) LEYDIG, *Histologie comparée*, p. 411.

---

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

FIG. 1ª — *Sezione verticale della papilla linguale*:
**a**) connettivo — **b**) epitelio — **c**) cuticola — **d**) radula — **e**) fibre muscolari parallele del nocciolo della papilla — **f**) sezioni di fasci muscolari — **g**) fibre muscolari dello stesso nocciolo, intrecciantisi in vario senso — **h**) fondo cieco della matrice della radula.

FIG. 2ª — *Sezione trasversale di un lobo del fegato*:
**a**) muscoli dell'invoglio peritoneale — **b**) tessuto connettivo granuloso — **c**) cellule epatiche — **d**) cellule calcaree — **e**) tessuto connettivo fibrillare.

FIG. 3ª — *Sezione trasversale dello stomaco*:
**a**) Connettivo del rivestimento sieroso — **b**) tonaca muscolare — **c**) connettivo sottoepiteliare — **d**, **e**) lacune del medesimo — **f**) epitelio — **g**) cuticola — **h**) ghiandola.

FIG. 4ª — *Lembo di connettivo sottoepiteliare dello stomaco veduto di fronte*.
**a**) connettivo — **b**) lacuna.

FIG. 5ª — *Sezione di uno dei muscoli laterali della lingua*:
**a**) fibro cellule muscolari — **b**) connettivo — **c**) denti della radula.

FIG. 6ª — *Lembo di connettivo sottoepiteliare dell'intestino, veduto di fronte*.
**a**) fibro-cellula muscolare — **b**) connettivo — **c**) cellule a doppio contorno.

FIG. 7ª, 8ª, 9ª, 10: — Forme di cellule epiteliari dello stomaco e dell'intestino.

FIG. 11. — *Sezione di un muscolo laterale della lingua*:
**a**) connettivo fibrillare — **b**) fascio muscolare — **c**) sostanza esistente tra i fasci muscolari — **d**) cellula connettiva?

FIG. 12. — Porzione della fig. 1 ingrandita:
**a**) connettivo — **b**) epitelio — **c**) cuticola — **d**) strato di demarcazione tra la cuticola e la radula — **e**) radula — **f**) suoi denti — **h**) connettivo della porzione periferica del nocciolo della papilla — **g**) Strato sottocuticolare simmetrico a quello segnato con **d**.

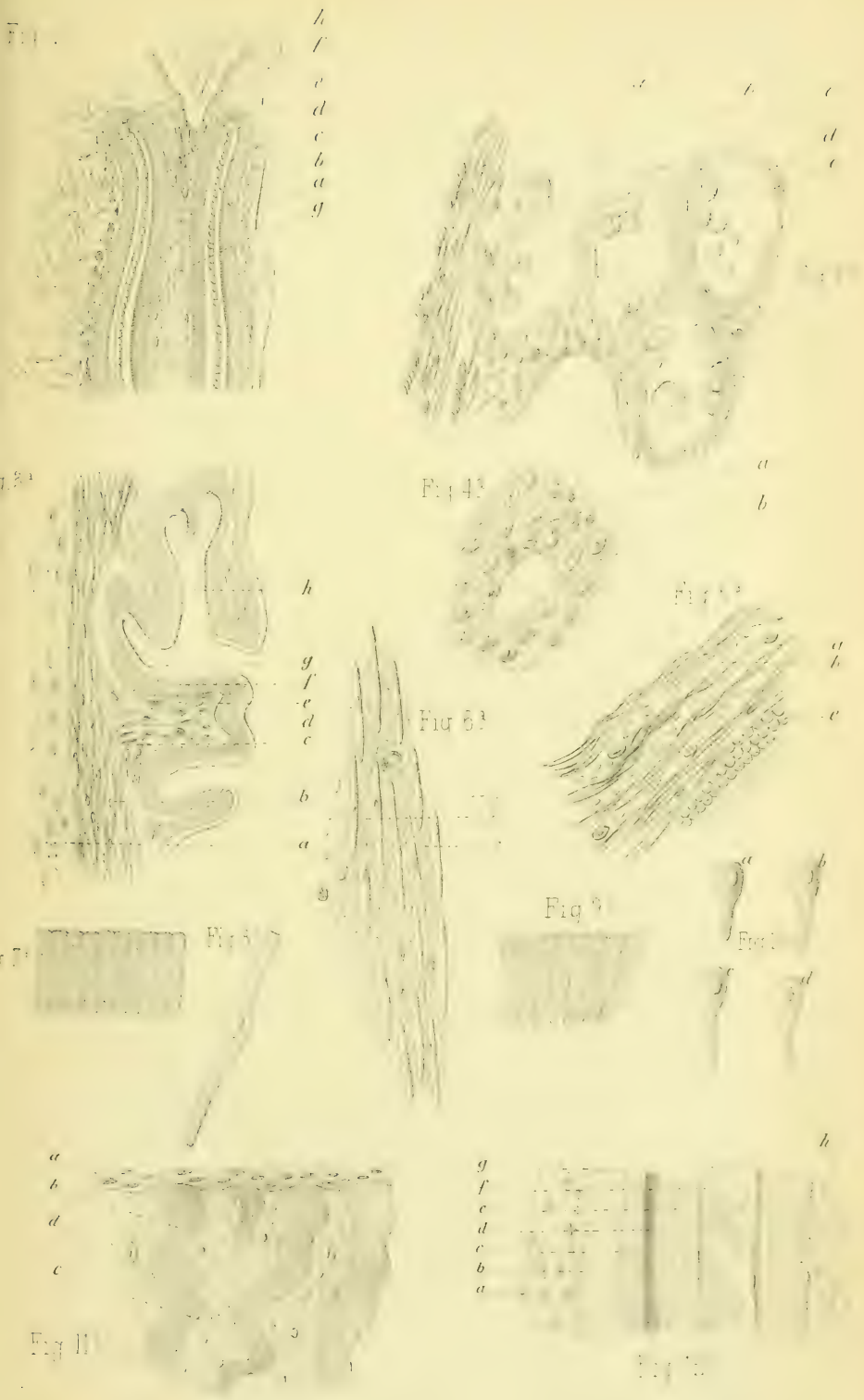


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Lo stesso Socio Bizzozero presenta ancora e legge il seguente lavoro del signor Romeo Fusari, studente di Medicina, eseguito nel Laboratorio di Istologia e Patologia generale della R. Università di Pavia,

# SULL'ORIGINE

DELLE

# FIBRE NERVOSE

nello strato molecolare

## DELLE CIRCONVOLUZIONI CEREBELLARI

DELL' UOMO.

L'indagine della origine centrale delle fibre nervose forma certo uno degli argomenti più interessanti delle scienze biologiche, giacchè per tal via si può avere un lume nel rilevare il significato fisiologico delle fibre stesse. Per la qual cosa non sarà mai fatica superflua l'estendere queste ricerche a tutte le singole parti del sistema nervoso, potendo le fibre col variare della regione variare il rapporto loro cogli organi centrali. Giova poi anche per ciascuna ricerca ripetere le prove reiteratamente, perchè la reazione nera del Professore Golgi, fino ad oggi a mio credere la migliore che si possa usare con vantaggio in tali studi, per cause ancora ignote non è costante nei suoi risultati, onde non è che dopo moltiplicate prove che possono essere gli intrapresi lavori coronati da soddisfacente esito.

Questa variabilità nei risultati della reazione nera però, che a tutta prima sembra debba mettere ostacolo ad un giusto rilievo istologico delle parti, viene anzi opportuna per il completo studio d'ogni singolo elemento. Perocchè rimanendo talora bene spiccati solo alcuni elementi a danno di alcuni altri, avviene che si possa seguire in dettaglio il contegno di quelli; mentre se tutti gli elementi che si trovano in una data parte riuscissero

colorati, si avrebbe confusione tale di figure e di linee da non potersi rilevare esattamente nè alcun rapporto nè alcuna modalità di struttura.

Così da uno di questi parziali risultati della reazione col nitrato d'argento da me ottenuto sul cervelletto dell'uomo, mi venne fatto di poter aggiungere alcune particolarità alle attuali conoscenze sulla fina anatomia delle circonvoluzioni cerebellari.

Passando in rassegna i vari elementi dello strato molecolare di queste circonvoluzioni, il Professor Golgi (1) ferma specialmente l'attenzione sopra una grande quantità di piccole cellule nervose sparse in tutto lo strato, e sopra un plesso nervoso occupante pure tutto lo strato, e che nella zona di confine fra lo strato dei granuli e lo strato corticale esterno forma una fitta siepe di fibre; però di questo plesso non gli fu dato poterne determinare con esattezza il modo d'origine, ed è questa lacuna che la felice riuscita della reazione nera mi ha dato l'opportunità di poter colmare.

Nelle sezioni trasversali da me fatte sulle circonvoluzioni cerebellari si osservano scarse affatto le cellule di Purkinje, mentre gli elementi che nello strato molecolare si fanno distinti per la colorazione nera, sono le piccole cellule ed il plesso nervoso.

Il plesso consta principalmente di un disordinato intreccio di minutissime fibrille, il quale occupa tutto lo strato, e da buon numero di robuste fibre stipate verso il limite più interno della zona di cui seguono tutte le inflessioni.

A piccolo ingrandimento si può vedere soltanto che queste fibre sono raccolte in fascio e descrivono tanti archi nelle varie circonvoluzioni, e che tratto tratto ad angolo retto lasciano spiccare dei rami, specialmente verso la zona più interna. Se invece si usa un ingrandimento maggiore, dopo un'attenta osservazione si può rilevare, che queste fibre sono in rapporto per mezzo delle minute divisioni dei loro rami colla rete nervosa diffusa, e che la maggior parte di esse trae origine dalle piccole cellule.

Non tutte però le piccole cellule vanno a costituire col loro prolungamento nervoso il fascio delle fibre arcuate, anzi la maggior

---

(1) Golgi, *Sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso.* Memoria premiata dal R. Istituto Lombardo. *Rivista di Freniatria e di Medicina legale.* Reggio Emilia, 1883.

parte di esse, sparse senz'ordine in tutto lo spessore dello strato danno origine ad un prolungamento nervoso, il quale dopo aver preso le più svariate direzioni viene a scomporsi subito dopo in una serie numerosa di fibrille; oppure il medesimo può conservarsi individualizzato per un tratto, per poi dividersi e suddividersi complicatamente.

Il fascio delle fibre arcuate è invece formato in prevalenza dal prolungamento nervoso delle piccole cellule che si trovano nella parte più profonda dello strato.

Queste cellule assumono più frequentemente la forma fusata o l'ovoidea, ed estendono i loro prolungamenti protoplasmatici a curve eleganti per molto spazio all'intorno dirigendosi prevalentemente verso la periferia, arrivando spesse volte colle ultime suddivisioni fino all'estremo margine delle circonvoluzioni. Il prolungamento nervoso che nel maggior numero dei casi si stacca da un polo della cellula in vicinanza di un prolungamento protoplasmatico, è dapprima rettilineo e robusto, quindi si assottiglia d'un tratto e descrive una breve linea spezzata od a forti ondulazioni. La finezza raggiunta in questo tratto è talora così ragguardevole che dietro una superficiale osservazione il processo appare troncato e quindi può sfuggire l'ulteriore andamento. Invece dopo un decorso di 8-16 $\mu$ torna ad ingrossare di nuovo e traccia allora quella figura arcuata od a ferro di cavallo che abbiamo ricordato parlando delle fibre. Durante il tragitto continua a dar rami più rari e fini verso la periferia, più numerosi e robusti verso lo strato dei granuli. Da tutti questi rami si spiccano ad angolo retto fili di secondo e di terzo ordine, in modo che le ultime divisioni finiscono per intrecciarsi come a rete. La lunghezza del prolungamento varia: talora dopo aver mandati due o tre robusti rami allo strato dei granuli, s'arresta subito, talora lo si può seguire per quasi tutta la curva di una circonvoluzione (V. tav. II, fig. 3, 4, 5, 6).

Per incidenza noterò un modo insolito di presentarsi del processo nervoso che ho riscontrato, benchè raramente, nelle piccole cellule che si trovano verso il mezzo dello strato molecolare. In questi casi il decorso del prolungamento è tortuoso assai, ed a brevi tratti di distanza manda dei filamenti sottilissimi che pure si ramificano. Dopo un tratto di varia lunghezza il prolungamento nervoso stesso termina, almeno apparentemente, in una finissima punteggiatura (V. tav. II, fig. 2).

Considerato il cospicuo numero delle piccole cellule, facilmente si comprende quale complicata rete debba risultare dall'intreccio di tutti i prolungamenti nervosi delle medesime, e come dalla comune direzione e dal decorso sensibilmente fra loro parallelo dei prolungamenti nervosi dati dalle cellule della zona profonda, debba riuscire il fascio delle fibre arcuate.

Ma oltre alle piccole cellule a comporre il plesso nervoso dello strato molecolare concorrono anche le cellule di Purkinje e talune fibre derivanti dai raggi midollari.

Le prime contribuiscono alla formazione del plesso per mezzo di alcuni filamenti, che emanati dal prolungamento nervoso delle medesime, passano dallo strato dei granuli allo strato molecolare, e quivi vanno a confondersi colla rete nervosa.

Delle fibre che sono derivate dai raggi midollari, alcune si continuano col processo nervoso delle cellule di Purkinje, altre si diramano nello strato dei granuli, altre infine dopo aver oltrepassato questo strato, entrano nella zona più esterna. Raggiunta l'altezza degli archi formati dai prolungamenti nervosi delle piccole cellule tali fibre seguono la direzione di questi per un tratto più o meno lungo, finchè indebolite per la continua distribuzione di rami finiscono a confondersi colla rete delle fibrille (V. tav. II, fig. 1, *a*, *b*).

Le piccole cellule oltre gli accennati rapporti colle cellule di Purkinje e colle fibre dei raggi midollari, hanno pure relazione cogli elementi che si trovano nello strato medio. Infatti, tutte le fibrille diramate dalle fibre arcuate verso lo strato dei granuli, entrano in relazione coi prolungamenti nervosi dei granuli stessi e delle altre forme cellulari di questo strato, non che di nuovo colle ramificazioni delle fibre dei raggi midollari e dei prolungamenti delle cellule di Purkinje.

Devo qui aggiungere che questo mio contributo all'anatomia microscopica del cervelletto viene per nulla a modificare l'aggruppamento in categorie fatto dal Professore Golgi degli elementi di quest'organo; invero anche il prolungamento nervoso delle piccole cellule della zona profonda dello strato molecolare, si comporta come il prolungamento nervoso delle altre piccole cellule dello stesso strato descritte dal Professore Golgi medesimo, cioè dopo una complicata suddivisione, tale processo viene a perdere la propria individualità e prende parte *in toto* alla formazione della rete nervosa diffusa. Quindi tutte le piccole cellule dello strato

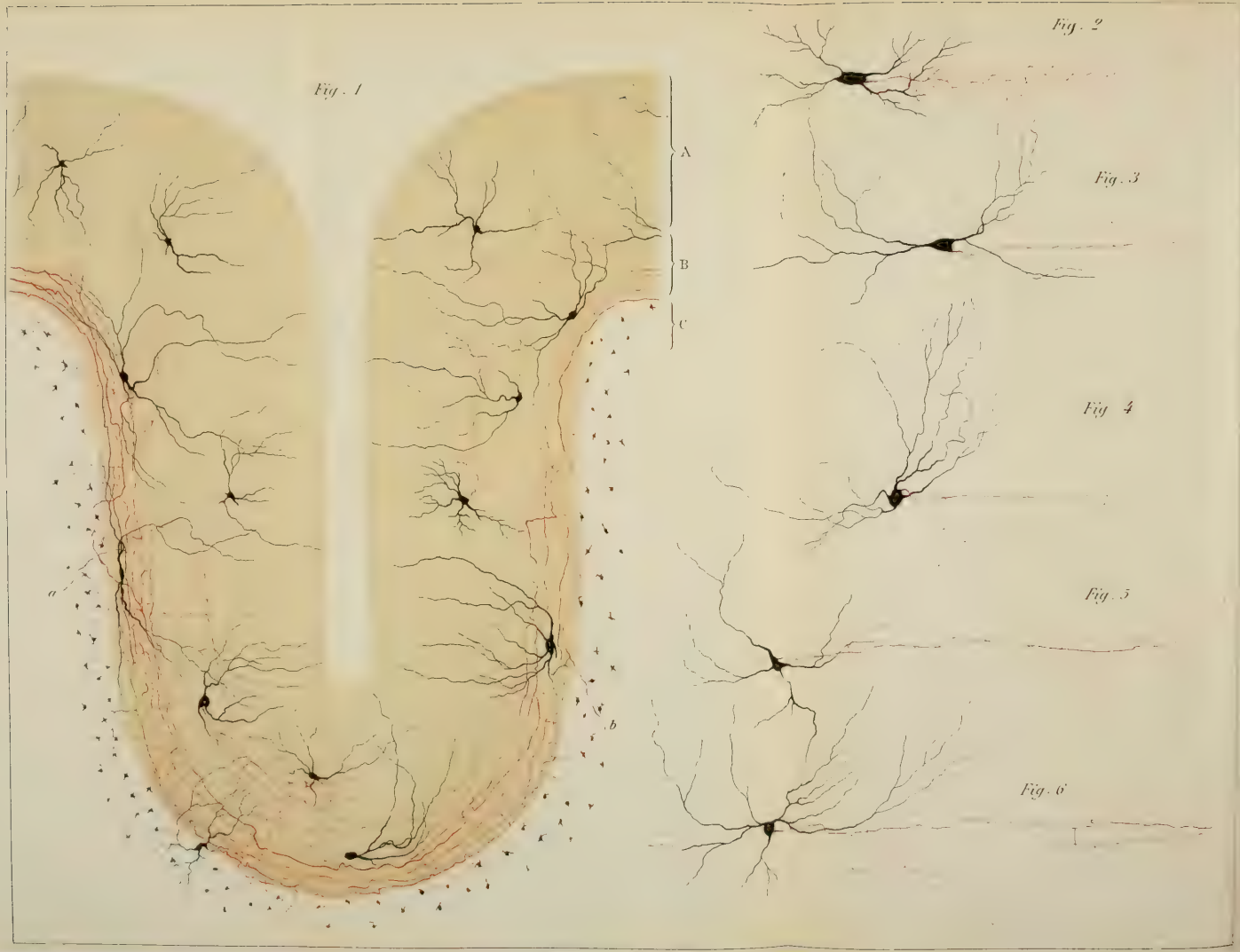


Fig. 1
A
B
C
a
b
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

molecolare appartengono alla medesima categoria, ed a tutte si può estendere l'ipotesi del Professore Golgi, vale a dire tutte possono verosimilmente essere considerate come organi di attività sensoria. La rete nervosa metterebbe in rapporto questi elementi coi supposti organi di attività motoria, cioè colle cellule di Purkinje.

---

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. **1.** — Figura rappresentante l'insieme delle piccole cellule e delle fibre arcuate nelle circonvoluzioni cerebellari:

**A.** Parte più periferica dello strato molecolare;

**B.** Zona delle fibre arcuate;

**C.** Strato dei granuli;

**a, b.** Fibre che dai raggi midollari passano nello strato molecolare.

Fig. **2, 3, 4, 5, 6.** – Piccole cellule dello strato molecolare delle circonvoluzioni cerebellari (Hartnack, Oc. 2, Ob. 8).

NB. *I prolungamenti nervosi sono colorati in rosso.*

Il Socio, signor Maggiore F. Siacci presenta un' opera del signor F. Chapel colle seguenti parole:

Ho l'onore di presentare da parte dell'Autore il sig.r F. Chapel, dotto Ufficiale dell'Artiglieria francese, un'opera intitolata: *Aperçu sur le rôle des astéroides inférieures.* Paris, 1883. È questa, secondo me, un'opera di singolare importanza, in quanto colla scorta di un grandissimo numero di fatti l'Autore indaga il compito che hanno nella fisica del mondo gli *asteroidi inferiori:* così egli chiama i corpi cosmici che urtano continuamente la nostra atmosfera: « Grâce aux énormes vitesses mises en jeu, cet agent » méconnu, dice l'Autore, constitue l'une des plus puissantes, » et, à coup sûr, la plus dangereuse des forces naturelles, force » de désordre et de perturbation, dont l'action s'étend à toutes » les parties de notre monde, et dans laquelle il faut voir, en » particulier, la cause première des plus grands fléaux qui dé- » solent notre planète ».

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio presenta due lavori manoscritti, uno del signor Dott. Corrado Segre, intitolato « *Studio delle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* »; l'altro del signor Ingegnere Giovanni de Berardinis « *Sullo scostamento della linea geodetica dalle sezioni normali di una superficie* ». Secondo il desiderio degli autori, questi scritti dovendosi stampare ne' volumi delle *Memorie*, vengono affidati a due Commissioni incaricate di esaminarli e riferirne in una prossima adunanza.

**Adunanza del 2 Dicembre 1883**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio GENOCCHI, avendo presentato nell'ultima adunanza un opuscolo del Principe Baldassarre Boncompagni intitolato « *Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace* », aggiunge le seguenti osservazioni :

Questo opuscolo è composto di 22 pagine in-4°, delle quali le 21 e 22 contengono gli atti di nascita e di morte del Laplace. Le pagine 3-20 dell'opuscolo suddetto contengono un piccolo scritto su tali documenti, nel quale si dà un catalogo di 65 scritti e articoli di giornali, dizionari, ecc. relativi a Laplace, dei quali 15 non indicano il giorno della nascita di Laplace, 26 indicano esattamente il giorno della nascita (23 marzo 1749) di questo illustre geometra, e 24 indicano erroneamente il giorno della sua nascita.

In tali 65 scritti o articoli, 8 non indicano il giorno della morte del Laplace, 38 indicano esattamente tal giorno (5 marzo 1827), 16, e qualche edizione indicata sotto i numeri 25, 40 e 44 indicano erroneamente il giorno della sua morte.

Veggansi su tali risultati le note (2) della pagina 17 e (3) della pagina 20.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia per gli *Atti* i seguenti lavori dell'Assistente all'Osservatorio Prof. Angelo CHARRIER:

1° *Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti* per l'anno 1884.

2° *Osservazioni meteorologiche* dei mesi di Giugno, Luglio, Agosto, Settembre, Ottobre e Novembre del 1883.

3° *Riassunti* delle dette Osservazioni per ciascun mese.

4° *Diagrammi* di dette Osservazioni pure per ciascun mese.

## — SOLE —

### Gennaio

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | | Passaggio al meridiano | Tramontare | | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h m s | h | m | | h m s |
| 1 | 8 | 0 | 0 22 37 66 | 4 | 45 | 23° 2′ 4″5A | 18 23 5·27 |
| 2 | 8 | 0 | 23 6·63 | 4 | 46 | 23 57 0·8 | 18 27 1 83 |
| 3 | 8 | 0 | 23 34·05 | 4 | 48 | 22 51 29·7 | 18 30 58·39 |
| 4 | 8 | 0 | 24 1·67 | 4 | 48 | 22 45 31·3 | 18 34 54·94 |
| 5 | 8 | 0 | 24. 28. 86 | 4 | 49 | 22 39 5·9 | 18 38 51·50 |
| 6 | 8 | 0 | 24 55·59 | 4 | 50 | 22 32 13·6 | 18 42 48·06 |
| 7 | 8 | 0 | 25 21·83 | 4 | 51 | 22 24 54·6 | 18 46 44·61 |
| 8 | 7 | 59 | 25 47·58 | 4 | 52 | 22 17 9·1 | 18 50 41·17 |
| 9 | 7 | 59 | 26 12·79 | 4 | 53 | 22 8 59·4 | 18 54 37·73 |
| 10 | 7 | 59 | 26 37·45 | 4 | 55 | 22 0 19·7 | 18 58 34·28 |
| 11 | 7 | 58 | 27 1·53 | 4 | 56 | 21 51 16·3 | 19 2 30·84 |
| 12 | 7 | 58 | 27 25·00 | 4 | 57 | 21 41 47·4 | 19 6 27·40 |
| 13 | 7 | 57 | 27 47 87 | 4 | 59 | 21 31 53·1 | 19 10 23·95 |
| 14 | 7 | 57 | 28 10·10 | 4 | 59 | 21 21 33·9 | 19 14 20·51 |
| 15 | 7 | 57 | 28 31·69 | 5 | 1 | 21 10 49·0 | 19 18 17·07 |
| 16 | 7 | 56 | 28 52·62 | 5 | 2 | 20 59 41·6 | 19 22 13 62 |
| 17 | 7 | 56 | 29 12·87 | 5 | 3 | 20 48 9·2 | 19 26 10·16 |
| 18 | 7 | 55 | 29 32·43 | 5 | 5 | 20 36 13·2 | 19 30 6·74 |
| 19 | 7 | 54 | 29 51·29 | 5 | 6 | 20 23 53·7 | 19 34 3 27 |
| 20 | 7 | 53 | 30 9·43 | 5 | 8 | 20 11 11·3 | 19 37 59·85 |
| 21 | 7 | 52 | 30 26·84 | 5 | 9 | 19 58 5·5 | 19 41 56 40 |
| 22 | 7 | 51 | 30 43·50 | 5 | 10 | 19 44 37·6 | 19 45 52·96 |
| 23 | 7 | 51 | 30 59·42 | 5 | 11 | 19 30 47·7 | 19 49 49·51 |
| 24 | 7 | 50 | 31 14·57 | 5 | 13 | 19 16 36·1 | 19 53 46·07 |
| 25 | 7 | 49 | 31 28·94 | 5 | 15 | 19 2 3·1 | 19 57 42·63 |
| 26 | 7 | 49 | 31 42·52 | 5 | 16 | 18 47 9·3 | 20 1 39·18 |
| 27 | 7 | 48 | 31 55·30 | 5 | 17 | 18 31 55·0 | 20 5 35·74 |
| 28 | 7 | 47 | 32 7·27 | 5 | 18 | 18 16 20·6 | 20 9 32·29 |
| 29 | 7 | 46 | 32 18·42 | 5 | 19 | 17 0 26·4 | 20 13 28·84 |
| 30 | 7 | 45 | 32 28·74 | 5 | 21 | 17 44 13 0 | 20 17 25·40 |
| 31 | 7 | 44 | 32 38·24 | 5 | 22 | 17 27 40·7 | 20 21 21·96 |

## — SOLE —

### Febbraio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 7 42 | 0 32 46·89 | 5 24 | 17° 10′ 50″0 A | 20 25 18·51 |
| 2 | 7 41 | 32 54·70 | 5 25 | 16 53 41·2 | 20 29 15·07 |
| 3 | 7 41 | 33 1·68 | 5 26 | 16 36 14·8 | 20 52 11·62 |
| 4 | 7 39 | 33 7·82 | 5 28 | 16 18 31·1 | 20 37 8·17 |
| 5 | 7 38 | 33 13·12 | 5 30 | 16 0 30·6 | 20 41 4·73 |
| 6 | 7 36 | 33 17·59 | 5 31 | 15 42 13·7 | 20 45 1·38 |
| 7 | 7 35 | 33 21·23 | 5 32 | 15 23 40·9 | 20 48 57·84 |
| 8 | 7 34 | 33 24·05 | 5 34 | 15 4 52·3 | 20 52 54·39 |
| 9 | 7 33 | 33 26·08 | 5 35 | 14 45 48·5 | 20 57 50·95 |
| 10 | 7 31 | 33 27·30 | 5 37 | 14 26 30·0 | 21 0 47·50 |
| 11 | 7 29 | 33 27·73 | 5 39 | 14 6 57·2 | 21 4 44·05 |
| 12 | 7 28 | 33 27·39 | 5 40 | 13 47 10·3 | 21 8 40·61 |
| 13 | 7 27 | 33 26·28 | 5 41 | 13 27 9·8 | 21 12 37·16 |
| 14 | 7 25 | 33 24·43 | 5 43 | 13 6 56·1 | 21 16 33·71 |
| 15 | 7 23 | 33 21·86 | 5 44 | 12 46 29·5 | 21 20 30·27 |
| 16 | 7 22 | 33 18·57 | 5 46 | 12 25 50·6 | 21 24 26·82 |
| 17 | 7 20 | 33 14·58 | 5 47 | 12 4 59·8 | 21 28 23·37 |
| 18 | 7 19 | 33 9·90 | 5 48 | 11 43 57·3 | 21 32 19·93 |
| 19 | 7 17 | 33 4·55 | 5 50 | 11 22 43·6 | 21 36 16·48 |
| 20 | 7 15 | 32 58·54 | 5 51 | 11 1 19·3 | 21 40 13·03 |
| 21 | 7 14 | 32 51·88 | 5 53 | 10 39 44·5 | 21 44 9·59 |
| 22 | 7 12 | 32 44·59 | 5 54 | 10 17 59·8 | 21 48 6·14 |
| 23 | 7 11 | 32 36·68 | 5 55 | 9 56 5·6 | 21 52 2·69 |
| 24 | 7 9 | 32 28·17 | 5 57 | 9 34 2·3 | 21 55 59·25 |
| 25 | 7 7 | 32 19·06 | 5 58 | 9 11 50·5 | 21 59 55·80 |
| 26 | 7 5 | 32 9·37 | 6 0 | 8 49 30·4 | 22 3 52·35 |
| 27 | 7 3 | 31 59·11 | 6 1 | 8 27 2·5 | 22 7 48·90 |
| 28 | 7 2 | 31 48·29 | 6 2 | 8 4 27·2 | 22 11 45·56 |
| 29 | 7 0 | 31 36·94 | 6 4 | 7 41 45·0 | 22 15 42·01 |

## — SOLE —

### Marzo

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 6 58 | 0 31 25·06 | 6 5 | 7° 18′ 56″2 A | 22 19 38·56 |
| 2 | 6 56 | 31 12·68 | 6 7 | 6 56 1·2 | 22 23 35·12 |
| 3 | 6 54 | 30 59·80 | 6 9 | 6 33 0·5 | 22 27 31·66 |
| 4 | 6 52 | 30 46·54 | 6 10 | 6 9 54·4 | 22 31 28·22 |
| 5 | 6 51 | 30 32·72 | 6 11 | 5 46 43·3 | 22 35 24·77 |
| 6 | 6 49 | 30 18·36 | 6 12 | 5 23 27·7 | 22 39 21·32 |
| 7 | 6 47 | 30 3·67 | 6 14 | 5 0 7·9 | 22 43 17·87 |
| 8 | 6 45 | 29 48.60 | 6 15 | 4 36 44.3 | 22 47 14·43 |
| 9 | 6 43 | 29 33.14 | 6 16 | 4 13 17·2 | 22 51 10·98 |
| 10 | 6 42 | 29 17·34 | 6 17 | 3 49 46·9 | 22 55 7·53 |
| 11 | 6 40 | 29 1·20 | 6 19 | 3 26 13·9 | 22 59 4·08 |
| 12 | 6 38 | 28 44·76 | 6 21 | 3 2 38·7 | 23 3 0·63 |
| 13 | 6 36 | 28 28·03 | 6 22 | 2 39 1·2 | 23 6 57·18 |
| 14 | 6 34 | 28 11·05 | 6 24 | 2 15 22·2 | 23 10 53.74 |
| 15 | 6 32 | 27 53·86 | 6 25 | 1 51 41·8 | 23 14 50·29 |
| 16 | 6 31 | 27 36·44 | 6 26 | 1 28 0·4 | 23 18 46·84 |
| 17 | 6 29 | 27 18·83 | 6 27 | 1 4 18·5 | 23 22 43·39 |
| 18 | 6 26 | 27 1·08 | 6 29 | 0 40 36·2 | 23 26 39·94 |
| 19 | 6 24 | 26 43·18 | 6 30 | 0 16 54·0 A | 23 30 36·50 |
| 20 | 6 23 | 26 25·15 | 6 31 | 0 6 47·7 B | 23 34 33·05 |
| 21 | 6 21 | 26 7·02 | 6 32 | 0 30 28·7 | 23 38 29·60 |
| 22 | 6 19 | 25 48·81 | 6 34 | 0 54 8·4 | 23 42 26·15 |
| 23 | 6 17 | 25 30·54 | 6 35 | 1 17 46·5 | 23 46 22·70 |
| 24 | 6 15 | 25 12·23 | 6 36 | 1 41 22·8 | 23 50 19·26 |
| 25 | 6 14 | 24 53·88 | 6 37 | 2 4 56·6 | 23 54 15·81 |
| 26 | 6 11 | 24 35·53 | 6 39 | 2 28 27·8 | 23 58 12 36 |
| 27 | 6 9 | 24 17·18 | 6 40 | 2 51 56·0 | 0 2 8·91 |
| 28 | 6 7 | 23 58·86 | 6 42 | 3 15 20·6 | 0 6 5·46 |
| 29 | 6 5 | 23 40·58 | 6 43 | 3 38 41·6 | 0 10 2·01 |
| 30 | 6 4 | 23 22·35 | 6 44 | 4 1 58·5 | 0 13 58·57 |
| 31 | 6 2 | 23 4·19 | 6 45 | 4 25 10·7 | 0 17 55·12 |

## — SOLE —

### Aprile

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Tempo medio di Roma: Passaggio al meridiano | Tempo medio di Roma: Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 6 0 | 0 22 46·12 | 6 47 | 4° 48′ 18″2B | 0 21 51·67 |
| 2 | 5 58 | 22 28·15 | 6 48 | 5 11 20·4 | 0 25 48 22 |
| 3 | 5 57 | 22 10 29 | 6 49 | 5 34 17·0 | 0 29 44·77 |
| 4 | 5 55 | 21 52·57 | 6 50 | 5 57 7·7 | 0 33 42·33 |
| 5 | 5 53 | 21 35·01 | 6 52 | 6 19 52·2 | 0 37 37·88 |
| 6 | 5 51 | 21 17·63 | 6 53 | 6 42 30·0 | 0 41 34·43 |
| 7 | 5 49 | 21 0·44 | 6 54 | 7 5 0·9 | 0 45 30·98 |
| 8 | 5 47 | 20 43·48 | 6 55 | 7 27 24·5 | 0 49 27 54 |
| 9 | 5 45 | 20 26·76 | 6 56 | 7 49 40·5 | 0 53 24·00 |
| 10 | 5 44 | 20 10 29 | 6 57 | 8 11 48·7 | 0 57 20·64 |
| 11 | 5 42 | 19 54·12 | 6 59 | 8 33 48·7 | 1 1 17·19 |
| 12 | 5 40 | 19 38·24 | 7 0 | 8 55 40·3 | 1 5 13·75 |
| 13 | 5 38 | 19 22·69 | 7 1 | 9 17 22·9 | 1 9 10·30 |
| 14 | 5 36 | 19 7·48 | 7 2 | 9 38 56·3 | 1 13 6·85 |
| 15 | 5 35 | 18 52·63 | 7 3 | 10 0 20·4 | 1 17 3·40 |
| 16 | 5 34 | 18 38·16 | 7 5 | 10 21 34·5 | 1 20 59·95 |
| 17 | 5 32 | 18 24·09 | 7 6 | 10 42 38·5 | 1 24 56·51 |
| 18 | 5 30 | 18 10·42 | 7 8 | 11 3 32·0 | 1 28 53·06 |
| 19 | 5 28 | 17 57·17 | 7 9 | 11 24 14·7 | 1 32 49·61 |
| 20 | 5 27 | 17 44·36 | 7 10 | 11 44 46·2 | 1 36 46·17 |
| 21 | 5 25 | 17 31·99 | 7 11 | 12 5 6·2 | 1 40 42·72 |
| 22 | 5 23 | 17 20·09 | 7 13 | 12 25 11·4 | 1 44 39·37 |
| 23 | 5 21 | 17 8·67 | 7 14 | 12 45 10·4 | 1 48 35·83 |
| 24 | 5 20 | 16 57·71 | 7 15 | 13 4 53·9 | 1 52 32·38 |
| 25 | 5 19 | 16 47·24 | 7 16 | 13 24 24·5 | 1 56 28·93 |
| 26 | 5 17 | 16 37·27 | 7 18 | 13 43 42·0 | 2 0 25·49 |
| 27 | 5 15 | 16 27·81 | 7 19 | 14 2 46·0 | 2 4 22·04 |
| 28 | 5 13 | 16 18·84 | 7 20 | 14 21 36·1 | 2 8 18·59 |
| 29 | 5 12 | 16 10·38 | 7 21 | 14 40 12·0 | 2 12 15·15 |
| 30 | 5 11 | 16 2·43 | 7 22 | 14 58 33·3 | 2 16 11·70 |

## — SOLE —

### Maggio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | | | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | s | h | m | | | | h | m | s |
| 1 | 5 | 9 | 0 | 15 | 55·00 | 7 | 24 | 15° | 16′ | 39″9B | 2 | 20 | 8·26 |
| 2 | 5 | 7 | | 15 | 48·09 | 7 | 25 | 15 | 34 | 31·2 | 2 | 24 | 4·81 |
| 3 | 5 | 6 | | 15 | 41·68 | 7 | 27 | 15 | 52 | 7·0 | 2 | 28 | 1·37 |
| 4 | 5 | 4 | | 15 | 35·83 | 7 | 28 | 16 | 9 | 27·1 | 2 | 31 | 57·92 |
| 5 | 5 | 3 | | 15 | 30·50 | 7 | 29 | 16 | 26 | 31·0 | 2 | 35 | 54·48 |
| 6 | 5 | 2 | | 15 | 25·74 | 7 | 30 | 16 | 43 | 18·5 | 2 | 39 | 51·03 |
| 7 | 5 | 0 | | 15 | 21·52 | 7 | 31 | 16 | 59 | 49·3 | 2 | 43 | 47·58 |
| 8 | 4 | 59 | | 15 | 17·87 | 7 | 33 | 17 | 16 | 3·1 | 2 | 47 | 44·14 |
| 9 | 4 | 58 | | 15 | 14·79 | 7 | 34 | 17 | 31 | 59·8 | 2 | 51 | 40·69 |
| 10 | 4 | 57 | | 15 | 12·28 | 7 | 35 | 17 | 47 | 38·9 | 2 | 55 | 37·25 |
| 11 | 4 | 55 | | 15 | 10·35 | 7 | 36 | 18 | 3 | 00·0 | 2 | 59 | 33·80 |
| 12 | 4 | 54 | | 15 | 9·00 | 7 | 37 | 18 | 18 | 3·1 | 3 | 3 | 30·36 |
| 13 | 4 | 53 | | 15 | 8·22 | 7 | 39 | 18 | 32 | 47·8 | 3 | 7 | 26·91 |
| 14 | 4 | 52 | | 15 | 8·05 | 7 | 40 | 18 | 47 | 13·9 | 3 | 11 | 23·47 |
| 15 | 4 | 51 | | 15 | 8·45 | 7 | 40 | 19 | 1 | 20·9 | 3 | 15 | 20·03 |
| 16 | 4 | 50 | | 15 | 9·43 | 7 | 42 | 19 | 15 | 8·7 | 3 | 19 | 16·58 |
| 17 | 4 | 48 | | 15 | 10·99 | 7 | 43 | 19 | 28 | 37·0 | 3 | 23 | 13·14 |
| 18 | 4 | 47 | | 15 | 13·12 | 7 | 44 | 19 | 41 | 45·6 | 3 | 27 | 9·69 |
| 19 | 4 | 46 | | 15 | 15·84 | 7 | 45 | 19 | 54 | 34·2 | 3 | 31 | 6·25 |
| 20 | 4 | 46 | | 15 | 19·11 | 7 | 46 | 20 | 7 | 2·4 | 3 | 35 | 2·80 |
| 21 | 4 | 45 | | 15 | 22·94 | 7 | 47 | 20 | 19 | 10·1 | 3 | 38 | 59·36 |
| 22 | 4 | 44 | | 15 | 27·32 | 7 | 48 | 20 | 30 | 57·0 | 3 | 42 | 55·91 |
| 23 | 4 | 43 | | 15 | 32·24 | 7 | 49 | 20 | 42 | 22·9 | 3 | 46 | 52·47 |
| 24 | 4 | 42 | | 15 | 37·69 | 7 | 50 | 20 | 53 | 27·8 | 3 | 50 | 49·03 |
| 25 | 4 | 41 | | 15 | 43·64 | 7 | 51 | 21 | 4 | 10·5 | 3 | 54 | 45·58 |
| 26 | 4 | 41 | | 15 | 50·08 | 7 | 52 | 21 | 14 | 31·8 | 3 | 58 | 42·14 |
| 27 | 4 | 40 | | 15 | 56·99 | 7 | 53 | 21 | 24 | 31·2 | 4 | 2 | 38·69 |
| 28 | 4 | 39 | | 16 | 4·36 | 7 | 54 | 21 | 34 | 8·3 | 4 | 6 | 35·25 |
| 29 | 4 | 38 | | 16 | 12·16 | 7 | 55 | 21 | 43 | 23·0 | 4 | 10 | 31·81 |
| 30 | 4 | 38 | | 16 | 20·37 | 7 | 56 | 21 | 52 | 15·2 | 4 | 14 | 28·36 |
| 31 | 4 | 38 | | 16 | 28·99 | 7 | 57 | 22 | 0 | 44·5 | 4 | 18 | 24·92 |

## — SOLE —

### Giugno

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA: Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | | | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | s | h | m | | | | h | m | s |
| 1 | 4 | 37 | 0 | 16 | 37·98 | 7 | 57 | 22° | 8′ | 50″7 B | 4 | 22 | 21.48 |
| 2 | 4 | 36 | | 16 | 47·36 | 7 | 58 | 22 | 16 | 33·9 | 4 | 26 | 18·03 |
| 3 | 4 | 36 | | 16 | 57·08 | 7 | 59 | 22 | 23 | 53·7 | 4 | 30 | 14·59 |
| 4 | 4 | 35 | | 17 | 7·15 | 8 | 0 | 22 | 30 | 50·1 | 4 | 34 | 11·15 |
| 5 | 4 | 34 | | 17 | 17·54 | 8 | 1 | 22 | 37 | 22·7 | 4 | 38 | 7·70 |
| 6 | 4 | 34 | | 17 | 28·25 | 8 | 1 | 22 | 43 | 31·6 | 4 | 42 | 4·26 |
| 7 | 4 | 34 | | 17 | 39·24 | 8 | 2 | 22 | 49 | 16·7 | 4 | 46 | 0·81 |
| 8 | 4 | 34 | | 17 | 50·52 | 8 | 2 | 22 | 54 | 37·7 | 4 | 49 | 57·37 |
| 9 | 4 | 34 | | 18 | 2·05 | 8 | 3 | 22 | 59 | 34·6 | 4 | 53 | 53·93 |
| 10 | 4 | 34 | | 18 | 13·82 | 8 | 3 | 23 | 4 | 7·1 | 4 | 57 | 50·49 |
| 11 | 4 | 33 | | 18 | 25·82 | 8 | 4 | 23 | 8 | 15·4 | 5 | 1 | 47·04 |
| 12 | 4 | 33 | | 18 | 38·03 | 8 | 4 | 23 | 11 | 59·3 | 5 | 5 | 43·60 |
| 13 | 4 | 33 | | 18 | 50·41 | 8 | 5 | 23 | 15 | 18·5 | 5 | 9 | 40·16 |
| 14 | 4 | 33 | | 19 | 2·96 | 8 | 5 | 23 | 18 | 11·2 | 5 | 13 | 36·71 |
| 15 | 4 | 33 | | 19 | 15·65 | 8 | 6 | 23 | 20 | 43·3 | 5 | 17 | 33·27 |
| 16 | 4 | 33 | | 19 | 28·46 | 8 | 6 | 23 | 22 | 48·6 | 5 | 21 | 29·83 |
| 17 | 4 | 33 | | 19 | 41·38 | 8 | 6 | 23 | 24 | 29.2 | 5 | 25 | 26·38 |
| 18 | 4 | 33 | | 19 | 54·37 | 8 | 6 | 23 | 25 | 45·1 | 5 | 29 | 22·94 |
| 19 | 4 | 34 | | 20 | 7·42 | 8 | 6 | 23 | 26 | 36·0 | 5 | 33 | 19·50 |
| 20 | 4 | 34 | | 20 | 20·51 | 8 | 7 | 23 | 27 | 2·4 | 5 | 37 | 16·06 |
| 21 | 4 | 34 | | 20 | 33·60 | 8 | 7 | 23 | 27 | 3·3 | 5 | 41 | 12·61 |
| 22 | 4 | 34 | | 20 | 46·67 | 8 | 7 | 23 | 26 | 40·2 | 5 | 45 | 9·17 |
| 23 | 4 | 34 | | 20 | 59·68 | 8 | 8 | 23 | 25 | 52·0 | 5 | 49 | 5·73 |
| 24 | 4 | 34 | | 21 | 12·60 | 8 | 8 | 23 | 24 | 39·1 | 5 | 53 | 2·28 |
| 25 | 4 | 34 | | 21 | 25·40 | 8 | 8 | 23 | 23 | 1·4 | 5 | 56 | 58·84 |
| 26 | 4 | 35 | | 21 | 38·06 | 8 | 8 | 23 | 20 | 59·2 | 6 | 0 | 55·40 |
| 27 | 4 | 35 | | 21 | 50·55 | 8 | 8 | 23 | 18 | 32·4 | 6 | 4 | 51·95 |
| 28 | 4 | 36 | | 22 | 2·83 | 8 | 8 | 23 | 15 | 40·9 | 6 | 8 | 48·51 |
| 29 | 4 | 36 | | 22 | 14·89 | 8 | 8 | 23 | 12 | 25·0 | 6 | 12 | 45·07 |
| 30 | 4 | 37 | | 22 | 26·72 | 8 | 8 | 23 | 8 | 44·8 | 6 | 16 | 41·63 |

# — SOLE —

## Luglio

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 4 38 | 0 22 38·28 | 8 7 | 23° 4′ 40″2 B | 6 20 38·18 |
| 2 | 4 38 | 22 49·55 | 8 7 | 23 0 11·5 | 6 24 34·74 |
| 3 | 4 38 | 23 0·53 | 8 8 | 22 55 18·8 | 6 28 31·30 |
| 4 | 4 39 | 23 11·18 | 8 7 | 22 50 1·2 | 6 32 27·85 |
| 5 | 4 39 | 23 21·50 | 8 7 | 22 44 21·6 | 6 36 24·41 |
| 6 | 4 40 | 23 31·47 | 8 7 | 22 38 17·4 | 6 40 20·97 |
| 7 | 4 41 | 23 41·06 | 8 6 | 22 31 49·6 | 6 44 17·52 |
| 8 | 4 42 | 23 50·27 | 8 5 | 22 24 58·5 | 6 48 14·08 |
| 9 | 4 43 | 23 59·06 | 8 5 | 22 17 44·0 | 6 52 10·64 |
| 10 | 4 43 | 24 7·45 | 8 4 | 22 10 6·6 | 6 56 7·19 |
| 11 | 4 44 | 24 15·41 | 8 4 | 22 2 6·2 | 7 0 3·75 |
| 12 | 4 45 | 24 22·92 | 8 3 | 21 53 43·2 | 7 4 0·31 |
| 13 | 4 45 | 24 29·98 | 8 3 | 21 44 57·6 | 7 7 56·86 |
| 14 | 4 46 | 24 36·58 | 8 2 | 21 35 49·6 | 7 11 53·42 |
| 15 | 4 47 | 24 42·70 | 8 1 | 21 26 19·5 | 7 15 49·97 |
| 16 | 4 49 | 24 48·34 | 8 1 | 21 16 27·4 | 7 19 46·53 |
| 17 | 4 50 | 24 53·49 | 8 0 | 21 6 13·6 | 7 23 43·09 |
| 18 | 4 51 | 24 58·13 | 7 59 | 10 55 38·3 | 7 27 39·64 |
| 19 | 4 52 | 25 2·24 | 7 58 | 20 44 41·8 | 7 31 36·20 |
| 20 | 4 53 | 25 5·83 | 7 57 | 20 33 24·2 | 7 35 32·75 |
| 21 | 4 54 | 25 8·87 | 7 56 | 20 21 45·9 | 7 39 29·31 |
| 22 | 4 55 | 25 11·35 | 7 55 | 20 9 47·2 | 7 43 25·86 |
| 23 | 4 56 | 25 13·25 | 7 54 | 20 57 28·2 | 7 47 22·42 |
| 24 | 4 57 | 25 14·55 | 7 53 | 19 44 49·3 | 7 51 18·98 |
| 25 | 4 58 | 25 15·26 | 7 52 | 19 31 50 7 | 7 55 15·53 |
| 26 | 4 59 | 25 15·36 | 7 51 | 19 18 32·8 | 7 59 12 09 |
| 27 | 5 0 | 25 14·85 | 7 50 | 19 4 55·7 | 8 2 8 64 |
| 28 | 5 1 | 25 13·73 | 7 49 | 18 50 59·8 | 8 7 5·20 |
| 29 | 5 2 | 25 11 99 | 7 47 | 18 36 45·8 | 8 11 1·65 |
| 30 | 5 3 | 25 9·63 | 7 46 | 18 22 12·4 | 8 14 58·31 |
| 31 | 5 5 | 25 6·65 | 7 45 | 18 7 21·8 | 8 18 54·86 |

## — SOLE —

### Agosto

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Tempo medio di Roma: Passaggio al meridiano | Tempo medio di Roma: Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 5 5 | 0 25 3·05 | 7 44 | 17° 52′ 12″9B | 8 22 51·42 |
| 2 | 5 6 | 24 58·83 | 7 43 | 17 36 46·9 | 8 26 47·97 |
| 3 | 5 8 | 24 53·99 | 7 41 | 17 21 3·8 | 8 30 44·53 |
| 4 | 5 9 | 24 48·54 | 7 40 | 17 5 3·7 | 8 34 41·08 |
| 5 | 5 10 | 24 42·48 | 7 38 | 16 48 47·1 | 8 38 37·64 |
| 6 | 5 11 | 24 35·83 | 7 37 | 16 32 14·2 | 8 42 34·19 |
| 7 | 5 12 | 24 28·58 | 7 36 | 16 15 25·2 | 8 46 30·75 |
| 8 | 5 14 | 24 20 74 | 7 34 | 15 58 20·6 | 8 50 27·30 |
| 9 | 5 15 | 24 12·33 | 7 33 | 15 41 0·5 | 8 54 23·86 |
| 10 | 5 16 | 24 3·35 | 7 31 | 15 23 25·3 | 8 58 20 41 |
| 11 | 5 17 | 23 53·82 | 7 29 | 15 5 35 2 | 9 2 16·96 |
| 12 | 5 18 | 23 43·74 | 7 28 | 14 47 30·6 | 9 6 13·52 |
| 13 | 5 20 | 23 33·14 | 7 27 | 14 29 11·9 | 9 10 10·07 |
| 14 | 5 21 | 23 22·03 | 7 25 | 14 10 39·1 | 9 14 6·63 |
| 15 | 5 22 | 23 10·40 | 7 23 | 13 51 52·6 | 9 18 3·18 |
| 16 | 5 23 | 22 58·26 | 7 22 | 13 32 52·8 | 9 21 59·73 |
| 17 | 5 24 | 22 45·64 | 7 21 | 13 13 40·0 | 9 25 56·29 |
| 18 | 5 26 | 22 32·54 | 7 19 | 12 54 14·6 | 9 29 52·84 |
| 19 | 5 27 | 22 18·95 | 7 17 | 12 34 36·9 | 9 33 49·39 |
| 20 | 5 28 | 22 4·87 | 7 15 | 12 14 47·3 | 9 37 45·95 |
| 21 | 5 29 | 21 50·34 | 7 14 | 11 54 46·0 | 9 41 42·50 |
| 22 | 5 30 | 21 35·35 | 7 12 | 11 34 33·4 | 9 45 39·05 |
| 23 | 5 32 | 21 19·90 | 7 10 | 11 14 9·9 | 9 49 35·61 |
| 24 | 5 33 | 21 4·03 | 7 8 | 10 53 35·6 | 9 53 32·16 |
| 25 | 5 34 | 20 47·73 | 7 6 | 10 32 51·1 | 9 57 28·71 |
| 26 | 5 35 | 20 31·02 | 7 4 | 10 11 56·6 | 10 1 25·27 |
| 27 | 5 36 | 20 13·92 | 7 3 | 9 50 52·5 | 10 5 21·82 |
| 28 | 5 38 | 19 56·43 | 7 1 | 9 29 38·9 | 10 9 18·37 |
| 29 | 5 39 | 19 38·68 | 6 59 | 9 8 16·3 | 10 13 14·92 |
| 30 | 5 41 | 19 20·37 | 6 57 | 8 46 45·2 | 10 17 11·48 |
| 31 | 5 42 | 19 1·83 | 6 55 | 8 25 5·6 | 10 21 8·03 |

## — SOLE —

### Settembre

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 5 42 | 0 18 42·97 | 6 54 | 8° 3′ 17″9 B | 10 25 4·58 |
| 2 | 5 44 | 18 23·81 | 6 52 | 7 41 22·5 | 10 29 1·13 |
| 3 | 5 45 | 18 4·36 | 6 50 | 7 19 19·7 | 10 32 57·68 |
| 4 | 5 47 | 17 44·66 | 6 48 | 6 57 9·8 | 10 36 54·24 |
| 5 | 5 48 | 17 24·72 | 6 46 | 6 34 53·1 | 10 40 50·79 |
| 6 | 5 49 | 17 4·56 | 6 45 | 6 12 29·9 | 10 44 47·34 |
| 7 | 5 50 | 16 44·21 | 6 43 | 5 50 0·5 | 10 48 43·89 |
| 8 | 5 51 | 16 23·70 | 6 41 | 5 27 25·2 | 10 52 40·45 |
| 9 | 5 52 | 16 3·03 | 6 39 | 5 4 44·3 | 10 56 37·00 |
| 10 | 5 53 | 15 42·24 | 6 37 | 4 41 58·1 | 11 0 33·55 |
| 11 | 5 55 | 15 21·35 | 6 35 | 4 19 6·8 | 11 4 30·10 |
| 12 | 5 56 | 15 0·38 | 6 33 | 3 56 11·0 | 11 8 26·65 |
| 13 | 5 57 | 14 39·36 | 6 32 | 3 33 10·9 | 11 12 23·21 |
| 14 | 5 58 | 14 18·29 | 6 30 | 3 10 6·8 | 11 16 19·76 |
| 15 | 5 59 | 13 57·18 | 6 28 | 2 46 59·1 | 11 20 16·31 |
| 16 | 6 1 | 13 36·07 | 6 26 | 2 23 48·1 | 11 24 12·86 |
| 17 | 6 1 | 13 14·96 | 6 25 | 2 0 34·3 | 11 28 9·41 |
| 18 | 6 3 | 12 53·88 | 6 23 | 1 37 17·8 | 11 32 5·96 |
| 19 | 6 4 | 12 32·83 | 6 20 | 1 13 59·1 | 11 36 2·52 |
| 20 | 6 5 | 12 11·84 | 6 18 | 0 50 38·6 | 11 39 59·07 |
| 21 | 6 6 | 11 50·93 | 6 17 | 0 27 6·7 | 11 43 55·62 |
| 22 | 6 7 | 11 30·11 | 6 15 | 0 3 53·5 B | 11 47 52·17 |
| 23 | 6 9 | 11 9·40 | 6 13 | 0 19 30·5 A | 11 51 48·72 |
| 24 | 6 10 | 10 48·81 | 6 11 | 0 42 55·0 | 11 55 45·28 |
| 25 | 6 12 | 10 28·38 | 6 9 | 1 6 19·5 | 11 59 41·83 |
| 26 | 6 13 | 10 8·11 | 6 7 | 1 29 43·8 | 12 3 38·38 |
| 27 | 6 14 | 9 48·03 | 6 5 | 1 53 7·5 | 12 7 34·93 |
| 28 | 6 15 | 9 28·14 | 6 3 | 2 16 30·3 | 12 11 31·48 |
| 29 | 6 16 | 9 8·48 | 6 1 | 2 39 51·7 | 12 15 28·03 |
| 30 | 6 18 | 8 49·07 | 5 59 | 3 3 11·5 | 12 19 24·59 |

## — SOLE —

### Ottobre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 6 19 | 0 8 29·91 | 5 58 | 3° 26′ 29″2A | 12 23 21·14 |
| 2 | 6 20 | 8 11·04 | 5 56 | 3 49 44·6 | 12 27 17·69 |
| 3 | 6 21 | 7 52·48 | 5 54 | 4 12 57·2 | 12 31 14·24 |
| 4 | 6 23 | 7 34·27 | 5 52 | 4 36 6·9 | 12 35 10·79 |
| 5 | 6 24 | 7 16·41 | 5 50 | 4 59 13·2 | 12 39 7·34 |
| 6 | 6 25 | 6 58·94 | 5 49 | 5 22 15·8 | 12 43 3·90 |
| 7 | 6 26 | 6 41·87 | 5 46 | 5 45 14·3 | 12 47 0·45 |
| 8 | 6 28 | 6 25·25 | 5 44 | 6 8 8·5 | 12 50 57·00 |
| 9 | 6 29 | 6 9·09 | 5 42 | 6 30 58·0 | 12 54 53·55 |
| 10 | 6 30 | 5 53·40 | 5 41 | 6 53 42·3 | 12 58 50·11 |
| 11 | 6 31 | 5 38·22 | 5 39 | 7 16 21·2 | 13 2 46·66 |
| 12 | 6 33 | 5 23·55 | 5 37 | 7 38 54·2 | 13 6 43·21 |
| 13 | 6 34 | 5 9·42 | 5 35 | 8 1 20·9 | 13 10 39·76 |
| 14 | 6 35 | 4 55·84 | 5 34 | 8 23 41·0 | 13 14 36·31 |
| 15 | 6 36 | 4 42·82 | 5 32 | 8 45 54·1 | 13 18 32·87 |
| 16 | 6 38 | 4 30·39 | 5 30 | 9 7 59·8 | 13 22 29·42 |
| 17 | 6 39 | 4 18·55 | 5 29 | 9 29 57·8 | 13 26 25·97 |
| 18 | 6 40 | 4 7·33 | 5 28 | 9 51 47·4 | 13 30 22·52 |
| 19 | 6 42 | 3 56·73 | 5 26 | 10 13 28·4 | 13 34 19·06 |
| 20 | 6 43 | 3 46·77 | 5 24 | 10 35 0·6 | 13 38 15·63 |
| 21 | 6 44 | 3 37·46 | 5 22 | 10 56 23·2 | 13 42 12·18 |
| 22 | 6 45 | 3 28·82 | 5 21 | 11 17 35·9 | 13 46 8·74 |
| 23 | 6 47 | 3 20·86 | 5 19 | 11 38 38·5 | 13 50 5·29 |
| 24 | 6 48 | 3 13·58 | 5 17 | 11 59 30·5 | 13 54 1·84 |
| 25 | 6 50 | 3 7·00 | 5 16 | 12 20 11·3 | 13 57 58·40 |
| 26 | 6 51 | 3 1·13 | 5 14 | 12 40 40·7 | 14 1 54·95 |
| 27 | 6 52 | 2 55·98 | 5 13 | 13 0 58·2 | 14 5 51·50 |
| 28 | 6 54 | 2 51·57 | 5 11 | 13 21 3·5 | 14 9 48·06 |
| 29 | 6 55 | 2 47·90 | 5 10 | 13 40 56·1 | 14 13 44·61 |
| 30 | 6 57 | 2 44·98 | 5 8 | 14 0 35·5 | 14 17 40·16 |
| 31 | 6 58 | 2 42·83 | 5 6 | 14 20 1·4 | 14 21 37·72 |

## — SOLE —

### Novembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | s | h | m | | h | m | s |
| 1 | 6 | 59 | 0 | 2 | 41·45 | 5 | 6 | 14° 39′ 13″5A | 14 | 25 | 34·27 |
| 2 | 7 | 1 | | 2 | 40·88 | 5 | 4 | 14 58 11·4 | 14 | 29 | 30·82 |
| 3 | 7 | 2 | | 2 | 41·12 | 5 | 2 | 15 16 54·6 | 14 | 33 | 27·38 |
| 4 | 7 | 4 | | 2 | 42·14 | 5 | 1 | 15 35 22·7 | 14 | 37 | 23·93 |
| 5 | 7 | 5 | | 2 | 44·08 | 4 | 59 | 15 53 35·5 | 14 | 41 | 20·49 |
| 6 | 7 | 6 | | 2 | 46·82 | 4 | 59 | 16 11 32·4 | 14 | 45 | 17·04 |
| 7 | 7 | 8 | | 2 | 50·42 | 4 | 57 | 16 29 13·0 | 14 | 49 | 13·60 |
| 8 | 7 | 9 | | 2 | 54·88 | 4 | 56 | 16 46 37·1 | 14 | 53 | 10·15 |
| 9 | 7 | 11 | | 3 | 0·19 | 4 | 54 | 17 3 44·2 | 14 | 57 | 6·70 |
| 10 | 7 | 12 | | 3 | 6·38 | 4 | 53 | 17 20 33·7 | 15 | 1 | 3·26 |
| 11 | 7 | 13 | | 3 | 13·44 | 4 | 53 | 17 37 5·5 | 15 | 4 | 59·81 |
| 12 | 7 | 15 | | 3 | 21·36 | 4 | 51 | 17 53 19·0 | 15 | 8 | 56·37 |
| 13 | 7 | 16 | | 3 | 30·14 | 4 | 50 | 18 9 13·9 | 15 | 12 | 52·92 |
| 14 | 7 | 18 | | 3 | 39·80 | 4 | 49 | 18 24 49·8 | 15 | 16 | 49·48 |
| 15 | 7 | 19 | | 3 | 50·31 | 4 | 48 | 18 40 6·2 | 15 | 20 | 46·03 |
| 16 | 7 | 20 | | 4 | 1·66 | 4 | 47 | 18 55 2·8 | 15 | 24 | 42·59 |
| 17 | 7 | 22 | | 4 | 13·86 | 4 | 46 | 19 9 39·3 | 15 | 28 | 39·15 |
| 18 | 7 | 23 | | 4 | 26·89 | 4 | 45 | 19 23 55·1 | 15 | 32 | 35·70 |
| 19 | 7 | 25 | | 4 | 40·75 | 4 | 44 | 19 37 49·8 | 15 | 36 | 32·26 |
| 20 | 7 | 26 | | 4 | 55·43 | 4 | 43 | 19 51 23·3 | 15 | 40 | 28·81 |
| 21 | 7 | 27 | | 5 | 10·89 | 4 | 43 | 20 4 35·0 | 15 | 44 | 25·37 |
| 22 | 7 | 28 | | 5 | 27·13 | 4 | 42 | 20 17 24·5 | 15 | 48 | 21·92 |
| 23 | 7 | 30 | | 5 | 44·15 | 4 | 41 | 20 29 51·6 | 15 | 52 | 18·48 |
| 24 | 7 | 31 | | 6 | 1·92 | 4 | 41 | 20 41 55·8 | 15 | 56 | 15·03 |
| 25 | 7 | 33 | | 6 | 20·42 | 4 | 40 | 20 53 36·8 | 16 | 0 | 11·59 |
| 26 | 7 | 34 | | 6 | 39·64 | 4 | 39 | 21 4 54·3 | 16 | 4 | 8·15 |
| 27 | 7 | 35 | | 6 | 59·57 | 4 | 39 | 21 15 48·2 | 16 | 8 | 4·70 |
| 28 | 7 | 36 | | 7 | 20·19 | 4 | 39 | 21 26 17·7 | 16 | 12 | 1·26 |
| 29 | 7 | 37 | | 7 | 41·47 | 4 | 38 | 21 36 22·8 | 16 | 15 | 57.82 |
| 30 | 7 | 38 | | 8 | 3·41 | 4 | 37 | 21 46 3·2 | 16 | 19 | 54·37 |

## — SOLE —

### Dicembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m s | h | m | | h | m | s |
| 1 | 7 | 40 | 0 | 8 25·99 | 4 | 37 | 21° 55′ 18″5A | 16 | 23 | 50·93 |
| 2 | 7 | 41 | | 8 49·20 | 4 | 36 | 22 4 8·4 | 16 | 27 | 47·48 |
| 3 | 7 | 42 | | 9 13·01 | 4 | 36 | 22 12 33·0 | 16 | 31 | 44·04 |
| 4 | 7 | 43 | | 9 37·41 | 4 | 36 | 22 20 31·6 | 16 | 35 | 40·60 |
| 5 | 7 | 44 | | 10 2 38 | 4 | 36 | 22 28 4·2 | 16 | 39 | 37·15 |
| 6 | 7 | 45 | | 10 27·90 | 4 | 36 | 22 35 10·5 | 16 | 43 | 33·71 |
| 7 | 7 | 46 | | 10 53·92 | 4 | 36 | 22 41 50·2 | 16 | 47 | 30·27 |
| 8 | 7 | 47 | | 11 20·45 | 4 | 36 | 22 48 3·2 | 16 | 51 | 26·82 |
| 9 | 7 | 48 | | 11 47·46 | 4 | 35 | 22 53 49·2 | 16 | 55 | 23·38 |
| 10 | 7 | 49 | | 12 14·99 | 4 | 35 | 22 59 8·0 | 16 | 59 | 19·94 |
| 11 | 7 | 50 | | 12 42·73 | 4 | 35 | 23 3 59·6 | 17 | 3 | 16·50 |
| 12 | 7 | 51 | | 13 10·96 | 4 | 35 | 23 8 23·8 | 17 | 7 | 13·05 |
| 13 | 7 | 52 | | 13 39·53 | 4 | 35 | 23 12 20·3 | 17 | 11 | 9·61 |
| 14 | 7 | 53 | | 14 8·43 | 4 | 36 | 23 15 49·1 | 17 | 15 | 6·17 |
| 15 | 7 | 53 | | 14 37·58 | 4 | 36 | 23 18 50·0 | 17 | 19 | 2·72 |
| 16 | 7 | 53 | | 15 6·98 | 4 | 37 | 23 21 22·9 | 17 | 22 | 59·28 |
| 17 | 7 | 54 | | 15 36·59 | 4 | 37 | 23 23 27·8 | 17 | 26 | 55·84 |
| 18 | 7 | 55 | | 16 6·37 | 4 | 38 | 23 25 4·5 | 17 | 30 | 52·39 |
| 19 | 7 | 55 | | 16 36·37 | 4 | 38 | 23 26 13·0 | 17 | 34 | 48·95 |
| 20 | 7 | 56 | | 17 6·24 | 4 | 38 | 23 26 53·3 | 17 | 38 | 45·51 |
| 21 | 7 | 56 | | 17 36·27 | 4 | 39 | 23 27 5·2 | 17 | 42 | 42·07 |
| 22 | 7 | 57 | | 18 6·32 | 4 | 39 | 23 26 48·9 | 17 | 46 | 38·62 |
| 23 | 7 | 57 | | 18 36·34 | 4 | 40 | 23 26 4·2 | 17 | 50 | 35·18 |
| 24 | 7 | 58 | | 19 6·30 | 4 | 41 | 23 24 51·3 | 17 | 54 | 31·74 |
| 25 | 7 | 58 | | 19 36·15 | 4 | 41 | 23 23 10·1 | 17 | 58 | 28·29 |
| 26 | 7 | 58 | | 20 5·87 | 4 | 42 | 23 21 0·7 | 18 | 2 | 24·85 |
| 27 | 7 | 59 | | 20 35·43 | 4 | 43 | 23 18 23·3 | 18 | 6 | 21·41 |
| 28 | 7 | 59 | | 21 5·66 | 4 | 43 | 23 15 17·7 | 18 | 10 | 17·97 |
| 29 | 8 | 0 | | 21 33·94 | 4 | 43 | 23 11 44·1 | 18 | 14 | 14·52 |
| 30 | 8 | 0 | | 22 2·82 | 4 | 44 | 23 7 42·6 | 18 | 18 | 11·08 |
| 31 | 8 | 0 | | 22 31·42 | 4 | 45 | 23 3 13·4 | 18 | 22 | 7·64 |

# — LUNA —

## Gennaio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 9 | Mattino 28 | 2 | Sera 46 | 8 | Sera 13 | 3 |
| 2 | 10 | 1 | 3 | 35 | 9 | 20 | 4 |
| 3 | 10 | 31 | 4 | 24 | 10 | 27 | 5 |
| 4 | 11 | 2 | 5 | 13 | 11 | 36 | 6 |
| 5 | 11 | 33 | 6 | 4 | — | — | 7 |
| 6 | 0 | Sera 7 | 6 | 56 | 0 | Mattino 47 | 8 |
| 7 | 0 | 44 | 7 | 51 | 1 | 58 | 9 |
| 8 | 1 | 26 | 8 | 48 | 3 | 9 | 10 |
| 9 | 2 | 14 | 9 | 47 | 4 | 18 | 11 |
| 10 | 3 | 11 | 10 | 47 | 5 | 24 | 12 |
| 11 | 4 | 13 | 11 | 46 | 6 | 23 | 13 |
| 12 | 5 | 21 | — | — | 7 | 15 | 14 |
| 13 | 6 | 29 | 0 | Mattino 43 | 8 | 0 | 15 |
| 14 | 7 | 37 | 1 | 37 | 8 | 38 | 16 |
| 15 | 8 | 43 | 2 | 28 | 9 | 11 | 17 |
| 16 | 9 | 47 | 3 | 16 | 9 | 40 | 18 |
| 17 | 10 | 50 | 4 | 1 | 10 | 9 | 19 |
| 18 | 11 | 49 | 4 | 46 | 10 | 35 | 20 |
| 19 | — | — | 5 | 29 | 11 | 3 | 21 |
| 20 | 0 | Mattino 49 | 6 | 13 | 11 | 33 | 22 |
| 21 | 1 | 48 | 6 | 58 | 0 | Sera 4 | 23 |
| 22 | 2 | 45 | 7 | 43 | 0 | 40 | 24 |
| 23 | 3 | 41 | 8 | 30 | 1 | 20 | 25 |
| 24 | 4 | 34 | 9 | 19 | 2 | 6 | 26 |
| 25 | 5 | 23 | 10 | 9 | 2 | 57 | 27 |
| 26 | 6 | 9 | 10 | 59 | 3 | 54 | 28 |
| 27 | 6 | 51 | 11 | 50 | 4 | 56 | 29 |
| 28 | 7 | 29 | 0 | Sera 41 | 6 | 1 | 1 |
| 29 | 8 | 3 | 1 | 31 | 7 | 9 | 2 |
| 30 | 8 | 35 | 2 | 21 | 8 | 17 | 3 |
| 31 | 9 | 6 | 3 | 11 | 9 | 27 | 4 |

Primo quarto il 5 a $10^h$ $24^m$ di sera.
Luna piena il 12 a 4 16 di sera.
Ultimo quarto il 20 a 6 13 di matt.
Luna nuova il 28 a 5 51 di matt.

## Febbraio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 9 | Mattino 37 | 4 | Sera 1 | 10 | Sera 38 | 5 |
| 2 | 10 | 10 | 4 | 53 | 11 | 49 | 6 |
| 3 | 10 | 45 | 5 | 47 | — | — | 7 |
| 4 | 11 | 26 | 6 | 42 | 0 | Mattino 59 | 8 |
| 5 | 0 | Sera 11 | 7 | 39 | 2 | 7 | 9 |
| 6 | 1 | 2 | 8 | 36 | 3 | 13 | 10 |
| 7 | 2 | 0 | 9 | 34 | 4 | 13 | 11 |
| 8 | 3 | 4 | 10 | 31 | 5 | 6 | 12 |
| 9 | 4 | 10 | 11 | 25 | 5 | 53 | 13 |
| 10 | 5 | 17 | — | — | 6 | 33 | 14 |
| 11 | 6 | 24 | 0 | Mattino 16 | 7 | 7 | 15 |
| 12 | 7 | 30 | 1 | 6 | 7 | 39 | 16 |
| 13 | 8 | 33 | 1 | 53 | 8 | 8 | 17 |
| 14 | 9 | 35 | 2 | 38 | 8 | 37 | 18 |
| 15 | 0 | 35 | 3 | 23 | 9 | 4 | 19 |
| 16 | 11 | 35 | 4 | 7 | 9 | 34 | 20 |
| 17 | — | — | 4 | 51 | 10 | 4 | 21 |
| 18 | 0 | Mattino 33 | 5 | 36 | 10 | 38 | 22 |
| 19 | 1 | 29 | 6 | 23 | 11 | 16 | 23 |
| 20 | 2 | 23 | 7 | 10 | 11 | 58 | 24 |
| 21 | 3 | 13 | 7 | 59 | 0 | Sera 47 | 25 |
| 22 | 4 | 1 | 8 | 48 | 1 | 41 | 26 |
| 23 | 4 | 44 | 9 | 39 | 2 | 39 | 27 |
| 24 | 5 | 24 | 10 | 30 | 3 | 43 | 28 |
| 25 | 6 | 0 | 11 | 20 | 4 | 50 | 29 |
| 26 | 6 | 33 | 0 | Sera 11 | 5 | 59 | 30 |
| 27 | 7 | 6 | 1 | 3 | 7 | 12 | 1 |
| 28 | 7 | 38 | 1 | 55 | 8 | 24 | 2 |
| 29 | 8 | 12 | 2 | 48 | 9 | 35 | 3 |

Primo quarto il 4 a $6^h$ $47^m$ di matt.
Luna piena l' 11 a 5 37 di matt.
Ultimo quarto il 19 a. 4 2 di matt.
Luna nuova il 26 a 7 24 di sera.

## — LUNA —

### Marzo

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA: Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 8 | 48 Mattino | 3 | 42 Sera | 10 | 48 Sera | 4 |
| 2 | 9 | 27 | 4 | 38 | 11 | 59 | 5 |
| 3 | 10 | 11 | 5 | 34 | ——— | | 6 |
| 4 | 11 | 0 | 6 | 32 | 1 | 6 Mattino | 7 |
| 5 | 11 | 56 | 7 | 29 | 2 | 0 | 8 |
| 6 | 0 | 57 Sera | 8 | 25 | 3 | 2 | 9 |
| 7 | 2 | 0 | 9 | 18 | 3 | 49 | 10 |
| 8 | 3 | 5 | 10 | 10 | 4 | 30 | 11 |
| 9 | 4 | 10 | 10 | 59 | 5 | 7 | 12 |
| 10 | 5 | 15 | 11 | 46 | 5 | 39 | 13 |
| 11 | 6 | 19 | ——— | | 6 | 9 | 14 |
| 12 | 7 | 22 | 0 | 32 Mattino | 6 | 38 | 15 |
| 13 | 8 | 23 | 1 | 16 | 7 | 5 | 16 |
| 14 | 9 | 22 | 2 | 1 | 7 | 34 | 17 |
| 15 | 10 | 21 | 2 | 45 | 8 | 5 | 18 |
| 16 | 11 | 18 | 3 | 30 | 8 | 37 | 19 |
| 17 | ——— | | 4 | 16 | 9 | 13 | 20 |
| 18 | 0 | 13 Mattino | 5 | 3 | 9 | 54 | 21 |
| 19 | 1 | 4 | 5 | 51 | 10 | 39 | 22 |
| 20 | 1 | 52 | 6 | 39 | 11 | 29 | 23 |
| 21 | 2 | 36 | 7 | 28 | 0 | 25 Sera | 24 |
| 22 | 3 | 17 | 8 | 18 | 1 | 25 | 25 |
| 23 | 3 | 54 | 9 | 8 | 2 | 30 | 26 |
| 24 | 4 | 28 | 9 | 58 | 3 | 38 | 27 |
| 25 | 5 | 2 | 10 | 49 | 4 | 48 | 28 |
| 26 | 5 | 34 | 11 | 41 | 6 | 0 | 29 |
| 27 | 6 | 7 | 0 | 35 Sera | 7 | 14 | 1 |
| 28 | 6 | 43 | 1 | 30 | 8 | 29 | 2 |
| 29 | 7 | 15 | 2 | 27 | 9 | 44 | 3 |
| 30 | 8 | 6 | 3 | 26 | 10 | 54 | 4 |
| 31 | 8 | 56 | 4 | 25 | 12 | 0 | 5 |

Primo quarto il 4 a 2h 22m di sera.
Luna piena il 11 a 8 29 di sera.
Ultimo quarto il 20 a 0 2 di matt.
Luna nuova il 27 a 6 37 di matt.

### Aprile

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA: Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 9 | 50 Mattino | 5 | 24 Sera | ——— | | 6 |
| 2 | 10 | 51 | 6 | 21 | 0 | 58 Mattino | 7 |
| 3 | 11 | 53 | 7 | 15 | 1 | 48 | 8 |
| 4 | 0 | 58 Sera | 8 | 7 | 2 | 37 | 9 |
| 5 | 2 | 3 | 8 | 56 | 3 | 9 | 10 |
| 6 | 3 | 7 | 9 | 43 | 3 | 41 | 11 |
| 7 | 4 | 10 | 10 | 28 | 4 | 12 | 12 |
| 8 | 5 | 12 | 11 | 13 | 4 | 40 | 13 |
| 9 | 6 | 12 | 11 | 57 | 5 | 6 | 14 |
| 10 | 7 | 13 | ——— | | 5 | 36 | 15 |
| 11 | 8 | 12 | 0 | 41 Mattino | 6 | 5 | 16 |
| 12 | 9 | 9 | 1 | 26 | 6 | 37 | 17 |
| 13 | 10 | 5 | 2 | 12 | 7 | 12 | 18 |
| 14 | 10 | 58 | 2 | 58 | 7 | 51 | 19 |
| 15 | 11 | 46 | 3 | 45 | 8 | 34 | 20 |
| 16 | ——— | | 4 | 33 | 9 | 22 | 21 |
| 17 | 0 | 32 Mattino | 5 | 21 | 10 | 15 | 22 |
| 18 | 1 | 12 | 6 | 9 | 11 | 12 | 23 |
| 19 | 1 | 50 | 6 | 58 | 0 | 13 Sera | 24 |
| 20 | 2 | 25 | 7 | 47 | 1 | 17 | 25 |
| 21 | 2 | 57 | 8 | 36 | 2 | 24 | 26 |
| 22 | 3 | 30 | 9 | 26 | 3 | 35 | 27 |
| 23 | 4 | 3 | 10 | 18 | 4 | 48 | 28 |
| 24 | 4 | 37 | 11 | 13 | 6 | 3 | 29 |
| 25 | 5 | 14 | 0 | 10 Sera | 7 | 18 | 30 |
| 26 | 5 | 56 | 1 | 9 | 8 | 33 | 1 |
| 27 | 6 | 44 | 2 | 10 | 9 | 43 | 2 |
| 28 | 7 | 38 | 3 | 11 | 10 | 47 | 3 |
| 29 | 8 | 38 | 4 | 11 | 11 | 42 | 4 |
| 30 | 9 | 43 | 5 | 9 | ——— | | 5 |

Primo quarto il 2 a 10h 6m di sera.
Luna piena il 10 a 0 33 di sera.
Ultimo quarto li 18 a 4 44 di sera.
Luna nuova il 25 a 3 47 di sera.

# — LUNA —

## Maggio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 10 | 49 | 6 | 3 | 0 | 29 | 6 |
| 2 | 11 | 55 | 6 | 53 | 1 | 9 | 7 |
| 3 | 0 | 59 | 7 | 41 | 1 | 44 | 8 |
| 4 | 2 | 3 | 8 | 27 | 2 | 15 | 9 |
| 5 | 3 | 5 | 9 | 12 | 2 | 44 | 10 |
| 6 | 4 | 6 | 9 | 55 | 3 | 12 | 11 |
| 7 | 5 | 6 | 10 | 39 | 3 | 39 | 12 |
| 8 | 6 | 4 | 11 | 23 | 4 | 8 | 13 |
| 9 | 7 | 3 | ——— | | 4 | 38 | 14 |
| 10 | 7 | 59 | 0 | 9 | 5 | 12 | 15 |
| 11 | 8 | 53 | 0 | 55 | 5 | 49 | 16 |
| 12 | 9 | 43 | 1 | 42 | 6 | 31 | 17 |
| 13 | 10 | 30 | 2 | 29 | 7 | 17 | 18 |
| 14 | 11 | 12 | 3 | 17 | 8 | 9 | 19 |
| 15 | 11 | 50 | 4 | 5 | 9 | 4 | 20 |
| 16 | ——— | | 4 | 53 | 10 | 3 | 21 |
| 17 | 0 | 25 | 5 | 41 | 11 | 4 | 22 |
| 18 | 0 | 57 | 6 | 28 | 0 | 6 | 23 |
| 19 | 1 | 29 | 7 | 17 | 1 | 15 | 24 |
| 20 | 1 | 59 | 8 | 6 | 2 | 24 | 25 |
| 21 | 2 | 31 | 8 | 58 | 3 | 36 | 26 |
| 22 | 3 | 6 | 9 | 52 | 4 | 50 | 27 |
| 23 | 3 | 45 | 10 | 49 | 6 | 3 | 28 |
| 24 | 4 | 30 | 11 | 50 | 7 | 19 | 29 |
| 25 | 5 | 21 | 0 | 52 | 8 | 28 | 1 |
| 26 | 6 | 19 | 1 | 54 | 9 | 29 | 2 |
| 27 | 7 | 24 | 2 | 55 | 10 | 22 | 3 |
| 28 | 8 | 32 | 3 | 53 | 11 | 7 | 4 |
| 29 | 9 | 41 | 4 | 47 | 11 | 44 | 5 |
| 30 | 10 | 48 | 5 | 37 | ——— | | 6 |
| 31 | 11 | 54 | 6 | 25 | 0 | 18 | 7 |

Primo quarto il 2 a 6h 57m di matt.
Luna piena il 10 a 4 57 di matt.
Ultimo quarto il 4 a 5 44 di matt.
Luna nuova il 24 a 11 26 di sera.
Primo quarto il 31 a 5 46 di sera.

## Giugno

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 0 | 57 | 7 | 10 | 0 | 47 | 8 |
| 2 | 1 | 59 | 7 | 51 | 1 | 17 | 9 |
| 3 | 2 | 59 | 8 | 38 | 1 | 43 | 10 |
| 4 | 3 | 58 | 9 | 22 | 2 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 57 | 10 | 7 | 2 | 42 | 12 |
| 6 | 5 | 53 | 10 | 52 | 3 | 14 | 13 |
| 7 | 6 | 48 | 11 | 39 | 3 | 49 | 14 |
| 8 | 7 | 40 | ——— | | 4 | 29 | 15 |
| 9 | 8 | 28 | 0 | 26 | 5 | 14 | 16 |
| 10 | 9 | 12 | 1 | 5 | 6 | 4 | 17 |
| 11 | 9 | 52 | 2 | 3 | 6 | 58 | 18 |
| 12 | 10 | 28 | 2 | 51 | 7 | 56 | 19 |
| 13 | 11 | 0 | 3 | 38 | 8 | 57 | 20 |
| 14 | 11 | 32 | 4 | 25 | 9 | 59 | 21 |
| 15 | ——— | | 5 | 13 | 11 | 4 | 22 |
| 16 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 | 10 | 23 |
| 17 | 0 | 32 | 6 | 49 | 1 | 19 | 24 |
| 18 | 1 | 4 | 7 | 40 | 2 | 30 | 25 |
| 19 | 1 | 39 | 8 | 34 | 3 | 42 | 26 |
| 20 | 2 | 20 | 9 | 32 | 4 | 55 | 27 |
| 21 | 3 | 6 | 10 | 32 | 6 | 5 | 28 |
| 22 | 4 | 0 | 11 | 34 | 7 | 30 | 29 |
| 23 | 5 | 1 | 0 | 36 | 8 | 8 | 1 |
| 24 | 6 | 9 | 1 | 36 | 8 | 58 | 2 |
| 25 | 7 | 19 | 2 | 34 | 9 | 40 | 3 |
| 26 | 8 | 29 | 3 | 27 | 10 | 17 | 4 |
| 27 | 9 | 38 | 4 | 18 | 10 | 48 | 5 |
| 28 | 10 | 44 | 5 | 5 | 11 | 19 | 6 |
| 29 | 11 | 48 | 5 | 51 | 11 | 47 | 7 |
| 30 | 0 | 49 | 6 | 35 | ——— | | 8 |

Luna piena l' 8 a 8h 39m di sera.
Ultimo quarto il 16 a 3 24 di sera.
Luna nuova il 23 a 6 22 di matt.
Primo quarto il 30 a 7 4 di matt.

## — LUNA —

### Luglio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 1 | 50 | 7 | 19 | 0 | 15 | 9 |
| 2 | 2 | 49 | 8 | 4 | 0 | 45 | 10 |
| 3 | 3 | 46 | 8 | 49 | 1 | 16 | 11 |
| 4 | 4 | 42 | 9 | 35 | 1 | 50 | 12 |
| 5 | 5 | 36 | 10 | 23 | 2 | 29 | 13 |
| 6 | 6 | 25 | 11 | 11 | 3 | 11 | 14 |
| 7 | 7 | 11 | 11 | 59 | 3 | 59 | 15 |
| 8 | 7 | 52 | ——— | | 4 | 53 | 16 |
| 9 | 8 | 30 | 0 | 48 | 5 | 49 | 17 |
| 10 | 9 | 5 | 1 | 36 | 6 | 49 | 18 |
| 11 | 9 | 36 | 2 | 24 | 7 | 52 | 19 |
| 12 | 10 | 6 | 3 | 11 | 8 | 56 | 20 |
| 13 | 10 | 36 | 3 | 59 | 10 | 1 | 21 |
| 14 | 11 | 7 | 4 | 47 | 11 | 9 | 22 |
| 15 | 11 | 40 | 5 | 36 | 0 | 17 | 23 |
| 16 | ——— | | 6 | 27 | 1 | 26 | 24 |
| 17 | 0 | 17 | 7 | 21 | 2 | 37 | 25 |
| 18 | 0 | 59 | 8 | 18 | 3 | 47 | 26 |
| 19 | 1 | 48 | 9 | 18 | 4 | 53 | 27 |
| 20 | 2 | 44 | 10 | 18 | 5 | 54 | 28 |
| 21 | 3 | 48 | 11 | 19 | 6 | 47 | 29 |
| 22 | 4 | 56 | 0 | 17 | 7 | 33 | 30 |
| 23 | 6 | 6 | 1 | 13 | 8 | 12 | 1 |
| 24 | 7 | 17 | 2 | 6 | 8 | 47 | 2 |
| 25 | 8 | 25 | 2 | 56 | 9 | 18 | 3 |
| 26 | 9 | 31 | 3 | 43 | 9 | 48 | 4 |
| 27 | 10 | 36 | 4 | 29 | 10 | 17 | 5 |
| 28 | 11 | 37 | 5 | 14 | 10 | 47 | 6 |
| 29 | 0 | 38 | 5 | 59 | 11 | 17 | 7 |
| 30 | 1 | 36 | 6 | 45 | 11 | 50 | 8 |
| 31 | 2 | 33 | 7 | 31 | ——— | | 9 |

Sera / Mattino / Sera / Mattino / Sera / Mattino / Sera

Luna piena l' 8 a 11h 0m di matt.
Ultimo quarto il 15 a 10 28 di sera.
Luna nuova il 22 a 1 43 di sera.
Primo quarto il 29 a 10 51 di sera.

### Agosto

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 3 | 27 | 8 | 17 | 0 | 27 | 10 |
| 2 | 4 | 18 | 9 | 5 | 1 | 8 | 11 |
| 3 | 5 | 6 | 9 | 54 | 1 | 53 | 12 |
| 4 | 4 | 49 | 10 | 42 | 2 | 45 | 13 |
| 5 | 6 | 29 | 11 | 31 | 3 | 40 | 14 |
| 6 | 7 | 6 | ——— | | 4 | 40 | 15 |
| 7 | 7 | 38 | 0 | 20 | 5 | 42 | 16 |
| 8 | 8 | 10 | 1 | 8 | 6 | 47 | 17 |
| 9 | 8 | 40 | 1 | 56 | 7 | 53 | 18 |
| 10 | 9 | 12 | 2 | 45 | 9 | 0 | 19 |
| 11 | 9 | 44 | 3 | 34 | 10 | 9 | 20 |
| 12 | 10 | 20 | 4 | 25 | 11 | 17 | 21 |
| 13 | 10 | 59 | 5 | 18 | 0 | 27 | 22 |
| 14 | 11 | 44 | 6 | 12 | 1 | 36 | 23 |
| 15 | ——— | | 7 | 9 | 2 | 41 | 24 |
| 16 | 0 | 36 | 8 | 8 | 3 | 43 | 25 |
| 17 | 1 | 34 | 9 | 6 | 4 | 36 | 26 |
| 18 | 2 | 39 | 10 | 4 | 5 | 25 | 27 |
| 19 | 3 | 47 | 11 | 0 | 6 | 7 | 28 |
| 20 | 4 | 57 | 11 | 54 | 6 | 44 | 29 |
| 21 | 6 | 5 | 0 | 45 | 7 | 16 | 1 |
| 22 | 7 | 13 | 1 | 34 | 7 | 48 | 2 |
| 23 | 8 | 18 | 2 | 21 | 8 | 17 | 3 |
| 24 | 9 | 21 | 3 | 7 | 8 | 47 | 4 |
| 25 | 10 | 24 | 3 | 53 | 9 | 17 | 5 |
| 26 | 11 | 24 | 4 | 38 | 9 | 50 | 6 |
| 27 | 0 | 22 | 5 | 24 | 10 | 25 | 7 |
| 28 | 1 | 18 | 6 | 11 | 11 | 5 | 8 |
| 29 | 2 | 10 | 6 | 58 | 11 | 48 | 9 |
| 30 | 2 | 59 | 7 | 46 | ——— | | 10 |
| 31 | 3 | 43 | 8 | 34 | 0 | 36 | 11 |

Sera / Mattino / Sera / Mattino / Sera / Mattino / Sera / M.

Luna piena il 6 a 11h 56m di sera.
Ultimo quarto il 14 a 3 57 di matt.
Luna nuova il 20 a 10 43 di sera.
Primo quarto il 28 a 4 31 di sera.

# — LUNA —

## Settembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|
| | h m | h m | h m | |
| 1 | 4 Sera 24 | 9 Sera 23 | 1 Mattino 29 | 12 |
| 2 | 5 2 | 10 12 | 2 28 | 13 |
| 3 | 5 37 | 11 0 | 3 28 | 14 |
| 4 | 6 10 | 11 49 | 4 33 | 15 |
| 5 | 6 41 | ——— | 5 39 | 16 |
| 6 | 7 13 | 0 Mattino 39 | 6 47 | 17 |
| 7 | 7 45 | 1 29 | 7 57 | 18 |
| 8 | 8 21 | 2 20 | 9 7 | 19 |
| 9 | 8 59 | 3 13 | 10 17 | 20 |
| 10 | 9 43 | 4 8 | 11 27 | 21 |
| 11 | 10 34 | 5 5 | 0 Sera 34 | 22 |
| 12 | 11 29 | 6 3 | 1 36 | 23 |
| 13 | ——— | 7 0 | 2 32 | 24 |
| 14 | 0 Mattino 30 | 7 57 | 3 21 | 25 |
| 15 | 1 35 | 8 53 | 4 4 | 26 |
| 16 | 2 43 | 9 46 | 4 42 | 27 |
| 17 | 3 50 | 10 37 | 5 15 | 28 |
| 18 | 4 57 | 11 26 | 5 47 | 29 |
| 19 | 6 2 | 0 Sera 13 | 6 17 | 1 |
| 20 | 7 7 | 1 0 | 6 47 | 2 |
| 21 | 8 9 | 1 46 | 7 16 | 3 |
| 22 | 9 11 | 2 31 | 7 48 | 4 |
| 23 | 10 10 | 3 18 | 8 23 | 5 |
| 24 | 11 6 | 4 4 | 9 1 | 6 |
| 25 | 12 0 | 4 51 | 9 42 | 7 |
| 26 | 0 Sera 51 | 5 38 | 10 28 | 8 |
| 27 | 1 37 | 6 26 | 11 19 | 9 |
| 28 | 2 19 | 7 14 | ——— | 10 |
| 29 | 2 57 | 8 2 | 0 Matt. 14 | 11 |
| 30 | 3 33 | 8 40 | 1 13 | 12 |

Luna piena il 5 a 11h 45m di matt.
Ultimo quarto il 12 a 9 6 di matt.
Luna nuova il 19 a 10 26 di matt.
Primo quarto il 27 a 11 10 di matt.

## Ottobre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|
| | h m | h m | h m | |
| 1 | 4 Sera 6 | 9 Sera 38 | 2 Mattino 15 | 13 |
| 2 | 4 39 | 10 28 | 3 19 | 14 |
| 3 | 5 11 | 11 18 | 4 26 | 15 |
| 4 | 5 43 | ——— | 5 37 | 16 |
| 5 | 6 18 | 0 Mattino 10 | 6 48 | 17 |
| 6 | 6 57 | 1 4 | 8 1 | 18 |
| 7 | 7 40 | 2 0 | 9 14 | 19 |
| 8 | 8 28 | 2 57 | 10 23 | 20 |
| 9 | 9 24 | 3 56 | 11 29 | 21 |
| 10 | 10 24 | 4 55 | 0 Sera 28 | 22 |
| 11 | 11 28 | 5 53 | 1 19 | 23 |
| 12 | ——— | 6 49 | 2 4 | 24 |
| 13 | 0 Mattino 34 | 7 42 | 2 43 | 25 |
| 14 | 1 41 | 8 33 | 3 17 | 26 |
| 15 | 2 46 | 9 21 | 3 49 | 27 |
| 16 | 3 52 | 10 8 | 4 18 | 28 |
| 17 | 4 55 | 10 54 | 4 48 | 29 |
| 18 | 6 8 | 11 40 | 5 17 | 30 |
| 19 | 7 0 | 0 Sera 26 | 5 48 | 1 |
| 20 | 8 0 | 1 12 | 6 21 | 2 |
| 21 | 8 57 | 1 58 | 6 58 | 3 |
| 22 | 9 52 | 2 45 | 7 38 | 4 |
| 23 | 10 44 | 3 32 | 8 22 | 5 |
| 24 | 11 32 | 4 19 | 9 11 | 6 |
| 25 | 0 Sera 14 | 5 7 | 10 3 | 7 |
| 26 | 0 55 | 5 54 | 11 0 | 8 |
| 27 | 1 30 | 6 41 | 11 59 | 9 |
| 28 | 2 2 | 7 28 | ——— | 10 |
| 29 | 2 36 | 8 15 | 1 Mattino 1 | 11 |
| 30 | 3 6 | 9 4 | 2 6 | 12 |
| 31 | 3 38 | 9 55 | 3 13 | 13 |

Luna piena il 4 a 10h 49m di sera.
Ultimo quarto l' 11 a 3 19 di sera.
Luna nuova il 19 a 1 21 di matt.
Primo quarto il 27 a 5 44 di matt.

# — LUNA —

## Novembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 4 | Sera 12 | 10 | Sera 48 | 4 | Mattino 23 | 14 |
| 2 | 4 | 48 | 11 | 43 | 5 | 36 | 15 |
| 3 | 5 | 30 | — | | 6 | 50 | 16 |
| 4 | 6 | 18 | 0 | Mattino 42 | 8 | 4 | 17 |
| 5 | 7 | 12 | 1 | 42 | 9 | 14 | 18 |
| 6 | 8 | 13 | 2 | 44 | 10 | 18 | 19 |
| 7 | 9 | 18 | 3 | 44 | 11 | 14 | 20 |
| 8 | 10 | 25 | 4 | 43 | 0 | Sera 3 | 21 |
| 9 | 11 | 33 | 5 | 38 | 0 | 44 | 22 |
| 10 | — | | 6 | 30 | 1 | 20 | 23 |
| 11 | 0 | Mattino 39 | 7 | 20 | 1 | 52 | 24 |
| 12 | 1 | 44 | 8 | 7 | 2 | 22 | 25 |
| 13 | 2 | 47 | 8 | 53 | 2 | 51 | 26 |
| 14 | 3 | 50 | 9 | 38 | 3 | 20 | 27 |
| 15 | 4 | 51 | 10 | 23 | 3 | 50 | 28 |
| 16 | 5 | 51 | 11 | 8 | 4 | 21 | 29 |
| 17 | 6 | 49 | 11 | 54 | 4 | 56 | 30 |
| 18 | 7 | 46 | 0 | Sera 41 | 5 | 35 | 1 |
| 19 | 8 | 39 | 1 | 28 | 6 | 18 | 2 |
| 20 | 9 | 28 | 2 | 15 | 7 | 4 | 3 |
| 21 | 10 | 13 | 3 | 2 | 7 | 56 | 4 |
| 22 | 10 | 54 | 3 | 49 | 8 | 50 | 5 |
| 23 | 11 | 31 | 4 | 36 | 9 | 48 | 6 |
| 24 | 0 | Sera 4 | 5 | 22 | 10 | 48 | 7 |
| 25 | 0 | 35 | 6 | 8 | 11 | 49 | 8 |
| 26 | 1 | 6 | 6 | 54 | — | | 9 |
| 27 | 1 | 35 | 7 | 42 | 0 | Mattino 54 | 10 |
| 28 | 2 | 7 | 8 | 32 | 2 | 0 | 11 |
| 29 | 2 | 41 | 9 | 25 | 3 | 9 | 12 |
| 30 | 3 | 19 | 10 | 21 | 4 | 22 | 13 |

Luna piena il 3 a $9^h$ $26^m$ di matt.
Ultimo quarto il 10 a 0 2 di matt.
Luna nuova il 17 a 7 1 di sera.
Primo quarto il 25 a 11 5 di sera.

## Dicembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 4 | Sera 2 | 11 | Sera 21 | 5 | Mattino 35 | 14 |
| 2 | 4 | 54 | — | | 6 | 48 | 15 |
| 3 | 5 | 51 | 0 | Mattino 23 | 7 | 58 | 16 |
| 4 | 6 | 58 | 1 | 26 | 9 | 1 | 17 |
| 5 | 8 | 7 | 2 | 28 | 9 | 55 | 18 |
| 6 | 9 | 18 | 3 | 27 | 10 | 41 | 19 |
| 7 | 10 | 27 | 4 | 23 | 11 | 20 | 20 |
| 8 | 11 | 35 | 5 | 15 | 11 | 55 | 21 |
| 9 | — | | 6 | 4 | 0 | Sera 26 | 22 |
| 10 | 0 | Mattino 40 | 6 | 51 | 0 | 56 | 23 |
| 11 | 1 | 43 | 7 | 37 | 1 | 24 | 24 |
| 12 | 2 | 44 | 8 | 22 | 1 | 54 | 25 |
| 13 | 3 | 45 | 9 | 6 | 2 | 25 | 26 |
| 14 | 4 | 40 | 9 | 52 | 2 | 58 | 27 |
| 15 | 5 | 40 | 10 | 38 | 3 | 35 | 28 |
| 16 | 6 | 34 | 11 | 25 | 4 | 16 | 29 |
| 17 | 7 | 25 | 0 | Sera 12 | 5 | 1 | 30 |
| 18 | 8 | 12 | 1 | Sera 0 | 5 | 51 | 1 |
| 19 | 9 | 54 | 1 | 47 | 6 | 44 | 2 |
| 20 | 9 | 32 | 2 | 33 | 7 | 40 | 3 |
| 21 | 10 | 7 | 3 | 19 | 8 | 39 | 4 |
| 22 | 10 | 39 | 4 | 5 | 9 | 40 | 5 |
| 23 | 11 | 9 | 4 | 51 | 10 | 42 | 6 |
| 24 | 11 | 38 | 5 | 37 | 11 | 46 | 7 |
| 25 | 0 | Sera 8 | 6 | 24 | — | | 8 |
| 26 | 0 | 39 | 7 | 13 | 0 | Mattino 52 | 9 |
| 27 | 1 | 13 | 8 | 5 | 1 | 59 | 10 |
| 28 | 1 | 52 | 9 | 1 | 3 | 9 | 11 |
| 29 | 2 | 38 | 10 | 1 | 4 | 21 | 12 |
| 30 | 3 | 31 | 11 | 2 | 5 | 31 | 13 |
| 31 | 4 | 32 | — | | 6 | 38 | 14 |

Luna piena il 2 a $7^h$ $49^m$ di sera.
Ultimo quarto il 9 a 0 20 di sera.
Luna nuova il 17 a 2 14 di sera.
Primo quarto il 25 a 2 11 di sera.

# ECCLISSI

## (1884)

---

27 *Marzo.* Ecclisse parziale di Sole invisibile a Torino.

10 *Aprile.* Ecclisse totale di Luna invisibile a Torino.

25 » Ecclisse parziale di Sole invisibile a Torino.

4 *Ottobre.* Ecclisse totale di Luna visibile a Torino.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Entrata nell'ombra . . . . . | $9^h$ | $5^m$ | pom. |
| Principio dell'ecclisse totale . . | 10 | 5 | » |
| Metà dell'ecclisse . . . . . | 10 | 52 | » |
| Fine dell'ecclisse totale . . . . | 11 | 38 | » |
| Uscita dall'ombra . . . . . | 0 | 39 | antim. del |

giorno 5 — Grandezza dell'ecclisse 1, 52 preso per unità il diametro della Luna. Il primo contatto coll'ombra a 83° dal punto più boreale del disco lunare verso est; l'ultimo contatto a 118° verso ovest (immagine diritta).

18 *Ottobre.* Ecclisse parziale di Sole invisibile a Torino.

PIA

| TEMPO MEDIO DI ROMA | MERCURIO | | | | | | VENERE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | |
| | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m |
| 1 Gennaio | 9 | 17 Mattino | 1 | 44 Sera | 6 | 14 Sera | 9 | 37 Mattino | 2 | 11 Sera | 6 | 48 Sera |
| 11 » | 8 | 47 | 1 | 35 | 6 | 23 | 9 | 32 | 2 | 22 | 7 | 15 |
| 21 » | 7 | 28 | 0 | 21 | 5 | 12 | 9 | 22 | 2 | 31 | 7 | 43 |
| 1 Febbraio | 6 | 14 | 11 | 5 Mattino | 3 | 56 | 9 | 7 | 2 | 38 | 8 | 12 |
| 11 » | 6 | 11 | 10 | 47 | 3 | 25 | 8 | 51 | 2 | 43 | 8 | 48 |
| 21 » | 6 | 13 | 10 | 54 | 3 | 47 | 8 | 34 | 2 | 47 | 9 | 3 |
| 1 Marzo | 6 | 16 | 11 | 10 | 4 | 7 | 8 | 19 | 2 | 51 | 9 | 26 |
| 11 » | 6 | 16 | 11 | 32 | 4 | 51 | 8 | 2 | 2 | 55 | 9 | 51 |
| 21 » | 6 | 13 | 11 | 58 | 5 | 48 | 7 | 48 | 3 | 1 | 10 | 17 |
| 1 Aprile | 6 | 13 | 0 | 32 Sera | 6 | 58 | 7 | 35 | 3 | 7 | 10 | 43 |
| 11 » | 6 | 9 | 1 | 8 | 8 | 12 | 7 | 27 | 3 | 14 | 11 | 4 |
| 21 » | 6 | 2 | 1 | 32 | 9 | 5 | 7 | 23 | 3 | 21 | 11 | 23 |
| 1 Maggio | 5 | 47 | 1 | 30 | 9 | 13 | 7 | 22 | 3 | 26 | 11 | 32 |
| 11 » | 5 | 18 | 0 | 53 | 8 | 26 | 7 | 24 | 3 | 28 | 11 | 34 |
| 21 » | 4 | 41 | 11 | 55 Mattino | 7 | 8 | 7 | 27 | 3 | 26 | 11 | 26 |
| 1 Giugno | 3 | 59 | 11 | 3 | 6 | 7 | 7 | 25 | 3 | 15 | 11 | 6 |
| 11 » | 3 | 34 | 10 | 44 | 5 | 57 | 7 | 13 | 2 | 54 | 10 | 35 |
| 21 » | 3 | 25 | 10 | 51 | 6 | 23 | 6 | 51 | 2 | 20 | 9 | 49 |
| 1 Luglio | 3 | 41 | 11 | 24 | 7 | 14 | 6 | 7 | 1 | 29 | 8 | 50 |
| 11 » | 4 | 31 | 0 | 16 Sera | 8 | 5 | 5 | 10 | 0 | 25 | 7 | 41 |
| 21 » | 5 | 39 | 1 | 5 | 8 | 35 | 4 | 10 | 11 | 22 Mattino | 6 | 34 |
| 1 Agosto | 6 | 45 | 1 | 41 | 8 | 39 | 3 | 14 | 10 | 26 | 5 | 38 |
| 11 » | 7 | 29 | 1 | 57 | 8 | 26 | 2 | 40 | 9 | 53 | 5 | 7 |
| 21 » | 7 | 58 | 2 | 0 | 8 | 5 | 2 | 18 | 9 | 32 | 4 | 48 |
| 1 Settembre | 8 | 3 | 1 | 46 | 7 | 29 | 2 | 7 | 0 | 21 | 4 | 37 |
| 11 » | 7 | 25 | 1 | 5 | 6 | 46 | 1 | 59 | 9 | 15 | 4 | 33 |
| 21 » | 5 | 51 | 11 | 54 Mattino | 6 | 0 | 2 | 10 | 9 | 15 | 4 | 22 |
| 1 Ottobre | 5 | 48 | 11 | 7 | 5 | 26 | 2 | 26 | 9 | 17 | 4 | 14 |
| 11 » | 5 | 8 | 11 | 10 | 5 | 15 | 2 | 36 | 9 | 19 | 4 | 3 |
| 21 » | 5 | 54 | 11 | 30 | 5 | 6 | 2 | 55 | 9 | 23 | 3 | 52 |
| 1 Novembre | 6 | 51 | 11 | 55 | 5 | 0 | 2 | 17 | 9 | 27 | 3 | 38 |
| 11 » | 7 | 38 | 0 | 19 Sera | 5 | 1 | 3 | 38 | 9 | 31 | 3 | 25 |
| 21 » | 8 | 23 | 0 | 44 | 5 | 6 | 4 | 2 | 9 | 36 | 3 | 12 |
| 1 Dicembre | 9 | 1 | 1 | 11 | 5 | 21 | 4 | 26 | 9 | 43 | 3 | 1 |
| 11 » | 9 | 26 | 1 | 35 | 5 | 46 | 4 | 51 | 9 | 51 | 3 | 52 |
| 21 » | 9 | 20 | 1 | 43 | 6 | 6 | 6 | 26 | 10 | 1 | 2 | 47 |
| 31 » | 8 | 20 | 0 | 55 | 5 | 32 | 6 | 40 | 10 | 12 | 2 | 45 |

**ETI**

| MARTE | | | | | | GIOVE | | | | | | SATURNO | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | |
| h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m |
| 7 | 59 | 3 | 18 | 10 | 37 | 6 | 26 | 1 | 56 | 9 | 26 | 2 | 21 | 9 | 45 | 5 | 9 |
| Mattino | | Mattino | | Mattino | | Sera | | Matt. | | Mattino | | Sera | | Sera | | Mattino | |
| 7 | 9 | 2 | 32 | 9 | 56 | 5 | 40 | 1 | 11 | 8 | 42 | 1 | 40 | 9 | 4 | 4 | 28 |
| 6 | 12 | 1 | 41 | 9 | 11 | 4 | 54 | 0 | 27 | 8 | 0 | 0 | 59 | 8 | 23 | 3 | 47 |
| 5 | 4 | 0 | 41 | 8 | 18 | 3 | 58 | 11 | 33 | 7 | 8 | 0 | 15 | 7 | 39 | 3 | 3 |
| | | Sera | | | | | | Sera | | | | Mattino | | | | | |
| 3 | 58 | 11 | 40 | 7 | 23 | 3 | 13 | 10 | 49 | 6 | 25 | 11 | 36 | 7 | 0 | 2 | 24 |
| 3 | 2 | 10 | 48 | 6 | 34 | 2 | 28 | 19 | 5 | 5 | 42 | 10 | 57 | 6 | 22 | 1 | 47 |
| 2 | 19 | 10 | 5 | 5 | 51 | 1 | 49 | 9 | 27 | 5 | 5 | 10 | 23 | 5 | 48 | 1 | 13 |
| 1 | 37 | 9 | 22 | 5 | 7 | 1 | 8 | 8 | 46 | 4 | 24 | 9 | 45 | 5 | 11 | 0 | 37 |
| 1 | 1 | 8 | 44 | 4 | 27 | 0 | 28 | 8 | 6 | 3 | 44 | 9 | 8 | 4 | 35 | 0 | 2 |
| 0 | 29 | 8 | 8 | 3 | 46 | 11 | 46 | 7 | 24 | 3 | 2 | 8 | 28 | 3 | 56 | 11 | 24 |
| | | | | | | Mattino | | | | | | | | | | Sera | |
| 0 | 6 | 7 | 39 | 3 | 12 | 11 | 9 | 6 | 47 | 2 | 25 | 7 | 51 | 3 | 20 | 10 | 49 |
| 1 | 44 | 7 | 12 | 2 | 40 | 10 | 34 | 6 | 11 | 1 | 48 | 7 | 16 | 2 | 46 | 10 | 16 |
| 1 | 27 | 6 | 48 | 2 | 9 | 10 | 0 | 5 | 36 | 1 | 12 | 6 | 40 | 2 | 11 | 9 | 42 |
| 1 | 10 | 6 | 25 | 1 | 39 | 9 | 28 | 5 | 2 | 0 | 36 | 6 | 5 | 1 | 37 | 9 | 9 |
| 0 | 56 | 6 | 3 | 1 | 10 | 8 | 57 | 4 | 29 | 0 | 1 | 5 | 30 | 1 | 3 | 8 | 36 |
| 0 | 43 | 5 | 41 | 0 | 39 | 8 | 24 | 3 | 54 | 11 | 24 | 4 | 52 | 0 | 26 | 8 | 0 |
| | | | | | | | | | | Sera | | | | | | | |
| 0 | 33 | 5 | 21 | 0 | 11 | 7 | 54 | 3 | 22 | 10 | 50 | 4 | 17 | 11 | 52 | 7 | 27 |
| 0 | 23 | 5 | 2 | 11 | 43 | 7 | 24 | 2 | 50 | 10 | 16 | 3 | 42 | 11 | 18 | 6 | 54 |
| | | | | Sera | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 13 | 4 | 43 | 11 | 14 | 6 | 55 | 2 | 19 | 9 | 43 | 3 | 8 | 10 | 44 | 6 | 20 |
| 0 | 4 | 4 | 25 | 10 | 46 | 6 | 28 | 1 | 49 | 9 | 10 | 2 | 33 | 10 | 10 | 5 | 47 |
| 9 | 56 | 4 | 7 | 10 | 18 | 6 | 0 | 1 | 18 | 8 | 36 | 1 | 58 | 9 | 35 | 5 | 22 |
| 9 | 48 | 3 | 48 | 9 | 48 | 5 | 29 | 0 | 44 | 7 | 59 | 1 | 18 | 8 | 57 | 4 | 36 |
| 9 | 42 | 3 | 31 | 9 | 21 | 5 | 2 | 0 | 14 | 7 | 26 | 0 | 43 | 8 | 22 | 4 | 1 |
| 9 | 37 | 3 | 15 | 8 | 55 | 4 | 34 | 11 | 43 | 6 | 52 | 0 | 7 | 7 | 46 | 3 | 25 |
| | | | | | | | | Mattino | | | | | | | | | |
| 9 | 31 | 2 | 58 | 8 | 26 | 4 | 3 | 11 | 9 | 6 | 15 | 11 | 27 | 7 | 6 | 2 | 45 |
| | | | | | | | | | | | | Sera | | | | | |
| 9 | 26 | 2 | 43 | 8 | 0 | 3 | 34 | 10 | 38 | 5 | 42 | 10 | 50 | 6 | 29 | 2 | 8 |
| 9 | 23 | 2 | 30 | 7 | 36 | 3 | 7 | 10 | 7 | 5 | 7 | 10 | 12 | 5 | 51 | 1 | 30 |
| 9 | 21 | 2 | 17 | 7 | 13 | 2 | 38 | 9 | 35 | 4 | 32 | 9 | 34 | 5 | 13 | 0 | 52 |
| 9 | 19 | 2 | 6 | 6 | 52 | 2 | 8 | 9 | 3 | 3 | 58 | 8 | 54 | 4 | 33 | 0 | 12 |
| 9 | 16 | 1 | 55 | 6 | 32 | 1 | 38 | 8 | 30 | 3 | 22 | 8 | 14 | 3 | 53 | 11 | 32 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | Mattino | |
| 9 | 18 | 1 | 45 | 6 | 14 | 1 | 3 | 7 | 53 | 2 | 43 | 7 | 29 | 3 | 8 | 10 | 47 |
| 9 | 15 | 1 | 37 | 5 | 59 | 0 | 30 | 7 | 18 | 2 | 6 | 6 | 48 | 2 | 27 | 10 | 6 |
| 9 | 7 | 1 | 29 | 5 | 52 | 11 | 56 | 6 | 43 | 1 | 30 | 6 | 6 | 1 | 45 | 9 | 24 |
| | | | | | | Sera | | | | | | | | | | | |
| 9 | 8 | 1 | 23 | 5 | 40 | 11 | 21 | 6 | 7 | 0 | 53 | 5 | 23 | 1 | 2 | 8 | 41 |
| 9 | 2 | 1 | 17 | 5 | 34 | 10 | 44 | 5 | 29 | 0 | 14 | 4 | 41 | 0 | 19 | 7 | 47 |
| 8 | 53 | 1 | 11 | 5 | 31 | 10 | 6 | 4 | 51 | 11 | 36 | 3 | 54 | 11 | 32 | 7 | 10 |
| | | | | | | | | | | | | | | Sera | | | |
| 8 | 43 | 1 | 5 | 5 | 30 | 9 | 25 | 4 | 17 | 10 | 57 | 3 | 11 | 10 | 49 | 6 | 27 |

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Giugno.

La media delle pressioni barometriche osservate in questo mese è di 36, 22; inferiore di mm. 0. 31 alla media degli ultimi diciassette anni.

Le variazioni delle pressioni non furono frequenti, e quasi tutte assai lente. — Il seguente quadro ne contiene i massimi e minimi valori.

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese. | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 4 . . . . . | 39,05 | 6 . . . . . | 26,87 |
| 14 . . . . . | 41,83 | 19 . . . . . | 29,45 |
| 21 . . . . . | 39,57 | 22 . . . . . | 34,64 ; |

dal 22 in poi continuò a crescere lentamente ma in modo continuo, ed il giorno 30 raggiungeva il valore 41, 55.

La temperatura in questo mese non fu molto elevata, a causa delle frequenti pioggie e dei temporali; la media 19°, 6 delle temperature osservate è inferiore di 1°, 6 alla media di Giugno degli ultimi diciassette anni. — I valori estremi della temperatura furono 10°. 7 e 26°, 7 e si ebbero nei giorni 19 e 28.

Si ebbe pioggia in quindici giorni, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 174, 2.

Il seguente quadro dà la frequenza dei venti nelle singole direzioni:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 19 | 25 | 8 | 11 | 4 | 4 | 6 | 4 | 9 | 11 | 3 | 7 | 2 | 4 | 2 |

---

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Luglio.

La pressione barometrica in questo mese ha per valor medio 36, 27; inferiore di mm. 0, 55 alla media di Luglio degli ultimi diciassette anni.

Le variazioni della pressione in questo mese furono quasi tutte piccole.

Il quadro seguente racchiude i valori estremi:

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese. | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 1 . . . . . | 42,00 | 7 . . . . . | 34,89 |
| 9 . . . . . | 39,76 | 14 . . . . . | 30,52 |
| 17 . . . . . | 42,45 | 22 . . . . . | 30,33 |
| 26 . . . . . | 38,00 | 29 . . . . . | 33,31 |

Gli estremi della temperatura 29°, 3 e 10°, 9 si ebbero rispettivamente nei giorni 10 e 23, il valor medio della temperatura 22°, 4 è inferiore di 1°, 7 alla media di Luglio degli ultimi diciassette anni.

Undici furono i giorni piovosi, e l'acqua caduta misurò l'altezza di mm. 73, 3.

Il quadro seguente indica la frequenza dei venti:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 37 | 14 | 9 | 4 | 3 | 2 | 6 | 3 | 9 | 2 | 10 | 0 | 3 | 5 |

---

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese d'Agosto.

La media delle altezze barometriche osservate in questo mese è 38, 46; superiore di mm. 1, 78 alla media di Agosto degli ultimi diciassette anni.

Il quadro seguente contiene le altezze massime e minime:

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese. | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 5 . . . . . | 40,32 | 7 . . . . . | 32,62 |
| 8 . . . . . | 39,72 | 10 . . . . . | 33,06 |
| 13 . . . . . | 43,04 | 16 . . . . . | 31,79 |
| 19 . . . . . | 42,41 | | |

dal giorno 19 sino al 28 l'altezza barometrica variò pochissimo, mantenendosi sempre vicina a 40,0; nel giorno 29 cominciò a diminuire continuamente.

La media delle temperature osservate fu di 22°, 5: valore che differisce in meno dalla media di Agosto degli ultimi diciassette anni appena di 0°, 2.

Si ebbe pioggia in quattro giorni, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 31, 2.

Il quadro seguente dà il numero delle volte che spirò il vento nelle singole direzioni:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 12 | 35 | 11 | 12 | 7 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 |

---

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Settembre.

La pressione barometrica in questo mese ha per valor medio 36, 06, ed è inferiore di mm. 1, 89 alla media di Settembre degli ultimi diciassette anni.

Le oscillazioni della pressione non furono numerose, ma considerevoli per l'ampiezza.

| Giorni del mese. | Minimi. | Giorni del mese. | Massimi. |
|---|---|---|---|
| 2 . . . . . | 27,82 | 4 . . . . . | 37,32 |
| 5 . . . . . | 29,97 | 17 . . . . . | 42,14 |
| 22 . . . . . | 31,94 | 27 . . . . . | 40,68 |
| 30 . . . . . | 24,17 | | |

La temperatura in questo mese ha per valor medio 18°, 2, inferiore di solo 0°. 7 alla media degli ultimi diciassette anni. — I valori estremi 25°, 6 e 10°, 4 si ebbero nei giorni 23 e 29.

Dieci furono i giorni con pioggia, e si raccolsero nel pluviometro mm. 23, 7 d'acqua.

La tabella seguente dà la frequenza dei singoli venti:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 19 | 9 | 5 | 0 | 2 | 2 | 6 | 2 | 3 | 4 | 4 | 2 | 0 | 1 |

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Ottobre.

La pressione barometrica in questo mese variò considerevolmente nella prima decade, poco nella seconda ed in modo abbastanza considerevole nella terza decade.

Il suo valor medio 39, 04, supera di mm. 1, 70 quello di Ottobre degli ultimi diciassette anni.

Il seguente quadro contiene i valori massimi e minimi della pressione:

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese. | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 3 . . . . . | 35,43 | 4 . . . . . | 27,54 |
| 8 . . . . . | 50,74 | 12 . . . . . | 35,50 |
| 19 . . . . . | 43,45 | 22 . . . . . | 31,11 . |

dal 22 al 31 continuò la pressione a salire continuamente.

La media temperatura è di 12°, 5; inferiore solo di 0°, 4 alla media di Ottobre degli ultimi diciassette anni.

La temperatura minima 3°, 8 si ebbe nel giorno 5; la massima 18°, 3 nel giorno 13.

Si ebbe pioggia in otto giorni, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 28, 0.

Il quadro seguente dà il numero delle volte che spirò il vento nelle diverse direzioni:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 7 | 3 | 2 | 3 | 3 | 0 | 5 | 8 | 7 | 6 | 8 | 0 | 2 | 2 |

---

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Novembre.

Le pressioni barometriche osservate in questo mese hanno per media 39, 28, la quale supera la media di Novembre degli ultimi diciassette anni di mm. 2, 60.

In questo mese la pressione variò considerevolmente dal principio alla fine del mese.

Il quadro seguente ne contiene i valori estremi:

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese. | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 1 . . . . . | 45,22 | 4 . . . . . | 30,33 |
| 10 . . . . . | 37,18 | 13 . . . . . | 29,61 |
| 22 . . . . . | 46,06 | 26 . . . . . | 35,44 . |
| 29 . . . . . | 49,91 | | |

La temperatura media è di 6°, 3; superiore solo di 0°, 1 alla media di Novembre degli ultimi diciassette anni. — Le temperature estreme 14°, 2 e — 2°, 3 si ebbero: la prima nei giorni 9 ed 11, la seconda nel giorno 23.

I giorni piovosi furono quattro, e l'acqua raccolta misurò l'altezza di mm. 12, 9.

Nel giorno 27 cadde neve sulla collina.

Il quadro seguente dà la frequenza dei singoli venti:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 5 | 8 | 5 | 0 | 0 | 0 | 2 | 17 | 22 | 6 | 5 | 1 | 1 | 2 |

Gli altri lavori sopra accennati vedranno la luce nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia.

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio, condeputato coi Soci Cav. Prof. G. Bruno e Maggiore Prof. Siacci ad esaminare lo « *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* », del signor Dott. Corrado Segre, presentato nell'adunanza del 18 corrente, legge la seguente

# RELAZIONE

Se vi fosse ancora fra i cultori delle scienze matematiche chi reputasse illogica o inutile la teoria dei cosidetti spazî di un numero qualunque di dimensioni, questa Memoria del Dr Segre dovrebbe convincerlo del contrario. Poichè da un lato egli vedrebbe come la teoria degli spazî, oltre ad avere una grande importanza nel campo dell'analisi, si presti anche ad una trattazione sintetica, simile a quella della odierna Geometria proiettiva, benchè non si eserciti sempre sopra obbietti sensibili; e dall'altro lato vedrebbe come la teoria trovi immediata e feconda applicazione all'ordinario spazio geometrico, col vantaggio sommo di aggruppare intorno ad un concetto unico e generale svariate teorie particolari, che nella scienza eran venute formandosi lentamente l'una dopo l'altra. Certamente, la teoria generale degli spazî non sarebbe sorta, se questo lavorìo di lenta formazione di varie teorie particolari ed analoghe non avesse preceduto; ma ciò può aver diminuita la difficoltà di stabilire una teoria generale, e non può detrarre all'utilità di questa.

Daremo un rapido cenno della elaborata Memoria del Dott. Segre.

Dopo aver richiamato alcune nozioni generali sugli spazî a più dimensioni e sugli spazî lineari di diversi ordini in essi contenuti, l'A. nella 1a parte sviluppa la Geometria di una quadrica a $n-2$ dimensioni, vale a dire le proprietà di un sistema

di punti in uno spazio a $n-1$ dimensioni, le cui coordinate soddisfanno a una equazione quadratica. Questo argomento non era stato finora studiato di proposito dai geometri, e l'A. occupandosene ha reso loro un vero servigio.

Estendendo le proprietà delle ordinarie curve e superficie di 2° ordine, l'A. parla degli spazî lineari polari rispetto alla quadrica, ed esamina le successive specializzazioni della quadrica (analoghe ai coni, cilindri, coppie di piani nelle superficie di 2° ordine), notando come ogni quadrica specializzata possa ottenersi proiettando da uno spazio lineare una quadrica non specializzata di minor numero di dimensioni. Mediante la considerazione di gruppi di punti mutuamente coniugati rispetto alla quadrica, mostra che due quadriche sono proiettivamente identiche se specializzate lo stesso numero di volte, e però una quadrica ha un solo invariante (il discriminante). Passa l'A. ad assegnare i varî spazî lineari contenuti nella quadrica (analoghi alle rette dell'iperboloide) e le loro mutue relazioni. La dualità domina in queste ricerche, e quindi vi è parlato degli spazî lineari tangenti alla quadrica o inviluppanti la quadrica. Segue l'esposizione della proiezione detta *stereografica* del Klein in uno spazio lineare qualunque, e la sua applicazione a ritrovare dei numeri di spazi lineari, rettificando alcuni dati dal Prof. Veronese. È notato come siano molto diverse le relazioni fra i due sistemi di spazî lineari a $p$ dimensioni contenuti in una quadrica a $2p$ dimensioni, secondo che $p$ è pari o dispari; ed è dato un nuovo teorema sul numero dei punti comuni a due spazî algebrici qualunque a $p$ dimensioni contenute in quella quadrica, il quale contiene come particolari due teoremi di Chasles e Halphen. Chiude la 1ª parte la generazione delle quadriche con sistemi reciproci.

Nella 2ª parte l'A. studia i fasci di quadriche e le quartiche basi di essi, estendendo le proprietà proiettive dei fasci di curve e superficie di 2° ordine; e tiene conto delle quadriche specializzate del fascio. Trattando degli spazî lineari di $n-3$ dimensioni polari dei punti dello spazio di $n-1$ dimensioni rispetto al fascio di quadriche di $n-2$ dimensioni, rileva l'analogia delle loro proprietà con quelle dell'ordinario complesso tetraedrale ($n=4$). Indi passa agli spazî quadratici e lineari contenuti in una quartica, e alla genesi di questa mediante tali spazî.

A questo punto l'A. entra nella classificazione de' fasci di

quadriche e delle quartiche, mediante il metodo dei divisori elementari del WEIERSTRASS per la riduzione simultanea di due forme quadratiche a forma canonica. Qui l'A. non solo estende ricerche altrui particolari, ma riesce a dare delle regole per riconoscere il significato geometrico di ciascun dato sistema di divisori elementari, applicando le quali ai singoli casi ottiene la classificazione, mentre evita di trattar ciascun caso mediante la relativa forma canonica con calcoli lunghi e poco eleganti. Può così distinguere le quartiche e i fasci in tante specie, e trovare i rispettivi invarianti assoluti e il loro significato geometrico. Segue l'applicazione alle superficie di 2° ordine e curve gobbe di 4° ordine. Tratta pure l'A. delle schiere di quadriche e loro sviluppabili circoscritte, accennando le singolarità di esse. Da ultimo studia le quartiche esistenti su una quadrica fissa, e particolarmente quei sistemi di quartiche che chiama *omofocali*.

La Memoria, di cui abbiamo sommariamente accennato il contenuto, spicca per ampiezza ed originalità di concetto, per sicurezza ed acume d'intuizione, per eleganza di procedimento e per accurata esposizione. Essa reca una utile ed opportuna contribuzione agli studi geometrici.

E però la Commissione non esita a proporne la lettura alla Classe.

G. BRUNO
F. SIACCI
E. D'OVIDIO, *Relatore*.

Datasi quindi lettura della Memoria del signor Dott. Corrado SEGRE, questa viene approvata con regolare votazione per l'inserzione nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Comm. Prof. Michele LESSONA presenta e legge la seguente Memoria del signor Dott. Prof. Lorenzo CAMERANO,

# INTORNO
## ALLA
# NEOTENIA
## ED ALLO
# SVILUPPO DEGLI ANFIBI.

In un mio precedente lavoro *intorno alla vita branchiale degli Anfibi*, presentato a questa R. Accademia il giorno 10 Giugno corrente, e che ebbe l'onore di essere approvato per la stampa nella seduta del 24 Giugno stesso, io parlava a lungo de' vari singolarissimi fenomeni che si osservano nello sviluppo degli Anfibi durante il loro periodo larvale. Fra questi fenomeni viene in prima linea il perdurare di numerose specie di Anfibi sia anuri, sia urodeli per vari anni allo stato branchiale e il dare opera di alcune alla riproduzione in questo stadio.

Dall'epoca sopra menzionata ad oggi sono stati osservati da me stesso e da altri Autori parecchi fatti degni di essere tenuti in conto e di essere discussi, credo utile perciò a complemento della memoria stessa di riferire qui i fatti in questione.

Anzitutto, al capitolo bibliografico, debbono essere fatte le aggiunte seguenti:

DE FILIPPI. — Nota sopra il *Triton alpestris*. R. Accad. delle Scienze di Torino. Mem., Ser. 2ª, Vol. XXI, pag. LXV. (Comunicazione dei fatti relativi al *Triton alpestris* osservati in Formazza).

CARLO KOCH. — *Formen und Wandlungen der Ecaudaten Batrachier des Untermain und Lahngietes*. Francoforte, 1872.

F. LEYDIG. — *Die anuren Batrachier der deutschen fauna.* Bonn, 1877.

C. BRUCH. — *Beiträge zur Naturgeschichte und Classification nackten Amphibien.* Würzburger naturwissenschaftliche Zeitschrift. III, 1862.

EBNER. — *Ueber einen Triton cristatus Laur. mit bleibenden Kiemen.* Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereine in Gratz. 1877.

WIEDERSHEIM. — *Anatomie der Gymnophionen.* Jena 1879.

E. PFLÜGER. — *Das Ueberwintern der Kaulquappen der Knoblauchkröte.* Archiv. f. ges. Physiologie von W. Pflüger Vol. XXXI, 1883.

J. KOLLMANN. — *Das Ueberwintern von europäischen Frosch- und Triton Larve, und die Umwandlundung des Mexikanischen Axolotl.* Verhandl. d. Naturf. Gesel. in Basel., VII, 1883.

WIEDERSHEIM. — *Zur anatomie des Amblystoma Weismanni.* - Zeitschrift für wiss. Zool. Vol. XXXII.

Alla tavola degli Anfibi nei quali vennero sino ad ora osservati casi di prolungamento del periodo girinale è d'uopo fare le aggiunte seguenti:

| Anfibi europei | Località in cui si fecero le osservazioni | Autori ed Osservatori | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|---|
| *Triton alpestris* Laur. | Ormea - castello di Quarzina. | Sig. G. Peracca. | Il sig. G. Peracca osservò il 7 Settembre 1883 nella località qui di contro segnata, a circa 400 metri sul livello del mare, numerosi individui perfettamente adulti per la mole ed aventi ancora le branchie esterne. |
| Idem | Antilone, Andermatten in Val Formazza. | Prof. G. Spezia e Capitano G. Bazetta. | In queste località si osservarono anche in quest'anno gli stessi fatti già osservati dal De-Filippi e da me stesso negli anni precedenti, e a lungo descritti nel mio precedente lavoro *Sulla vita branchiale degli Anfibi.* |

| Anfibi europei | Luogo in cui si fecero le osservazioni | Autori ed Osservatori | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|---|
| *Triton cristatus* Laur. | Nella vita libera | Prof. Ebner. | Questo Autore osservò un individuo maschio di questa specie di 13 centimetri di lunghezza, sessualmente maturo il quale l'8 Luglio aveva ancora le branchie. |
| *Pelobates fuscus* Laur. | Bonn. | E. Pflüger. | Questo Autore osservò, nel 1883 in una pozzanghera presso Bonn, larve svernate di questa specie. |
| *Bombinator igneus* Laur. | Bonn. | E. Pflüger. | Osservò nell'Ottobre del 1882 larve di questa specie di ancora piccole dimensioni. L'estate e l'autunno del 1882 fu nella valle del Reno relativamente molto fredda, tanto che l'uva non giunse a maturità. |
| *Rana esculenta* Linn. | Bonn. | E. Pflüger. | Osservò nel 1802 girini di questa specie prolunganti il periodo larvale sino alla fine di Ottobre. |
| Idem | Basilea (Neudorfer). | I. Kollmann. | Osservò nel Maggio del 1883 ripetutamente larve gigantesche di questa specie aventi già le zampe posteriori ben sviluppate e che quindi certamente avevano svernato. |
| Idem | Laboratorio. | Sig. Peracca. | Trovò a Chivasso (Piemonte) girini di questa specie nell'Agosto: li tenne in acquario e osservò prolungarsi il periodo girinale sino alla fine di Dicembre. |
| Idem | Reaglie presso Torino. | S. P. Baraldi. | Osservò ai 25 Ottobre 1883 due girini coi rudimenti delle zampe posteriori. |
| *Rana muta* Laur. | Alpe di Veglia (Ossola). | Sig. Roggia e Capitano Bazetta. | Si osservarono girini di *Rana muta* non aventi ancora le zampe posteriori il giorno 8 Novembre 1883. Nella località, in discorso, a questa epoca aveva già nevicato e gelato. |

Coi fatti ora menzionati si viene ad aumentare il numero delle specie di Anfibi europei, nei quali si osservò il fenomeno del prolungamento del periodo larvale.

Dalla tavola sopra riferita e da quella analoga unita alla Memoria sulla *Vita branchiale degli Anfibi*, si vede che sopra dodici specie *sicure* di Anfibi anuri europei, sei presentano più o meno frequentemente il prolungamento della vita girinale.

Tra queste, il *Triton alpestris*, deve essere soprattutto notato per la frequenza dei casi di questa natura.

Negli Anfibi anuri, sopra almeno quindici specie ben certe europee, nove presentano fatti di prolungamento del periodo girinale. Fra gli Anuri deve essere menzionata per la frequenza nel presentare questo fenomeno, soprattutto la *Rana muta* Laur.

Il Kollmann (1) dà ai fenomeni in discorso il nome di *Neotenia* (νέος giovane e τείνω rimanere).

Io credo sia utile dare un nome a questi fatti ora che essi sono già abbastanza numerosi, e il di cui numero andrà certamente aumentando in seguito, quando l'osservazione dei naturalisti sarà rivolta ad essi, e sono disposto ad accettare la denominazione del Kollmann purchè si stabilisca bene che cosa con essa si vuole indicare.

Questa parola *neotenia* non deve essere presa nel suo significato letterale assoluto. Il rimanere giovani degli Anfibi, come già dimostrai nella Memoria *Sulla vita branchiale degli Anfibi* stessi, non è esatto che per qualche carattere e principalmente pel sistema respiratorio, per gli altri caratteri, e soprattutto pel sistema riproduttore, lo sviluppo procede generalmente innanzi e l'animale, e giunge al periodo di animale adulto, cioè atto a riprodursi.

Il fenomeno adunque della *neotenia*, a mio avviso, consiste

---

(1) Op. cit., pag. 391.

Mi si permetta di osservare, che la parola *neotenia* (essendo τείνω la seconda parte del composto, dovrebbe aversi piuttosto *neotonia*, o *neotasi*, o *neotasia*) non può significar altro che *tensione recente:* perchè il tema *neo* in greco non ha mai significato oggettivo ma attributivo quando è nella prima parte di un composto: e perchè τείνω non volle dir altro mai in greco che *stendersi*, propongo dunque piuttosto *emmenoneotesia*, che sarebbe il più preciso, o *ebososia* o *eboteresi*, che sarebbero più comodi; di cui il 1° vocabolo da ἐν-μένω in-rimango e νεοτήσιος giovanile; il 2° e il 3° da ἥβη gioventù e rispettivamente da τηρέω conservo e da τηρίω mantengo, conservo.

*nel conservare che fanno non poche specie di Anfibi alcuni caratteri dello stadio giovanile anche nello stato perfetto.*

Intesa in questo senso, e non credo si possa intendere in altro, la *neotenia* è un fenomeno abbastanza frequente non solo nel gruppo degli Anfibi, ma anche in altri gruppi del regno animale.

La *neotenia* non riguarda soltanto come è il caso negli Anfibi organi molto importanti come i respiratorî: ma può interessare anche parti meno vitali dell'animale, dando origine negli adulti a caratteri che vengono assunti nelle classificazioni frequentemente, come caratteri specifici e generici.

Io ho già avuto occasione, in un mio precedente lavoro (1), di menzionare qualche fatto di questa natura rispetto alla *Rana esculenta*. Io facevo osservare cioè che diverse varietà ben stabilite di *Rana esculenta* si possono ritenere prodotte dal perdurare nello stato adulto di alcuni caratteri proprii in generale dei giovani. Questi caratteri riguardano la colorazione, la mole, e certi tubercoli delle estremità.

Anche il Lataste (2) accenna rispetto al *Discoglossus pictus* a qualche cosa di analogo.

Altri fatti della stessa natura è facile di verificare in altri animali, Ofidi, Sauri, ecc.

Il fatto stesso del perdurare frequentissimamente nelle femmine dei caratteri dei giovani, mentre i maschi si differenziano talvolta moltissimo, può considerarsi anch'esso come un caso di *neotenia*.

Questi fatti sono anche frequenti negli invertebrati e soprattutto fra gli insetti.

Sono noti fra questi ultimi i relativamente numerosi casi di femmine le quali non raggiungono la forma alata e mantengono per tutta la vita la forma larvale. Negli insetti si verifica pure questo fatto degno di essere tenuto in conto per la spiegazione del fenomeno, vale a dire che le femmine che presentano la *neotenia* appartengono a specie vicinissime di altre, che presentano uno sviluppo normale, ad esempio il gruppo delle Luciole e delle Lampiridi, fra i Coleotteri, quello delle *Eterogenis*, fra i Lepidotteri, ecc.

---

(1) *Monografia degli Anfibi anuri italiani.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Ser. II, Vol. XXXV, 1883.

(2) *Étude sur le discoglossa.* Act. de la Soc. Linn. de Bordeaux, Vol. XXXIII, 1879.

Delimitato così il concetto della *neotenia*, si possono ricercare le cause di questo fenomeno.

Le cause della *neotenia* sono molteplici e complesse, e siamo ben lungi dall'averne oggi un'idea chiara. Certamente che l'adattamento, come io stesso ebbi a dire (1), e come dissero Pflüger (2) ed altri, vi entra per una gran parte; ma ciò non spiega ancora gran che, poichè anche il meccanismo dell'adattamento è oggi molto imperfettamente conosciuto.

Io rimando il lettore agli argomenti ed alle conclusioni da me esposte alla fine della Memoria *Sulla vita branchiale degli Anfibi*, conclusioni che i nuovi fatti sopra esposti confermano.

Io non posso essere d'accordo intieramente col Kollmann (3) per quanto riguarda il modo di interpretare il metamorfizzarsi e il non metamorfizzarsi dell'*Axolotl*, e ciò soprattutto dopo le osservazioni di Josè M. Velasco sugli *Axolotls* studiati sul luogo al Messico (4), le quali spargono molta luce sulla natura del fenomeno e fanno vedere come l'adattamento alle condizioni locali ne sia una delle cause determinanti principali.

In quanto poi alla questione delle metamorfisi regressive per spiegare i fatti di *neotenia* in questione relativi agli Anfibi io non posso neppure essere d'accordo col Kollmann, e ciò perchè mi pare difficile poter spiegare altrimenti i numerosi e relativamente sviluppati organi rudimentali proprii di uno stadio di sviluppo terragnolo e quindi più elevato che si trovano anche nelle forme più acquatiche, come il Proteo, ecc.

Anche queste metamorfosi regressive hanno tuttavia la loro origine prima nella necessità di adattarsi alle condizioni dell'ambiente, e credo accettabile l'idea del Pflüger (5).

« Wahrsscheinlich wird der Process bei *Pelobates fuscus* schliesslich ebenso verlaufen. Milionen von Pelobateslawen gehen jeden Winter in Deutschland zu Grunde, weil der Sommer zu Kurz ist. Nur eine kleine Zahl überstehl die Kalte Jahreszeit. Wenn diese Wenigen Individuen später durch die zeugung mit

---

(1) Op. cit.

(2) Op. cit.

(3) Op. cit.

(4) *Anotaciones y observaciones al trabajo de* S. Weismann *sobre la transformacion del Axolots mexicano en Amblistoma* — La Naturalezza, V, p. 38, 1882.

(5) Op. cit.

den wiel zahlreicheren sich vermischen, deren Larvenstadium nur einen Sommer in Auspruch genommen hat, so wird die Aerbe Natur der eesteren sich nur sehr abgeschwächt reserben. Aber der Process arbeitet stetig und wird schliesslich zum Ziele führen. Er lehrt uns, welche unermessliche Zahl von Individuen im Jugendzustand zu Grunde gehen muss, um die Aupassung an das Klima zu ermöglichen ».

Negli Anfibi, come cercai di dimostrare nella Memoria *Sulla vita branchiale degli Anfibi*, la *neotenia* non segna, soprattutto negli Anfibi urodeli, un arresto di sviluppo, poichè gli organi essenziali e caratteristici dello stato adulto e perfetto, cioè gli organi riproduttori non solamente continuano a svilupparsi, ma impiegano presso a poco lo stesso tempo come negli individui normali, e soprattutto poi entrano come in questi in funzione. La *neotenia* in questo caso consiste puramente nel conservare che fa l'animale il carattere giovanile delle branchie. Ora ripeto si è l'adattamento che determina questo fatto.

A misura che la *neotenia* si fissa, per dir così, in una specie è evidente che avverranno modificazioni più o meno notevoli anche in altri organi diversi dai *neotenici*. Così, ad esempio, la vita acquatica prolungata indurrà modificazioni non solo nelle branchie, ma anche negli organi locomotori, nel colore, nella forma generale del corpo ecc., ed ecco come a poco a poco passando l'animale, dalla forma terragnola, alla forma schiettamente acquatica, rifaccia, per modo di dire, con una metamorfosi regrediente, gli stadii già percorsi nel suo sviluppo ontegenetico.

La *neotenia*, in altre parole prodottasi per adattamento della specie coll'ambiente, può essere causa in molti casi di metamorfosi regressive.

Anche nei casi di insetti sopra citati si hanno fatti che concordano con ciò che ora si è detto. Nelle *Eterogenis*, ad esempio, fra i lepidotteri la *neotenia* ha prodotto il perdurare della forma larvale della femmina in molte specie anche allo stato adulto, la metamorfosi regrediente, che ne seguì, indusse l'atrofia degli organi locomotori e la perdita quasi completa del movimento.

Negli Anfibi urodeli, ripeto, non mi pare si possa nel fenomeno della *neotenia* intendere un *arresto* di sviluppo dell'animale.

Negli Anfibi anuri la cosa è un po' più difficile da spiegarsi, poichè i fatti, che si posseggono ora, non ci concedono ancora conclusioni sicure. Anche qui tuttavia, come risulta dal caso di

un lungo perdurare di girini *Rana muta* da me riferito nella Memoria ripetutamente citata. lo sviluppo generale dell'animale procede innanzi e non è impossibile che si possano avere anche individui branchiati di Anfibi anuri sessualmente maturi.

In una categoria di fatti *neotenici* tuttavia mi pare che vi possa racchiudere il concetto di arresto di sviluppo, e questi sono i caratteri sessuali secondari delle femmine di molte specie: i caratteri che, come è noto, sono in gran parte quelle dei giovani di ambo i sessi.

La femmina, in questi casi segna, per dir così, uno stadio di sviluppo inferiore a quello dei maschi. E ciò mi pare tanto più sostenibile in quanto che è stato frequentemente osservato il fatto di femmine, le quali, invecchiando, perdono i caratteri dei giovani, e tendono ad acquistare i caratteri dei maschi.

Io distribuirei i fenomeni *neotenici* nel modo seguente, senza dare tuttavia a queste divisioni un valore assoluto.

| | | |
|---|---|---|
| **Neotenia** | L'animale si sviluppa progressivamente; giunge allo stato adulto e si riproduce conservando qualche carattere dello stadio giovanile. Ad esempio gli *Anfibi urodeli*. | Non si ha un vero arresto di sviluppo. Avvengono spesso modificazioni profonde in seguito a metamorfosi regressive. Ad esempio, le forme schiettamente acquatiche fra gli Anfibi urodeli attuali. |
| | L'animale giunge normalmente allo stato adulto conservando molti caratteri giovanili. Ad esempio, le differenze sessuali secondarie delle femmine di molte specie. | Qui si può considerare come un arresto di sviluppo, il quale talvolta coll' invecchiare delle femmine cessa, e l'animale progredisce acquistando qualche carattere del maschio. |

Ritornando ora al discorso risguardante le cause probabili della *neotenia* negli Anfibi, io desidero di chiamare l'attenzione del lettore in primo luogo sull'azione della temperatura e soprattutto sull'azione del freddo, come causa determinante dei fenomeni stessi. A quest'uopo giova por mente al fatto sopra menzionato del *Triton alpestris* adulto e branchiato, il quale venne osservato ultimamente dal signor Peracca presso ad Ormea.

Il laghetto contenente i Tritoni alpestri adulti e branchiati non è molto grande ed ha la profondità media di una sessantina di centimetri: variando questa alquanto, secondo gli anni, esso è poco ricco di piante acquatiche ed ha fondo torboso. La località ove esso si trova è a 400 metri circa sul livello del suolo ed è molto calda. Questo fatto unito a quello già osser-

vato dal Prof. Gasco e da me riferito nella Memoria *Sulla vita branchiale degli Anfibi*, ed anche a quelli osservati dal Velasco al Messico intorno agli *Axolotl* dimostrano che la *neotenia* in questi casi non si deve solo alla temperatura fredda e alla precocità della stagione rigida. L'essiccarsi regolare in una determinata stagione degli stagni è pure una causa determinante della *neotenia*.

Un'altra causa determinante la *neotenia* negli Anfibi, soprattutto urodeli ed in particolar luogo nel *Triton alpestris*, che è la specie che più frequentemente presenta questo fenomeno fra noi, si deve ricercare nelle condizioni di vita dei luoghi dove essa vive.

Spesso, come io ho osservato ripetutamente nei laghetti Alpini, il *Triton alpestris* è il solo abitatore vertebrato dei laghetti stessi. Qualche volta vi si trova insieme anche la *Rana muta*: ma questa non costituisce pel *Triton* un nemico. In questi laghetti il *Triton alpestris* non trova nemici serii: mentre invece ne trova sul terreno asciutto dove vi sono vipere: piccoli mammiferi carnivori, uccelli, ecc., i quali, tutti nella scarsità di cibo che caratterizza l'alta regione alpina, non sdegnano di nutrirsi anche di Tritoni e di Salamanche; le vipere soprattutto.

Questo fatto da una parte e l'abbondanza di cibo nell'acqua, cibo costituito da molti insetti e spesso anche da uova e da girini di *Rana muta*, dei quali, come ebbi occasione ripetutamente di osservare, i Tritoni in generale sono ghiottissimi, fanno sì che le migliori condizioni di vita pel *Triton alpestris* si trovano in molti luoghi nell'acqua anzichè sul terreno asciutto. A poco a poco perciò la scelta naturale produce una tendenza a prolungare la vita acquatica, la quale va man mano facendosi più spiccata; di qui la *neotenia* e gli altri fenomeni già menzionati.

Una prova di quanto dico si può avere nella celebre località di Val Formazza, dove il De Filippi osservò per la prima volta il perdurare delle branchie nello stato adulto nel *Triton alpestris*, vale a dire nel lago di Antilone. In questo lago i *Triton alpestris* sono nell'acqua straordinariamente abbondanti: mentre sono rarissimi sulle sponde all'asciutto. Intorno al lago sono invece abbondanti varie specie di Ofidi e, fra gli altri, le vipere.

Questa località, quantunque alta 1600 metri sul livello del mare, è tuttavia relativamente calda, e la buona stagione vi dura

per un tempo più che sufficiente, perchè i *Triton alpestris* possano svilupparsi normalmente.

Inoltre, l'osservarsi la *neotenia* nei *Triton* di una località, e non in quelli di una località non molto lontana e nelle stesse condizioni, di abbondanza d'acqua, di temperatura, di clima, è un argomento in favore dell'ipotesi sopra menzionata.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, condeputato coi Soci signor Maggiore F. SIACCI e Comm. Prof. E. D'OVIDIO ad esaminare il lavoro dell'Ing. G. de BERARDINIS, dell'Istituto geografico militare di Firenze, « *Sullo scostamento della linea geodetica dalle sezioni normali di una superficie* », presentato nell'adunanza del 18 corrente, legge la seguente

# RELAZIONE

## I.

Nelle grandi operazioni della Geodesia, il collegamento dei punti di primo ordine sullo sferoide terrestre, si fa con archi di linee geodetiche; mentre coi piani verticali, in cui si collima sul terreno, perpendicolari alla superficie dello sferoide, si determinano le sezioni normali reciproche, passanti per quei punti. Gli archi di queste sezioni, compresi fra i punti anzidetti, formano sullo sferoide, delle reti di archi di ellisse, ed alle medesime si sostituisce la rete geodetica, la quale è unica, perchè ciascuno dei suoi lati è la linea più breve fra le sue estremità, sulla superficie.

Ogni arco di geodetica può essere compreso fra i corrispondenti due archi di ellisse reciproci, può averli entrambi da una stessa parte, e può esserne intersecato. Questa discussione intorno alle relazioni di lunghezza e di posizione dell'arco geodetico e dei due archi di ellisse delle corrispondenti sezioni normali reciproche, può solamente farsi coll'aiuto di formole, le quali sono piuttosto semplici, ma tali, che la loro ricerca richiede molti calcoli; e la mole di questi calcoli varia grandemente, secondo che si segue una via od un'altra, di quelle che possono condurre allo scopo. Matematici insigni hanno pubblicato molti la-

vori, dai quali si può attingere; segnatamente in Francia, dove Clairaut iniziò lo studio delle geodetiche e Legendre, Laplace, Poisson, ecc. ne trattarono; ed in Germania dove gli studi geodetici sono stati perfezionati ed ampliati da Bessel, Gauss, Bayer, ecc.

## II.

Il procedimento dell'Autore della Memoria, intorno alla quale riferiamo, è generale e molto semplice. Nel *primo articolo*, egli considera un arco $AB$ di geodetica sopra una superficie qualunque, ed esprime le due coordinate cartesiane $y$ e $z$, della curva, in serie ordinata secondo le potenze crescenti della terza $x$. Per semplificare nel miglior modo queste due serie, annullandone i termini costanti, e quelli di primo grado, sceglie il piano coordinato $xy$ tangente alla superficie nell'estremità $A$ dell'arco geodetico $AB$, e gli altri due normali alla superficie nello stesso punto, con $xz$ tangente, ed $yz$ perpendicolare ad $AB$ in $A$. Si serve della proprietà della geodetica, che in ogni punto di essa il suo piano osculatore contiene la normale alla superficie in quel punto, per dedurne l'equazione differenziale di secondo ordine della curva; colla quale e coll'equazione della superficie, trova, con derivazioni successive, le espressioni dei coefficienti delle serie menzionate, che danno $y$ e $z$ in funzione di $x$ fino al quinto ordine incluso. Scritto, in seguito, il differenziale $d\sigma$ dell'arco di geodetica, coll'integrazione trova $\sigma$ per serie in funzione di $x$; la inverte per avere $x$ in funzione di $\sigma$, ed ottiene finalmente anche $y$ e $z$ in funzione di quest'arco. Le trovate espressioni in serie fino al quinto ordine, delle suddette coordinate cartesiane di $B$ rispetto ad $A$, sono nuove ed assai convenienti per la ricerca.

Nel *secondo articolo*, chiamate $X$, $Y$, $Z$ le coordinate di un punto della superficie, dalla equazione in serie che dà $Z$ in funzione di $X$ ed $Y$, e dall'equazione del piano normale alla superficie in $A$ e passante per $B$, che pel sistema di assi adottato è semplicemente $\frac{Y}{X}=\frac{y}{z}$, deduce il differenziale $\sigma'$ della sezione

normale, in funzione della sola $X$, ed integrando per serie, fra 0 ed $x$, trova la lunghezza $\sigma'$ dell'arco di tal sezione in funzione di $x$, e poi di $\sigma$. E la differenza $\sigma' - \sigma$ risulta solamente di quinto ordine.

Nel *terzo articolo*, in modo anche estremamente semplice, come è facile immaginare, per la buona scelta degli assi, l'Autore deduce fino al terzo ordine incluso, in funzione di $\sigma$, le espressioni in serie dei piccoli angoli $\delta$ e $\gamma$, che la tangente alla geodetica in $A$, fa colle tangenti, nello stesso punto, alle due sezioni normali, ossia alla diretta, il cui piano è normale alla superficie in $A$ e passa per $B$, ed alla reciproca il cui piano è normale alla superficie in $B$ e passa per $A$. In entrambe le espressioni, i primi termini, sono di secondo ordine; e come è noto, se la superficie considerata è quella della terra, il primo dei due angoli, ossia $\delta$, è la differenza degli azimuti, sull'orizzonte di $A$, della geodetica e della sezione normale in $A$.

Qui finisce la parte generale della Memoria.

Nel *quarto articolo*, l'Autore servendosi come dice in principio, dei recenti lavori del D'Andrae (*), applica i risultamenti ottenuti negli articoli precedenti, all'ellissoide di rotazione intorno all'asse minore. Ed è interessante il modo con cui procede e discute le circostanze, accennate in principio di questa relazione, relative alla lunghezza ed alla posizione dell'arco di geodetica e dei due relativi archi di ellisse delle corrispondenti sezioni normali reciproche.

La Memoria potrebbe essere terminata qui convenientemente. Ma l'Autore credette bene di aggiungere ancora due articoli.

Nel *quinto articolo* deduce dalle sue formole quelle trovate, in modo meno semplice, e con una approssimazione minore, da Weingarten (**).

Nel *sesto ed ultimo articolo* l'Autore svolge brevemente il metodo con cui Weingarten dedusse le sue formole, ed eseguisce

---

(*) Danese del quale si trovano dei lavori interessanti, anche nelle *Astronomische Nachrichten*.

(**) Prussiano, che ha pure dei lavori importanti, presentati da Bayer, e pubblicati nel citato giornale scientifico.

i calcoli laboriosi, che sono necessarii per la ricerca, con quel metodo, del termine di terzo ordine rispetto alla lunghezza dell'arco geodetico, nella su mentovata differenza $\delta$ degli azimuti, della geodetica e della sezione normale diretta.

Alcune mende ed alcuni errori, commessi probabilmente trascrivendo, si trovano, in verità, nel manoscritto della Memoria. Ma ciò non toglie che i Commissarii ne propongano, d'accordo, la lettura alla Classe, per la stampa nei volumi dell'Accademia.

A. Dorna, *Relatore*
F. Siacci.
E. D'Ovidio.

Dopo averne udita la lettura, la Classe approva il lavoro del sig. Ingegnere G. de Berardinis per la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta in nome del Socio corrispondente Prof. Friedel, una Memoria stampata, col titolo « *Sur la reproduction de l'albite par voie aqueuse:* par MM. C. Friedel et E. Sarasin ».

Il Prof. Cossa fa rilevare l' importanza delle ricerche del Friedel e del Sarasin, colle quali gli autori sono riusciti ad ottenere per via umida uno dei minerali più importanti e che finora fu ottenuto solamente per via secca.

**Adunanza del 16 Dicembre 1883.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. P. RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio Cav. Prof. Galileo FERRARIS presenta e legge la seguente Memoria del signor Nicodemo JADANZA, Prof. di Geodesia nella R. Università di Torino.

# SUI SISTEMI DIOTTRICI COMPOSTI.

## 1°

Lo scopo che ci proponiamo in questa nota è di trovare alcune formole generali relative ai sistemi diottrici composti, dalle quali si dedurranno facilmente alcuni teoremi importantissimi ed in parte nuovi ad essi relativi (*).

Indichiamo con

$$N^0 . N' . . . . . N^*$$

i vertici e le ascisse dei vertici delle superficie sferiche rifrangenti che compongono un dato sistema diottrico centrato, e poniamo, come è d'uso:

$$u^0 = \frac{n^0 - n'}{r^0} , \quad u' = \frac{n' - n''}{r'} \quad . . . . . \quad u^* = \frac{n^{(\mu)} - n^*}{r^{(\mu)}} ,$$

$$t' = \frac{N' - N^0}{n'} , \quad t'' = \frac{N'' - N'}{n''} \quad . . . . . \quad t^* = \frac{N^* - N^{(\mu-1)}}{n^{(\mu)}} .$$

dove $r^0$, $r'$ . . . sono i raggi delle successive superficie sferiche ed $n^0$, . . $n^*$ gl'indici assoluti di rifrazione dei mezzi successivi.

È noto che, ponendo

$$k = \begin{vmatrix} u^0 & -1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u' & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t'' & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & t^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u^* \end{vmatrix} ;$$

(1) La maggior parte di questi teoremi è nota. Scopo nostro è di far vedere che si possono tutti dedurre da una sola formola.

ed $$l=\frac{\partial k}{\partial u^\circ}\ ;\qquad g=\frac{\partial k}{\partial u^*}\ ;\qquad h=\frac{\partial^2 k}{\partial u^\circ \partial u^*}=\frac{\partial l}{\partial u^*}=\frac{\partial g}{\partial u^\circ}$$

le coordinate dei due *punti principali* e dei due *fuochi* principali si esprimono mediante le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} E &= N^\circ - n^\circ \frac{1-l}{k} \\ E^* &= N^* + n^* \frac{1-g}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

$$\left.\begin{aligned} F &= N^\circ + n^\circ \frac{l}{k} \\ F^* &= N^* - n^* \frac{g}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2),$$

e se con $N^{**}$ indichiamo il *punto oculare* (*ort des auges* di Gauss) e la sua ascissa, si ha pure

$$\left.\begin{aligned} N^{**} &= N^* - \frac{h}{l} n^* \\ N^{**} &= F^* + \frac{n^*}{lk} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

ovvero

Se $\xi$, $\xi^*$ sono le ascisse di due punti coniugati qualunque, e

$$\varphi = -\frac{n^\circ}{k}\ ,\qquad \varphi^* = -\frac{n^*}{k}$$

sono la prima e la seconda distanza focale del sistema diottrico dato, si ha la relazione

$$(\xi^* - F^*)(F - \xi) = \frac{n^\circ n^*}{k^2} = \varphi\varphi^* \qquad \ldots\ldots (4).$$

## 2°

Qualunque sistema diottrico può sempre immaginarsi decomposto in due; in questo caso daremo l'indice 1 a tutto ciò che si riferisce al primo sistema componente e l'indice 2 a ciò che si riferisce al secondo.

Così p. e. indicheremo con

$$N_1^{\circ}, \quad N_1' \ldots N_1^*; \qquad E_1, \quad E_1^*; \qquad F_1, \quad F_1^* \ldots;$$

i vertici e le ascisse dei vertici delle superficie rifrangenti che compongono il primo sistema, i punti principali, i fuochi principali, ecc., e con

$$N_2^{\circ}, \quad N_2' \ldots N_2^*; \qquad E_2, \quad E_2^*; \qquad F_2, \quad F_2^* \ldots;$$

le quantità analoghe pel secondo sistema.

Indicheremo pure con $n^{\circ}$, $n_1^*$ gl'indici assoluti di rifrazione del primo ed ultimo mezzo e con $n^*$ quello del mezzo comune ai due sistemi componenti.

La ricerca dei punti cardinali di un sistema composto in funzione dei punti cardinali dei sistemi componenti dipende esclusivamente dalla relazione che esiste tra il determinante $k$ del sistema composto e i determinanti $k_1$, $k_2$ corrispondenti ai due sistemi componenti. Codesta relazione fu da noi data in un'altra nota (*), ed è la seguente:

$$k = k_1 l_2 + k_2 g_1 + k_1 k_2 \frac{N_2^{\circ} - N_1^*}{n^*}$$

donde si deducono le altre

$$\left.\begin{aligned} l &= l_1 l_2 + h_1 k_2 + l_1 k_2 \frac{N_2^{\circ} - N_1^*}{n^*} \\ g &= g_1 g_2 + h_2 k_1 + g_2 k_1 \frac{N_2^{\circ} - N_1^*}{n^*} \\ h &= l_1 h_2 + h_1 g_2 + l_1 g_2 \frac{N_2^{\circ} - N_1^*}{n^*} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5).$$

Le formole precedenti possono essere semplificate nel seguente modo. Dalle equazioni

$$F_1^* = N_1^* - n^* \frac{g_1}{k_1}, \qquad F_2 = N_2^{\circ} + n^* \frac{l_2}{k_2},$$

si deduce

$$\frac{N_2^{\circ} - N_1^*}{n^*} = \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - \frac{l_2}{k_2} - \frac{g_1}{k_1},$$

(*) *Sopra un determinante gobbo, ecc.*; Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVII, 1882.

e quindi si avrà

$$k = \frac{k_1 k_2}{n^*}(F_2 - F_1^*) \,. \qquad \ldots\ldots (6).$$

Analogamente ricordando che

$$l_1 g_1 - h_1 k_1 = 1 \,; \qquad l_2 g_2 - h_2 k_2 = 1 \,.$$

si otterrà

$$\left.\begin{aligned} l &= l_1 k_2 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - \frac{k_2}{k_1} \\ g &= g_2 k_1 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - \frac{k_1}{k_2} \\ h &= l_1 g_2 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - \frac{l_1}{k_2} - \frac{g_2}{k_1} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (7).$$

Per ottenere le coordinate dei punti cardinali del sistema composto è necessario calcolare i valori delle quantità

$$\frac{l}{k} \,. \qquad \frac{g}{k} \,.$$

e questi valori si otterranno facilmente dalle (6) e (7), poichè si ha;

$$\frac{l}{k} = \frac{l_1}{k_1} - \frac{n^*}{k_1^2 (F_2 - F_1^*)} \,,$$

e quindi

$$N_1^\circ + \frac{n^\circ l}{k} = N_1^\circ + \frac{n^\circ l_1}{k_1} - \frac{n^\circ n^*}{k_1^2 (F_2 - F_1^*)} \,,$$

ovvero per le (2)

$$F = F_1 - \frac{n^\circ n^*}{k_1^2 (F_2 - F_1^*)} \qquad \ldots\ldots (8) \,,$$

donde

$$(F_1 - F)(F_2 - F_1^*) = \frac{n^\circ n^*}{k_1^2} = \varphi_1 \varphi_1^* \qquad \ldots\ldots (9).$$

La quale mostra chiaramente, che: *Il primo fuoco principale di un sistema diottrico composto di due altri sistemi è il coniugato del primo fuoco principale del secondo sistema, rispetto al primo sistema componente.*

Analogamente si ottiene:

$$\frac{g}{k}=\frac{g_2}{k_2}-\frac{n^*}{k_2^2(F_2-F_1^*)} ,$$

e quindi

$$\frac{n_1^* g}{k}=n_1^*\frac{g_2}{k_2}-\frac{n^* n_1^*}{k_2^2(F_2-F_1^*)} ,$$

$$N_2^*-\frac{n_1^* g}{k}=N_2^*-\frac{n_1^* g_2}{k_1}+\frac{n^* n_1^*}{k_2^2(F_2-F_1^*)}$$

donde

$$F^*=F_2^*+\frac{n^* n_1^*}{k_2^2(F_2-F_1^*)} \quad \ldots\ldots (10),$$

e

$$(F^*-F_2^*)(F_2-F_1^*)=\frac{n^* n_1^*}{k_2^2}=\varphi_2\varphi_2^* \ldots\ldots (11);$$

ossia: *Il secondo fuoco principale di un sistema composto è il coniugato del secondo fuoco principale del primo sistema, rispetto al secondo sistema componente.*

Le (1) possono anche essere scritte così:

$$E=F-\frac{n^0}{k} ; \qquad E^*=F^*+\frac{n^*}{k} :$$

la prima delle quali, tenendo conto delle (6) e (8), dà pel caso di un sistema composto

$$E=F_1-\frac{n^0 n^*}{k_1^2(F_2-F_1^*)}-\frac{n^0 n^*}{k_1 k_2(F_2-F_1^*)} \quad \ldots (12).$$

ovvero

$$F_1-E=\frac{n^0 n^*}{k_1(F_2-F_1^*)}\cdot\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} ,$$

o anche

$$(F_1-E)(F_2-F_1^*)\frac{k_2}{k_1+k_2}=\frac{n^0 n^*}{k_1^2} .$$

Ma si ha

$$(F_2-F_1^*)\frac{k_2}{k_1+k_2}=\frac{F_2 k_2+F_1^* k_1}{k_1+k_2}-F_1^* ,$$

dunque sarà

$$(F_1 - E)\left(\frac{F_2 k_2 + F_1^* k_1}{k_1 + k_2} - F_1^*\right) = \frac{n^\circ n^*}{k_1^2} = \varphi_1 \varphi_1^* \quad \ldots (13).$$

Allo stesso modo, poichè

$$E^* = F^* + \frac{n_1^*}{k}$$

si otterrà

$$E^* = F_2^* + \frac{n^* n_1^*}{k_2^2 (F_2 - F_1^*)} + \frac{n_1^* n^*}{k_1 k_2 (F_2 - F_1^*)} \quad \ldots (14);$$

donde

$$E^* - F_1^* = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2 (F_2 - F_1^*)} - \frac{k_1 + k_2}{k_1}$$

ovvero

$$(E^* - F_2^*)(F_2 - F_1^*)\frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2} :$$

ed osservando che

$$(F_2 - F_1^*)\frac{k_1}{k_1 + k_2} = F_2 - \frac{F_1^* k_1 + F_2 k_2}{k_1 + k_2}$$

si avrà

$$(E^* - F_2^*)\left(F_2 - \frac{F_2 k_2 + F_1^* k_1}{k_1 + k_2}\right) = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2} = \varphi_2 \varphi_2^* \quad \ldots (15).$$

Le equazioni (13) e (15) mostrano chiaramente che *il punto la cui ascissa è*

$$0 = \frac{F_2 k_2 + F_1^* k_1}{k_1 + k_2} \quad \ldots\ldots (16);$$

*è ad un tempo il coniugato del primo punto principale del sistema composto rispetto al primo sistema componente, e del secondo punto principale del sistema composto rispetto al secondo sistema componente.*

Il punto $O$ lo chiameremo CENTRO OTTICO del sistema composto, ed il piano condotto per esso normalmente all'asse del sistema si chiamerà PIANO CENTRALE.

Se nella (16) esprimiamo $F_1^*$ ed $F_2^*$ in funzione di $E_1^*$ ed $E_2$ otterremo

$$0 = \frac{E_1^* k_1 + E_2 k_2}{k_1 + k_2} \quad \ldots\ldots (17);$$

ovvero

$$0 = \frac{E_1^* \varphi_2 + E_2 \varphi_1^*}{\varphi_1^* + \varphi_2} \qquad \ldots\ldots (18);$$

e quindi:

*Il centro ottico di un sistema composto si troverà dividendo il segmento compreso tra il secondo punto principale del primo sistema ed il primo punto principale del secondo sistema (ovvero il segmento compreso tra il secondo fuoco principale del primo sistema ed il primo fuoco principale del secondo sistema) nel rapporto della seconda distanza focale del primo sistema alla prima distanza focale del secondo sistema.*

## 3°

Le formole trovate precedentemente dànno immediatamente le coordinate dei punti cardinali di un sistema composto in funzione di quantità note relative ai sistemi componenti. Moltiplicando primo e secondo membro della (6) prima per $-n^0$, poi per $-n_1^*$ si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 \varphi_2}{F_1^* - F_2} \\ \varphi^* &= \frac{\varphi_1^* \varphi_2^*}{F_1^* - F_2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (19),$$

le quali dànno le distanze focali principali del sistema composto.

La (8) e la (10) dànno senz'altro

$$\left.\begin{aligned} F &= F_1 + \frac{\varphi_1 \varphi_1^*}{F_1^* - F_2} \\ F^* &= F_2^* - \frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{F_1^* - F_2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (20).$$

e le (12) e (14)

$$\left.\begin{aligned} E &= F_1 + \varphi_1 \frac{\varphi_1^* + \varphi_2}{F_1^* - F_2} \\ E^* &= F_2^* - \varphi_2^* \frac{\varphi_1^* + \varphi_2}{F_1^* - F_2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (21).$$

Al denominatore comune $F_1^* - F_2$ nelle formole precedenti si può sostituire la quantità $\varphi_1^* + \varphi_2 - \Delta$ ad esso equivalente.

$\Delta$ essendo eguale ad $E_2 - E_1^*$, cioè alla distanza tra il secondo punto principale del primo sistema ed il primo punto principale del secondo.

Introducendo i punti principali dei sistemi componenti le (20) e (21) diventano rispettivamente

$$\left.\begin{aligned} F &= E_1 + \varphi_1 \frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_2^* + \varphi_2 - \Delta} \\ F^* &= E_2^* - \varphi_2^* \frac{\Delta - \varphi_1^*}{\varphi_1^* + \varphi_2 - \Delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (22),$$

$$\left.\begin{aligned} E &= E_1 + \varphi_1 \frac{\Delta}{\varphi_1^* + \varphi_2 - \Delta} \\ E^* &= E_2^* - \varphi_2^* \frac{\Delta}{\varphi_1^* + \varphi_2 - \Delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23).$$

Le formole precedenti risolvono completamente il problema della ricerca dei punti cardinali di un sistema composto quando sono dati i punti cardinali dei sistemi componenti. Non ci siamo occupati dei punti nodali: essi si troveranno facilmente mediante le equazioni:

$$\Omega = F + \varphi^* ,$$

$$\Omega^* = F^* - \varphi .$$

## 4°

Il punto oculare di un sistema composto vien dato dalla seconda delle (3). È necessario quindi esprimere il prodotto $lk$ in funzione di elementi noti dei sistemi componenti. A tale scopo ricordiamo che

$$k = \frac{k_1 k_2}{n^*} (F_2 - F_1^*) ,$$

$$l = l_1 k_2 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - \frac{k_2}{k_1} ,$$

e quindi

$$lk = k_2^2 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} \left[ l_1 k_1 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - 1 \right] ,$$

donde
$$\frac{n_1^*}{lk} = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2 (F_2 - F_1^*) \left[ l_1 k_1 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - 1 \right]} .$$

Sostituendo questo valore nella equazione

$$N^{**} = F^* + \frac{n_1^*}{lk} ,$$

e tenendo conto delle (10) si otterrà:

$$N^{**} = F_2^* + \frac{n^* n_1^*}{k_2^2 (F_2 - F_1^*)} \left| 1 + \frac{1}{l_1 k_1 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - 1} \right| ,$$

ovvero

$$N^{**} - F_2^* = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2 (F_2 - F_1^*)} \cdot \frac{l_1 k_1 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*}}{l_1 k_1 \frac{F_2 - F_1^*}{n^*} - 1} .$$

o anche

$$N^{**} - F_2^* = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2} \cdot \frac{1}{(F_2 - F_1^*) - \frac{n^*}{l_1 k_1}} ;$$

e poichè

$$N_1^{**} = F_1^* + \frac{n^*}{l_1 k_1} ,$$

si avrà

$$(N^{**} - F_2^*)(F_2 - N_1^{**}) = \frac{n^* n_1^*}{k_2^2} = \varphi_2 \varphi_2^* \quad \ldots (24).$$

E quindi: *Il punto oculare di un sistema composto è il coniugato del punto oculare del primo sistema rispetto al secondo sistema componente.*

L'ascissa del punto oculare del sistema composto sarà data da

$$N^{**} = F_2^* + \frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{F_2 - N_1^{**}} ;$$

ovvero da

$$N^{**} = F_2^* - \frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{F_1^* - F_2 - \frac{\varphi_1^*}{l_1}} \quad \ldots\ldots (25).$$

Nel caso di un sistema telescopico si avrà $F_1^* - F_2 = 0$, e quindi la formola precedente si semplifica e diventa

$$N^{**} = F_2^* + l_1 \frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{\varphi_1} \qquad \ldots\ldots (26).$$

Nei telescopii ordinarii (a mezzi estremi identici) si avrà

$$N^{**} = F_2^* + l_1 \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1} \qquad \ldots\ldots (27),$$

e questa formola è generale; essa serve a dare la posizione dell'anello oculare tanto nei telescopii aventi l'oculare formato da una semplice lente, quanto da un sistema di lenti.

Indicando con $\Delta$ lo spessore dell'obbiettivo ed $n$ l'indice relativo di rifrazione della materia di cui è composto, si avrà:

$$l_1 = 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta}{r}.$$

dove $r$ è il raggio di curvatura della faccia rivolta all'osservatore, quindi

$$N^{**} = F_2^* + \left(1 + \frac{n-1}{n} \frac{\Delta}{r}\right) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1} \qquad \ldots\ldots (28).$$

In un telescopio che ha l'oculare convergente (cannocchiale astronomico), il secondo fuoco $F_2^*$ cade sempre fuori dell'istrumento, e quindi anche l'anello oculare sarà fuori dell'istrumento.

Se l'oculare del telescopio è divergente, bisognerà distinguere due casi, o l'oculare consta di una semplice lente (cannocchiale di Galilei), o è formato da parecchie lenti (cannocchiale terrestre). Nel primo caso il fuoco $F_2^*$ dell'oculare giace nell'interno del cannocchiale, e poichè

$$\left(1 + \frac{n-1}{n} \frac{\Delta}{r}\right) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1} < \varphi_2 .$$

l'anello oculare sarà anch'esso dentro lo strumento. Nel secondo caso in cui l'oculare funziona come un microscopio composto, il secondo fuoco $F_2^*$ è anche fuori del cannocchiale, e quindi sarà fuori anch'esso l'anello oculare.

La distanza dell'anello oculare dal 2° punto principale del-

l'oculare, indicandola con $p$, si troverà sostituendo a $F_2^*$ la quantità $E_2^* + \varphi_2$; si otterrà

$$p = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta}{r} \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1} \quad \ldots\ldots (29).$$

Ordinariamente il secondo termine del secondo membro della (29) è trascurabile; allora il valore di $p$ diventa più semplice e coincide con quello che comunemente vien dato nei trattati di Fisica.

## 5°

Diconsi *punti uniti* in un sistema diottrico quei punti dell'asse del sistema che ànno per immagine se stessi; i piani perpendicolari all'asse condotti per quei punti si diranno *piani uniti*. Un punto del piano unito ha il suo coniugato nello stesso piano.

Se nella equazione

$$(\xi^* - F^*)(F - \xi) = \varphi\varphi^*$$

si pone $\xi^* = \xi = x$ si avrà

$$(x - F^*)(F - x) = \varphi\varphi^*$$

ovvero

$$x^2 - (F + F^*)x + (\varphi\varphi^* + FF^*) = 0 \quad \ldots\ldots (30).$$

E poichè si ha in generale

$$F^* = F + \varphi + \varphi^* + d \ ,$$

$d$ essendo la distanza tra i punti principali del sistema dato, cioè

$$d = E^* - E \ .$$

La equazione precedente si trasforma nell'altra

$$(x - F)^2 - (x - F)(\varphi + \varphi^* + d) + \varphi\varphi^* = 0 \quad \ldots (31).$$

Questa equazione di 2° grado determina i punti uniti, o meglio le distanze di essi dal fuoco anteriore del sistema diottrico. La condizione perchè sieno reali è

$$(\varphi + \varphi^* + d)^2 - 4\varphi\varphi^* > 0 \ ,$$

ovvero $$(\varphi^* - \varphi)^2 + d^2 + 2\,d\,(\varphi + \varphi^*) > 0 \quad \ldots\ldots (32),$$

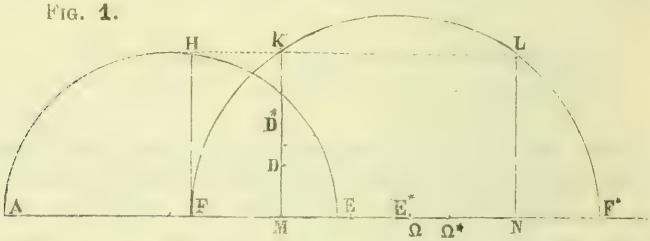
la quale nel caso dei mezzi estremi identici diventa

$$d + 4\,\varphi > 0 \ (*) \quad \ldots\ldots (33).$$

La costruzione dei punti uniti quando sono dati i punti cardinali di un sistema diottrico si farà nel seguente modo.

Sieno $F$, $E$, $E^*$, $F^*$, $\Omega$, $\Omega^*$, il primo fuoco, i due punti

Fig. 1.




principali il secondo fuoco ed i punti nodali di un sistema diottrico qualunque. A cominciare da $F$ si prenda un segmento $FA$ eguale alla seconda distanza focale $\varphi^* = E^* F^*$, e si descrivano quindi due semicirconferenze aventi per diametro rispettivamente $FF^*$, $AE$ e dal punto $F$ s'innalzi la perpendicolare $FH$. La retta $HKL$ parallela ad $AF$ condotta pel punto $H$ incontrerà la circonferenza $FF^*$ nei punti $K$, $L$, dai quali condotte le perpendicolari $KM$, $LN$ all'asse del sistema si avranno in $M$ ed $N$ i punti uniti. I piani condotti per $M$ ed $N$ perpendicolarmente all'asse saranno i piani uniti.

Per costruire il coniugato di un punto $D$ giacente in uno dei piani uniti basta congiungere esso punto col primo punto nodale $\Omega$ la parallela alla retta $D\Omega$ condotta pel secondo punto nodale $\Omega^*$ incontrerà il piano $KM$ nel punto $D^*$ che sarà il coniugato richiesto.

Per trovare i punti uniti di un sistema diottrico composto, ricordiamo che si ha

$$F = F_1 + \frac{\varphi_1 \varphi_1^*}{F_1^* - F_2} \ ;$$

$$F^* = F_2^* - \frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{F_1^* - F_2} \ ;$$

(*) I punti uniti considerati nei sistemi diottrici a mezzi estremi identici sono stati chiamati punti *sintotici* da Listing. *Annali di Poggendorf*, 1866.

donde
$$F+F^*=F_1+F_2^*+\frac{1}{F_1^*-F_2}[\varphi_1\varphi_1^*-\varphi_2\varphi_2^*]\,;$$
e
$$FF^*=F_1F_2^*-\frac{\varphi_1\varphi_1^*\varphi_2\varphi_2^*}{(F_1-F_2)^2}+\frac{1}{F_1^*-F_2}[F_2^*\varphi_1\varphi_1^*-F_1\varphi_2\varphi_2^*]\,.$$

Se si osserva che
$$\varphi\varphi^*=\frac{\varphi_1\varphi_1^*\varphi_2\varphi_2^*}{(F_1^*-F_2)^2}\,.$$
la (30) diventa
$$\left.\begin{aligned}&x^2-\left[F_1+F_2^*+\frac{1}{F_1^*-F_2}(\varphi_1\varphi_1^*-\varphi_2\varphi_2^*)\right]x\\&+F_1F_2^*+\frac{1}{F_1^*-F_2}[F_2^*\varphi_1\varphi_1^*-F_1\varphi_2\varphi_2^*]\end{aligned}\right\}=0\quad\ldots(34),$$
e questa equazione determina i punti uniti di un sistema diottrico composto in funzione di quantità note dei due sistemi componenti.

Se il sistema è telescopico si avrà $F_1^*-F_2=0$, e quindi la equazione precedente si riduce al 1° grado, e si ottiene, indicando con $D$ il valore di $x$:
$$x=\frac{F_2^*\varphi_1\varphi_1^*-F_1^*\varphi_2\varphi_2^*}{\varphi_1\varphi_1^*-\varphi_2\varphi_2^*}=D\qquad\ldots\ldots(35).$$

Il punto unito dato dalla (35) è il *punto confocale* del sig. Bravais. Essa mostra chiaramente che: *Il* PUNTO CONFOCALE *divide esternamente il segmento* $F_1F_2^*$ *nel rapporto* $\frac{\varphi_1\varphi_1^*}{\varphi_2\varphi_2^*}$.

È notevole che il punto $D$ divide nello stesso rapporto (esternamente) il segmento compreso tra una coppia qualunque di punti coniugati.

Per dimostrare ciò prendiamo la formola generale data da Gauss per due punti coniugati $\xi$, $\xi^*$, cioè:
$$\xi^*=N^*-\frac{n^\circ h-g(\xi-N^\circ)}{n^\circ l-k(\xi-N^\circ)}n^*\,.$$
la quale per un sistema telescopico diventa
$$\xi^*=N^*-n^*\frac{h}{l}+\frac{n^*}{n^\circ}\frac{g}{l}(\xi-N^\circ)\,,$$

donde, osservando che $lg = 1$, si deduce

$$\xi^* = N^{**} + \frac{n^*}{n^0}\frac{1}{l^2}(\xi - N^0) \ .$$

Per un'altra coppia di punti coniugati $\xi_1^*$, $\xi_1$ si avrà

$$\xi_1^* = N^{**} + \frac{n^*}{n^0} \cdot \frac{1}{l^2}(\xi_1 + N^0) \ ,$$

e quindi

$$\frac{\xi^* - \xi_1^*}{\xi - \xi_1} = \frac{n^*}{n^0}\frac{1}{l^2} \qquad \ldots\ldots (36).$$

Se i punti coniugati $\xi_1^*$ $\xi_1$ diventano coincidenti, essi si confonderanno col punto $D$, e quindi si avrà dalla (36)

$$\frac{\xi^* - D}{\xi - D} = \frac{n^*}{n^0}\frac{1}{l^2} \qquad \ldots\ldots (37).$$

Il secondo membro della equazione precedente, quando il sistema telescopico è composto di due, diventa $\frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{\varphi_1 \varphi_1^*}$, e perciò, risolvendola rispetto a $D$, si otterrà

$$D = \frac{\xi^* \varphi_1 \varphi_1^* - \xi \varphi_1 \varphi_2^*}{\varphi_1 \varphi_1^* - \varphi_2 \varphi_2^*} \qquad \ldots\ldots (38),$$

la quale dimostra la verità del teorema enunciato.

Il caso che si presenta più comunemente è quello di un telescopio a mezzi estremi identici, allora la (35) e la (38) diventano rispettivamente

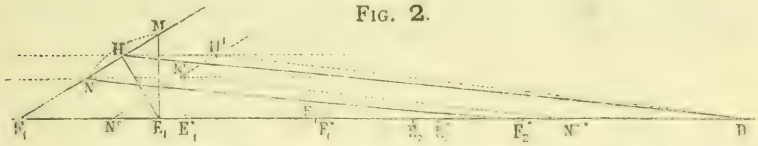
$$D = \frac{F_2^* \varphi_1^2 - F_1 \varphi_2^2}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2} \qquad \ldots\ldots (39),$$

$$D = \frac{\xi^* \varphi_1^2 - \xi \varphi_2^2}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2} \qquad \ldots\ldots (40).$$

Il punto $D$ si troverà adunque col dividere esternamente il segmento compreso tra il primo fuoco principale del primo sistema ed il secondo fuoco principale del secondo nel rapporto $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2}$. Ne risulta quindi la seguente costruzione geometrica :

Sieno $F_1$, $E_1$, $E_1^*$, $F_1^*$ i punti cardinali del primo sistema ed $F_2$, $E_2$, $E_2^*$, $F_2^*$ i punti cardinali del secondo sistema componente. Dal punto $E_1$ s'innalzi

Fig. 2.



la perpendicolare $E_1 M$ all'asse del sistema sulla quale si prenda $E_1 M = E_2 F_2 = \varphi_2$; congiungendo $F_1$ con $M$ il triangolo $F_1 E_1 M$ avrà i due cateti eguali rispettivamente a $\varphi_1$ e $\varphi_2$ e quindi conducendo da $E_1$ la perpendicolare $E_1 H$ sulla ipotenusa $F_1 M$ si avrà

$$\frac{F_1 H}{H M} = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} .$$

Se si prende $HN = HM$, ed il punto $N$ si unisce col punto $F_2^*$, la parallela ad $NF_2^*$ condotta pel punto $H$ incontrerà l'asse del sistema telescopico nel punto $D$ che sarà il *punto confocale* richiesto.

Ottenuto il punto confocale si potrà determinare il coniugato di un punto qualunque nel seguente modo:

Si voglia, per esempio, trovare il punto oculare, ossia il coniugato del punto $N^0$ vertice della prima superficie del primo sistema componente. Dal punto $N^0$ si conduca la retta $N^0 N' H'$ parallela alla $F_1 M$, e sieno $N'$, $H'$ i punti d'intersezione della retta ora detta colle $HH'$, $NN'$ parallele all'asse del sistema; congiunto $H'$ con $D$, la parallela ad $H'D$ condotta per $N'$ incontrerà l'asse nel punto $N^{**}$ che sarà il punto oculare richiesto.

Allo stesso modo si troverà il coniugato di un punto assegnato qualunque. La costruzione precedente serve per determinare quello di due punti coniugati che è più vicino al punto $D$, quando è dato il più lontano; sarà facile modificarla per determinare il più lontano quando fosse dato il più vicino, giacchè amendue tali casi corrispondono alle due seguenti formole:

$$\xi^* = D - (D - \xi) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} .$$

$$\xi = D - (D - \xi^*) \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} .$$

le quali si deducono dalla (40) risolvendola una volta rispetto a $\xi^*$, un'altra rispetto a $\xi$.

Per completare la costruzione grafica dei punti coniugati, in un sistema telescopico, resta a trovare il centro di similitudine di due immagini coniugate. Esso è dato dalla equazione

$$C = \xi + \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}(\xi^* - \xi) \qquad \ldots\ldots (41),$$

e quindi esso si troverà dividendo nel rapporto $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ il segmento $\xi^* - \xi$.

La costruzione geometrica sarà adunque facilissima.

Vi è un caso in cui il punto confocale $D$ del sistema telescopico va a distanza infinita ed è quando si ha

$$\varphi_1 \varphi_1^* = \varphi_2 \varphi_2^* \qquad \ldots\ldots (42),$$

ovvero:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2^*}{\varphi_1^*} :$$

in questo caso la costruzione precedente non è più applicabile.

Dalla equazione

$$\xi^* = N^{**} + \frac{\varphi_2 \varphi_2^*}{\varphi_1 \varphi_1^*}(\xi - N^0)$$

si deduce

$$\xi^* = N^{**} + \xi - N^0 \ ;$$

e per un'altra coppia di punti coniugati $\xi_1$, $\xi_1^*$

$$\xi_1^* = N^{**} + \xi_1 - N^0 :$$

e quindi si avrà

$$\xi_1^* - \xi_1 = \xi^* - \xi = N^{**} - N^0 = F_2^* - F_1 ,$$

ossia: la distanza di due punti coniugati qualunque è costante ed è uguale al segmento $F_1 F_2^*$; cosicchè il punto coniugato di un punto dato si otterrà per mezzo della equazione

$$F_1 - \xi = F_2^* - \xi^* \qquad \ldots\ldots (43).$$

Il rapporto di similitudine tra oggetto ed immagine sarà

$$\frac{1}{l} = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1^*} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2^*} .$$

e quindi l'ingrandimento lineare è uguale all'ingrandimento angolare.

Il centro di similitudine sarà dato da

$$C = \xi + \frac{\varphi_1^*}{\varphi_1^* + \varphi_2} (F_2^* - F_1) \qquad \ldots\ldots (44).$$

Nel caso particolare dei mezzi estremi identici sarà

$$\varphi_1 = \pm \varphi_2 \; ; \qquad \frac{1}{l} = \mp 1 \; .$$

cioè la immagine sarà della stessa grandezza dell'oggetto e sarà capovolta o diritta secondochè si ha

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \text{o} \qquad \varphi_1 = -\varphi_2 \; .$$

Nel primo caso il centro di similitudine è il punto medio del segmento $\xi^* - \xi$, quindi le due formole che servono alla ricerca del punto coniugato di un punto dato saranno la (43) e la seguente

$$C = \xi + \frac{1}{2} (F_2^* - F_1) \qquad \ldots\ldots (45).$$

Nel secondo caso il centro di similitudine va anch'esso a distanza infinita, e quindi, poichè la immagine è diritta ed eguale all'oggetto; i punti coniugati si troveranno sopra rette parallele all'asse del sistema.

## 6.

Le formole precedenti ci dànno il mezzo di trovare l'errore che si commette quando si misura l'ingrandimento di un cannocchiale che non si trova in condizione telescopica. Ordinariamente per misurare l'ingrandimento di un cannocchiale, si guarda con esso un oggetto molto distante, p. e. una stella e, quando la si vede distintamente, si misura mediante un DINAMETRO il diametro dell'anello oculare. Il quoziente del diametro dell'obbiettivo per quello dell'anello oculare dà l'ingrandimento richiesto. Questo

metodo (*) non è perfettamente esatto, giacchè il cannocchiale non trovasi in condizione telescopica. È facile però vedere l'errore che si commette.

Indicando con $m$ il rapporto di similitudine tra l'immagine e l'oggetto in un sistema diottrico qualunque, è noto che

$$m = \frac{n^0}{n^0 l - k(\xi - N^0)} \cdot$$

ed esso, come vedesi, varia coll'ascissa del punto che si considera. Quando $\xi = N^0$, si avrà

$$m = \frac{1}{l} \cdot$$

e questo è il rapporto tra il diametro dell'anello oculare e quello dell'obbiettivo nel caso che il sistema non sia telescopico. Se con $m_t$ ed $l_t$ indichiamo ciò che diventano $m$ ed $l$ allorchè $k = 0$, sarà

$$m_t = \frac{1}{l_t} ,$$

la quale esprime lo stesso rapporto per un sistema telescopico. Bisogna dunque trovare una relazione tra $l_t$ ed $l$.

La prima delle (7), osservando che quando $F_1^* = F_2$ il sistema è telescopico dà

$$l = l_t - \frac{l_1 k_2 (F_1^* - F_2)}{n^*}$$

ovvero

$$l = l_t + l_1 \frac{F_1^* - F_2}{\varphi_2} ,$$

e poichè

$$l_1 = 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta}{r} ,$$

si avrà

$$l = l_t + \frac{F_1^* - F_2}{\varphi_2} \left( 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta}{r} \right) \quad \ldots\ldots (46).$$

Il primo membro della precedente eguaglianza rappresenta l'ingrandimento che si misura effettivamente, mentre il primo

(*) Per mettere un cannocchiale esattamente in condizione telescopica cfr. MARTIN: *Annales de Chimie et Physique*, 1867.

termine del secondo membro rappresenta l'ingrandimento vero. L'errore che si commette è adunque dato da

$$\varepsilon = \frac{F_1^* - F_2}{\varphi_2}\left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta}{r}\right) \qquad \ldots\ldots (47).$$

Eccettuato il caso in cui la faccia dell'obbiettivo rivolta verso l'oculare sia concava, il fattore $\left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta}{r}\right)$ è sempre minore o al più eguale all'unità. E poichè quando si guarda un oggetto lontano si ha sempre

$$F_1^* - F_2 < \varphi_2 \qquad \text{(in valore assoluto)},$$

se ne deduce che l'errore che si commette sarà sempre minore di un'unità.

È chiaro poi, che quando il cannocchiale è astronomico l'ingrandimento misurato è sempre maggiore del vero, mentre esso è minore del vero nel cannocchiale terrestre e nel cannocchiale di Galilei.

Torino, Giugno 1883.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta e legge il seguente lavoro del signor Dott. G. Daccomo:

# CONTRIBUTO

ALLO

# STUDIO CHIMICO

## DEL TRICLOROFENOLO.

Il triclorofenolo fu scoperto nel 1836 da Laurent, che lo chiamava acido clorofenisico: l'autore lo preparava facendo passare una corrente di gas cloro nella porzione dell'olio di catrame bollente tra 170 e 190° (1).

Erdmann nel 1841 (2) tra i prodotti dell'azione del cloro sull'indaco trovava il così detto acido clorindoptico, che nello stesso anno fu da Laurent (3) riconosciuto identico coll'acido clorofenisico.

Piria nel 1845 (4) riusciva ad ottenerlo facendo passare una corrente di cloro in una soluzione concentrata di saligenina.

Secondo Hofmann (5) si forma pure trattando il fenolo con acido cloridrico e clorato potassico, e trovasi anche tra i prodotti dell'azione del cloro sull'anilina.

Vogel (6) ottenne pure del triclorofenolo facendo passare una corrente di cloro nella soluzione di fenolsolfato potassico greggio secondo la reazione:

$$C^6H^4 \begin{matrix} OH \\ SO^3K \end{matrix} + 3\,Cl^2 + H^2O = C^6H^2Cl^3\,OH + KHSO^4 + 3\,HCl.$$

(1) *Ann. de Chim. et de Phys.*, serie 3ª, tom. III, p. 206.
(2) *Journal für praktische Chemie*, tom. 19, 22 e 25.
(3) Loc. cit., pag. 497.
(4) *Ann. de Chim. et de Phys.*, serie 3ª, tom. XIV, pag. 269.
(5) *Liebig's Annalen der Chemie*, tom. LIII, p. 8.
(6) *Journal für praktische Chemie*, tom. XCIV, p. 449.

Sintenis (1) notò la formazione di triclorofenolo per l'azione del cloro sull'etere fenilbenzilico.

Fu poi ottenuto puro da Faust (2) col metodo di Laurent, però partendo dal fenolo purissimo.

Un ultimo processo molto comodo e che fornisce del triclorofenolo abbastanza puro è quello indicato recentemente da Dianin (3), che si fonda sull'azione dell'ipoclorito di calcio sul fenolo.

Anche Chandelon (4), studiando l'azione degli ipocloriti alcalini sul fenol, ottenne del triclorofenolo; questo autore però dopo aver stabilito un confronto tra il triclorofenolo ottenuto per l'azione del cloro sul fenolo e quello preparato per l'azione dell'ipoclorito di sodio, notava una differenza nel punto di fusione; poichè mentre il primo fonde a 67°; il secondo fonde solo a 54°.

Faceva però osservare che anche i diversi autori sono discordi sul punto di fusione del triclorofenolo; infatti secondo Laurent sarebbe 44°, secondo Piria 58° e finalmente secondo Faust 67°: il punto di fusione indicato da Faust è esatto.

Probabilmente però, questa differenza nel punto di fusione del triclorofenolo preparato coll'ipoclorito di sodio, è dovuta alla presenza di traccie d'acqua; poichè avendone io preparata una piccola quantità, seguendo esattamente il metodo indicato da Chandelon, trovai che fonde anch'esso a 67°, purchè si abbia cura di purificar bene il prodotto trasformandolo prima in sale d'ammonio, da cui messo in libertà con un acido venga poi fatto sublimare (5).

Per le mie esperienze ho preparato del triclorofenolo tanto per l'azione del gas cloro sul fenolo (metodo Laurent-Faust), che per l'azione dell'ipoclorito di calcio (metodo Dianin).

1°. Operando col primo processo feci passare nel fenolo purissimo distillato sul sodio, una corrente di gas cloro ben secco.

---

(1) *Liebig's Annalen*, tom. 161, pag. 338.

(2) *Zeitschrift für Chemie.*

(3) *St. Petersb. Inaug. dissert.*, 1882, e *Riv di Chim. Med. e Farm.*, 1883, Giugno.

(4) *Bull. Soc. Chim.*, 1882, tom. 38, p. 116.

(5) Non è senza importanza l'aver dimostrato che anche il triclorofenolo preparato da Chandelon fonde, quando è puro, a 67° perchè stando al solo punto di fusione (54°) trovato da quest'ultimo pel suo triclorofenolo, potrebbe far anche supporre che fosse il triclorofenolo fusibile a 54-55° di Hirsch (*Berichte* tom. XI, p. 1981 e XIII, p. 1907), ottenuto dal tricloroamidofenolo col nitrito d'etilo.

continuandola finchè l'aumento di peso subito dal fenolo, mi indicasse che tutto era stato trasformato in triclorofenolo. Il prodotto greggio così ottenuto veniva poi distillato frazionatamente e purificato facendolo bollire con una soluzione acquosa diluita di ammoniaca; il liquido filtrato deponeva per raffreddamento il triclorofenato d'ammonio cristallizzato, il quale ridisciolto nell'acqua pura e trattato con acido cloridrico metteva in libertà il triclorofenolo, che da ultimo era fatto sublimare.

2°. Seguendo il metodo di Dianin, in una soluzione satura di fenolo (5 %), versai adagio adagio una soluzione pure satura d'ipoclorito di calcio. Lasciai a sè il miscuglio parecchi giorni avendo cura di agitarlo di quando in quando, aggiungendovi nuovo ipoclorito affinchè questo fosse sempre in grande eccesso. Il liquido filtrato, per trattamento con acido cloridrico deponeva un voluminoso precipitato di triclorofenolo; questo veniva in seguito purificato come il precedente trasformandolo in sale d'ammonio da cui messo in libertà era finalmente fatto sublimare.

Riuscii così ad avere una discreta quantità di triclorofenolo purissimo che fondeva anch'esso perfettamente a 67-68°.

Il triclorofenolo è pochissimo solubile nell'acqua a freddo, un po' più a caldo; il solo dato che si avesse intorno alla sua solubilità nell'acqua è quello fornitoci da Dianin (1); secondo questo autore una parte di triclorofenolo si scioglierebbe in 116 parti d'acqua (non è però indicata la temperatura).

Sembrandomi questa cifra molto superiore al vero, ho voluto determinarla io stesso a diverse temperature.

La prima determinazione fu fatta a 11°,2 seguendo due metodi cioè:

1°. Una parte esattamente pesata della soluzione satura a quella temperatura veniva evaporata a B. M. in una cassula d'argento in presenza di po' di calce pura, onde evitare che una parte del triclorofenolo sfuggisse col vapor d'acqua. Nel residuo determinava poi il cloro, dal cui peso potei calcolare la quantità di triclorofenolo.

2°. Un'altra porzione della soluzione satura veniva precipitata con nitrato d'argento; al liquido filtrato aggiungeva poche goccie di ammoniaca diluita allo scopo di riprecipitare quel

(1) Loc. cit.

poco triclorofenato d'argento che era stato sciolto dall'acido nitrico messo in libertà e riuniti i due precipitati in un crogiolo, venivano calcinati in presenza di un eccesso di acido cloridrico per trasformare tutto l'argento in cloruro. Dal peso del cloruro d'argento ottenuto calcolai la quantità di triclorofenolo.

Secondo il primo metodo la solubilità del triclorofenolo sarebbe di 0,446 per mille, mentre coll'altro sarebbe di 0,510 per mille.

I risultati sarebbero abbastanza concordanti, specialmente se si consideri che col primo processo si hanno maggiori perdite per la calce che aderisce fortemente alla cassula e che riesce difficile staccare.

Eseguii una seconda determinazione a 25°,4 ed una terza a 96°; per cui riunendo i dati ottenuti avrei che:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | parti | d'acqua | sciolgono | a 11°,2 | parti | 0,510 | di triclorofenolo |
| » | » | » | » | 25°,4 | » | 0,858 | » |
| » | » | » | » | 96° | » | 2,430 | » |

## Costituzione del triclorofenolo.

La formola del triclorofenolo è $C^6 H^2 Cl^3 O H$, è cioè il fenolo in cui tre atomi d'idrogeno sono sostituiti da tre di cloro; quello però che non sappiamo di certo è la posizione di questi 3 atomi di cloro.

Beilstein (1) ammette come probabile la costituzione 1, 2, 4, 6 e Chandelon (2) partendo dal fatto da lui stesso osservato che gl'ipocloriti alcalini reagendo sul fenolo formano successivamente il *mono*, *bi* e *triclorofenol*, ammette pure una tale costituzione.

Io, allo scopo di dimostrare questa supposta costituzione, tentai l'azione del percloruro di fosforo pensando che se avessi potuto ottenere una tetraclorobenzina *pura*, il problema sarebbe stato risolto.

Già Engelhardt e Latschinoff (3) avevano studiata l'azione del percloruro di fosforo sul triclorofenolo, notando la formazione

(1) *Handbuch der Organ. Chemie*, 1883, p. 1010.
(2) *Berichte*, 1883, n° 12, p. 1753.
(3) *Berichte*, 1870, p. 625.

di un acido ditriclorofenilfosforico e di una tetraclorobenzina fusibile a 35 analoga alla β tetraclorobenzina ottenuta da Jungfleisch, trattando con un eccesso di potassa la soluzione alcoolica di un miscuglio di cloruri della monoclorobenzina (1).

Siccome però tutte le tre tetraclorobenzine teoricamente possibili sono note e nessuna di esse fonde a 35°, credetti interessante di ripetere l'esperienza, tanto più che gli studi posteriori di Beilstein avevano dimostrato che la tetraclorobenzina di Jungfleisch era impura.

In una storta munita d'apparecchio a ricadere posi grammi 30 di triclorofenolo ben secco e gr. 45 di percloruro di fosforo, scaldando dapprima leggermente. Appena il triclorofenolo cominciava a fondere, la reazione si fece molto viva sviluppandosi torrenti d'acido cloridrico: aumentando poi gradatamente la temperatura ebbi a notare un leggiero sviluppo di cloro libero che durò circa mezz'ora. Trascorse quasi 6 ore, durante le quali la temperatura salì a 240°, essendo pressochè completamente cessato lo sviluppo d'acido cloridrico, lasciai raffreddare il prodotto che lavai in seguito con molt'acqua; questa avendo reazione acidissima vi aggiunsi una soluzione concentrata di soda caustica, sino a reazione nettamente alcalina e sbattuto fortemente il liquido lo lasciai in riposo. Quasi tutto il prodotto si sciolse nella soda ed ebbi solo uno scarso residuo costituito da una massa cristallina leggermente colorata in rossastro. Separata questa e lavatala diligentemente con acqua, la sciolsi nell'alcool bollente e la soluzione, scolorata con poco carbone animale, depose per raffreddamento dei bei cristalli aghiformi, perfettamente incolori e fondenti a 50 — 51°.

Ripetei l'operazione colla stessa quantità di triclorofenolo e percloruro di fosforo e appena cessato lo sviluppo d'acido cloridrico, distillai il prodotto raccogliendo ciò che passava tra 220 e 310°. In questo modo ottenni subito un prodotto perfettamente incoloro ed anche in maggior copia, poichè se colla prima operazione il rendimento fu circa del 16 % del triclorofenolo impiegato, colla seconda ebbi circa il 23 %.

La sostanza così ottenuta, sottoposta all'analisi, mi diede i risultati seguenti:

---

(1) *Ann. de Chim. et de Phys.*, serie 4ª, tom. XV, p. 300 e 302

I. Gr. 0,1775 di sostanza fornirono gr. 0,4737 di cloruro d'argento;

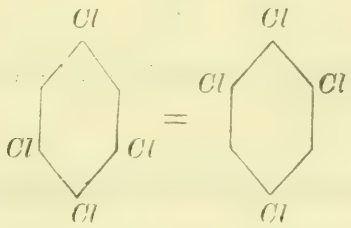
II. Gr. 0,1554 di sostanza diedero gr. 0,4103 di cloruro d'argento;

III. Gr. 0,2586 di sostanza fornirono gr. 0,0341 d'acqua e gr. 0,3128 d'anidride carbonica

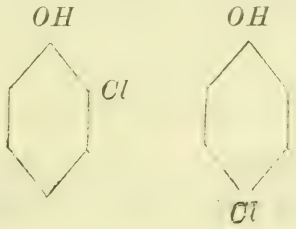
Da cui:

| | | Trovato | | | Calcolato per |
|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III | $C^6 H^2 Cl^4$ |
| $C$ | » | — | — | 32,98 | 33,33 |
| $H$ | » | — | — | 1,46 | 0,93 |
| $Cl$ | » | 65,97 | 65,31 | — | 65,74. |

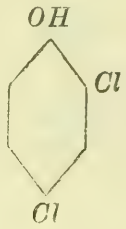
Si tratta adunque di una tetraclorobenzina e, come lo dimostra il punto di fusione, precisamente della $\beta$ tetraclorobenzina la quale ha questa costituzione:



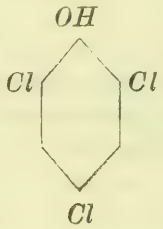

Ora, se noi consideriamo che facendo agire il gas cloro sul fenolo, gli unici monocloroderivati che prima si formano sono l'*orto* ed il *para* che hanno questa costituzione:



dai quali continuando ancora l'azione del cloro si origina esclusivamente l'*ortoparabiclorofenolo*




e questo alla sua volta per l'azione prolungata del cloro è trasformato in triclorofenolo, riuscirà evidente che l'unico triclorofenolo capace di trasformarsi in β tetraclorobenzina e che prenda origine dall'ortoparabiclorofenolo, è appunto questo:




Resta così *dimostrata* la posizione dei tre atomi di cloro nel triclorofenolo ordinario.

## Derivati del triclorofenolo.

Dei derivati a radicale alcolico ed acido del triclorofenolo, erano solo noti l'etere etilico cristallizzato in prismi, che fonde a 43 — 44° e bolle a 246°, e l'acetiltriclorofenolo, liquido bollente a 261 — 262°. Io ne ho preparati cinque a radicale acido, e riguardo i due ultimi specialmente esporrò in un'altra comunicazione i risultati ottenuti dall'azione dell'acido nitrico.

### 1. *Propioniltriclorofenolo.*

In un piccolo palloncino munito d'apparecchio a ricadere, posi quantità molecolari di cloruro di propionile e triclorofenolo

ben secco, scaldando dapprima leggermente. Si svolgono subito abbondanti fumi d'acido cloridrico secondo la reazione:

$$C^6H^2Cl^3OH + C^3H^5OCl = C^6H^2Cl^3O.COC^2H^5 + HCl.$$

Continuai l'azione del calore alzando gradatamente la temperatura, finchè dopo circa 4 ore lo sviluppo d'acido cloridrico cessò quasi completamente. Allora lasciato raffreddare il prodotto, che era liquido e leggermente colorato in giallognolo, lo lavai successivamente con acqua distillata, soluzione di soda caustica molto diluita, e di nuovo con acqua. Ottenni così un liquido lattiginoso che messo a contatto con del cloruro di calcio fuso e granulato diventò perfettamente limpido. Sottoposto replicatamente a distillazione frazionata, riuscii ad avere un liquido incoloro, pesante, molto rifrangente, che bolliva a 262°,5 — 264°,5 (non corr.), costituito appunto da propioniltriclorofenolo.

Infatti una determinazione di cloro mi diede questo risultato:

Gr. 0,3533 di sostanza fornirono gr. 0,5942 di cloruro d'argento.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| $Cl\,\%$ | 41,60 | 42,01. |

## 2. *Butirriltriclorofenolo.*

Collo stesso processo facendo reagire il cloruro di butirrile col triclorofenolo ottenni il butirriltriclorofenolo $C^6H^2Cl^3O.COC^3H^7$, liquido anch'esso incoloro, pesante e molto rifrangente che bolle a 272 — 275° (non corr.).

Una determinazione di cloro mi diede:

Gr. 0,2572 di sostanza fornirono gr. 0,4109 di cloruro d'argento.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| $Cl\,\%$ | 39,52 | 39,81. |

### 3. *Valeriltriclorofenolo.*

La stessa reazione ha luogo tra il cloruro di valerile ed il triclorofenolo.

$$C^6H^2Cl^3OH + C^5H^9OCl = C^6H^2Cl^3O.COC^4H^9 + HCl$$

dando origine al valeriltriclorofenolo, liquido anch'esso, simile ai due precedenti. Dopo ripetuti frazionamenti ne ottenni una porzione bollente costantemente a 281 — 284° (non corr.).

Avendo determinato il cloro di tale composto, ebbi questo risultato:

Gr. 0,2889 di sostanza fornirono gr. 0,4393 di cloruro d'argento.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| $Cl$ % | 37,61 | 37,83. |

### 4. *Benzoiltriclorofenolo.*

In un palloncino a lungo collo scaldo per circa 5 ore, aumentando gradatamente la temperatura, quantità molecolari di cloruro di benzoile e triclorofenolo. Succede la solita reazione:

$$C^6H^2Cl^3OH + C^6H^5COCl = C^6H^2Cl^3O.COC^6H^5 + HCl$$

e finito lo sviluppo d'acido cloridrico lascio raffreddare il prodotto che si rapprende in una massa cristallina. Questa dopo esser stata ben lavata successivamente con acqua, liscivia di soda e poi di nuovo con acqua, viene sciolta nell'alcool bollente. La soluzione per raffreddamento depone minutissimi cristalli incolori di benzoiltriclorofenolo, che fondevano a 73°.

Determinatone il cloro ebbi per risultato:

Gr. 0,1742 di sostanza diedero gr. 0,2483 di cloruro d'argento.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| $Cl$ % | 35,24 | 35,32. |

Ottenni anche il benzoiltriclorofenolo dall'azione della benzamide sul triclorofenolo, secondo la reazione indicata dal Professore Guareschi pel fenolo semplice (1).

A tal uopo scaldai in un palloncino la benzamide con un grande eccesso di triclorofenolo; dopo circa 9 ore di ebullizione, la reazione si può dire compiuta non avendosi quasi più sviluppo di ammoniaca. Il prodotto lasciato raffreddare è lavato con molta soda diluita allo scopo di togliere l'eccesso del triclorofenolo, indi con acqua e fatto cristallizzare dall'alcool bollente. È perfettamente identico al precedente ottenuto col cloruro di benzoile: infatti fonde anch'esso a 78° e determinatone il cloro ottenni questo risultato:

Gr. 0.1943 di sostanza fornirono gr. 0,2772 di cloruro d'argento.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| *Cl* % | 35,29 | 35,32. |

## 5. *Ftaliltriclorofenolo.*

L'ottenni scaldando leggermente per circa 6 ore il cloruro di ftalile col triclorofenolo. Il prodotto lavato diligentemente venne sciolto in un miscuglio d'alcool e di benzina. È molto difficilmente solubile nell'alcool anche bollente; si scioglie poco anche nell'etere; è invece solubilissimo nella benzina e nel cloroformio. Fonde a 193 — 194° in un liquido incoloro.

Una determinazione di cloro mi diede questo risultato:

Gr. 0,1869 di sostanza fornirono gr. 0,3026 di cloruro d'argento.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| *Cl* % | 40,00 | 40,5 |

Per quanto riguarda la costituzione di questo composto, quantunque tutte le reazioni del cloruro di ftalile parlino a fa-

(1) *Gaz. Chim.*, tom. III, p. 400.

vore della formola asimmetrica e quindi sia probabile per lo ftaliltriclorofenolo la formola di struttura:

$$C^6H^4 < \begin{matrix} C(OC^6H^2Cl^3)^2 \\ CO > O \end{matrix}$$

pure non è inverosimile che si possa attribuirgli anche quest'altra:

$$C^6H^4 < \begin{matrix} CO\,.\,OC^6H^2Cl^3 \\ CO\,.\,OC^6H^2Cl^3 \end{matrix}\ .$$

Graebe infatti (1) per l'azione dell'ioduro d'etile sul tetracloroftalato d'argento e per quella dell'etilato sodico sul cloruro dell'acido tetracloroftalico, ottenne due composti affatto diversi, ma che all'analisi corrispondevano ambidue a questa formola $C^6Cl^4O^4(C^2H^5)^2$: il primo era cristallizzato in grossi aghi fondenti a 60°, il secondo invece cristallizzava in tavole e fondeva a 124°. Quivi, dice Graebe, non è possibile nessun'altra spiegazione che quella di ammettere che al primo composto appartenga la formola:

$$C^6H^4 < \begin{matrix} COOC^2H^5 \\ COOC^2H^5 \end{matrix}$$

ed al secondo quest'altra:

$$C^6H^4 < \begin{matrix} C(OC^2H^5)^2 \\ CO > O \end{matrix}$$

Sulla costituzione dello ftaliltriclorofenolo mi propongo quindi di ritornare in seguito.

## Applicazioni del triclorofenolo.

Quantunque questo composto sia da lungo tempo conosciuto, e venga fabbricato in grande in Germania, pure il suo uso data da poco più di 4 anni ed è esclusivamente in Russia che lo vediamo applicato (2). Infatti fu nel 1879 che cominciò ad essere introdotto nella clinica del Prof. Pelechin, però il suo impiego nella pratica chirurgica è dovuto a Dianin il quale fu

(1) *Berichte*, 1883, p. 860.
(2) Popoff, *Centralblatt für Chirurgie*, 1883, n° 27, p. 425.

il primo che abbia dato prove certe del suo potere disinfettante. Infatti, secondo questo autore il triclorofenolo ha un potere antisettico 30 volte maggiore dell'acido fenico; in soluzione diluitissima (0,02 $^0/_0$) impedisce la fermentazione alcoolica; in soluzione di 0,25 $^0/_0$ arresta la fermentazione alcalina dell'urina. Inoltre in casi di processi gangrenosi estesi anche complicati da gangrena d'ospedale, il triclorofenolo riesce un potente antisettico, superiore al fenolo, timolo, acido salicilico, ecc. e la sua soluzione, non irrita nè cauterizza i tessuti (1).

Attualmente è usato in due o tre cliniche dell'Università di Pietroburgo, nell' ospedale-baracca Alessandro e nell' ospedale marittimo di Kronstadt, comparto risipole del Dott. Jaschin.

Secondo i diversi sperimentatori, i risultati ottenuti col triclorofenolo sarebbero più che soddisfacenti; infatti Butschik (2) e Jurinsky (3) affermano d'aver ottenuto brillanti risultati nella cura della risipola e dell'ulcera. È ben vero che le esperienze del Dott. Tomaschefsky non concorderebbero colle precedenti, ma, come osserva Rubetz (4), l'esito negativo del Tomaschefsky sarebbe dovuto alla cattiva qualità del triclorofenolo commerciale, poichè avendo egli ripetute le stesse esperienze con del triclorofenolo purissimo fornitogli dallo stesso Dianin ottenne sempre buoni risultati.

Intorno al valore antisettico del triclorofenolo è poi mia intenzione stabilire in seguito esperienze di confronto.

Torino, R. Università 10 Novembre 1883. Laboratorio del Prof. GUARESCHI.

---

(1) DIANIN, loc. cit.
(2) *Centralblatt für Chirurgie*, 1883, n° 19, p. 297.
(3) Id. id. id. p. 304.
(4) POPOFF, loc. cit.

Lo stesso Socio Cossa presenta ancora e legge il seguente lavoro del signor Dott. Adolfo Monari:

# AZIONE DELL'AMMONIACA

## SULL'ALCOOL ETILICO.

Ramsay (1) ottenne la piridina, facendo passare l'acetilene e l'acido cianidrico attraverso un tubo scaldato al rosso; Baeyer invece (2) e più tardi Wurtz (3), partendo dall'aldeide-ammoniaca il primo e dall'aldol-ammoniaca il secondo, ottennero la collidina.

Io studiai l'azione dell'ammoniaca sull'alcool etilico a temperatura elevata nello scopo di ottenere basi piridiniche.

Feci cadere gr. 1300 di alcool assoluto, perfettamente saturo di gas ammoniaco secco, goccia a goccia, nello spazio di 22 ore circa, lungo una canna di ferro, ripiena di fili dello stesso metallo e scaldata al rosso vivo; raccogliendo i prodotti liquidi della distillazione in un ampio pallone comunicante con un secondo, sormontato da un serpentino, l'uno e gli altri completamente refrigerati, ed i prodotti gassosi in due soluzioni, potassica e cloridrica, poste in due successivi recipienti, in comunicazione col serpentino. Sfuggiva dall'apparecchio una grande quantità di ammoniaca e un gas, che non precipitava col nitrato d'argento.

Terminata l'operazione trovai del liquido solamente nel primo pallone. Era denso oleoso e nerastro per alquanta materia carbonosa frammistavi; di odore fortemente ammoniacale. Alle pareti del pallone poi notai una sostanza ben cristallizzata, che si sciolse in seno al liquido.

(1) *Berichte d. deut. Chem. Gesell.*, 1877, p. 736.
(2) *Ann. d. Chem. und Pharm.*, T. CLV, p. 294.
(3) *Compt. Rendus*, T. LXXXVIII, p. 451 e 1554.

Lo versai in ampia capsula ed a bagno maria ne scacciai l'eccesso di ammoniaca. Il prodotto pesava gr. 60; era neutro o lievemente alcalino; dava le reazioni generali degli alcaloidi. Acidificato allora con una soluzione acquosa di acido solforico e versato in un cilindro, osservai subito che si separava in due strati ben distinti, l'inferiore acquoso ed il superiore oleoso, che si sciolse avidamente nell'etere.

Decantato l'etere e ripetuti due nuovi estratti, distillai questi insieme al primo: rimase un liquido denso, oleoso, neutro, che non dava più le reazioni generali degli alcaloidi, ma precipitava scaldato con nitrato d'argento e, trattato pure a caldo con potassa solida, dava forte odore ammoniacale. Questo sarà esaminato più innanzi.

Per vedere ora se il liquido primitivo conteneva delle basi, alcalinizzai con potassa in eccesso e trattai nuovamente con etere. Estrassi così una piccola quantità di una sostanza fortemente alcalina, di colore paglierino e di odore che si accostava ad alcune note basi. Si scioglieva perfettamente nell'acqua acidulata, ma non precipitava in soluzione acquosa nè col cloruro di platino nè col cloruro d'oro, sì bene con tutti gli altri reattivi. Tuttavia potei ottenerne il cloroplatinato, impiegando intieramente la sostanza ricavata, precipitandola da una soluzione alcoolico-eterea. Ma il cloroplatinato così ottenuto era assai brutto, bruniccio, ed anche per la piccola quantità non potei fare alcuna ricerca.

In quanto alle basi adunque non ebbi risultati soddisfacenti.

La mia attenzione si rivolse allora alla parte oleosa, più sopra accennata, rimasta dall'etere in soluzione acida, che lasciò col tempo deporre de' bei cristalli aghiformi. Raccolsi questi e li pressai al torchio per liberarli dalla parte oleosa, che eravi ancora frammista. Pesavano gr. 3.5 circa. Ricristallizzati e sottoposti ad analisi, ne riconobbi l'identità, come dirò più innanzi, con l'*imidopropionitrile* di Erlenmeyer e Passavant.

Non avendo avuto soddisfacenti risultati da una prima operazione, pensai allora che le condizioni, in cui mi era messo, non erano forse troppo favorevoli, cioè che l'ammoniaca rispetto all'alcool fosse assai scarsa per generare delle basi, anche perchè non tutta entrava in reazione.

Disposi allora l'apparecchio in modo che l'ammoniaca e l'alcool penetrassero contemporaneamente nella canna, allo stato

di gas secco e di vapore anidro, avendo così fra i due corpi una maggiore intimità di unione non solo, ma un ambiente eminentemente ammoniacale. Il resto dell'apparecchio era disposto come nell'operazione precedente. Impiegai litri tre di alcool e tanta ammoniaca quanta se ne può svolgere da quindici litri liquida circa. L'operazione fu condotta esattamente come nell'esperienza sopra descritta.

Il prodotto della distillazione era rosso bruniccio, quasi nero, però non conteneva carbone; era denso, oleoso, aveva forte odore ammoniacale ed il peso greggio era di gr. 500 circa. Tutti gli altri caratteri e proprietà corrispondevano con il prodotto ottenuto nella prima operazione.

In questa seconda esperienza si produsse una forte quantità di carbonato d'ammonio; l'acido cloridrico non aveva fissato che l'ammoniaca e niente di metilammine, etilammine, ecc.

Procedetti per l'estrazione delle basi similmente come feci nell'operazione precedente. Con gli estratti eterei acidi, cioè, esportai via dapprima la parte oleosa, che pur vi si contenea e che aveva tutti i caratteri e le proprietà della precedente. Alcalinizzai il residuo con potassa in eccesso ed estrassi parimenti con etere, ottenendo così una discreta quantità (gr. 8 circa) di una sostanza fortemente alcalina e di odore alquanto spiccato di piridina. La distillai: raccolsi una prima porzione bollente verso i 100° (*A*); una seconda dai 100°—160° (*C*) ed una terza dai 160°—190° (*B*): in queste due ultime però la sostanza subì, imbrunendosi, una forte decomposizione, svolgendo intenso odore ammoniacale e deponendo, lungo la canna dell'apparecchio distillatorio, cristalli di carbonato d'ammonio.

La porzione (*A*) evaporata in presenza di acido cloridrico lasciò un piccolo residuo di una cristallizzazione in forma di massa radiata, igroscopica, che richiamava quella del cloridrato di piridina. Colla potassa infatti svolse odore penetrantissimo e tutto proprio della piridina. Al pari di questa precipitò in bei cristalli prismatici appiattiti di un arancio vivo col cloruro di platino, in aghiformi gialli col cloruro d'oro, in aghiformi parimenti coll'acido picrico e così con tutti gli altri reattivi mostrossi perfettamente identica con la piridina. La trasformai tutta in cloroaurato, ma la tenuissima quantità ottenutane non mi permise alcuna analisi.

Le porzioni (*C*) e (*B*) erano liquidi quasi incolori, che imbru-

nivano all'aria, alcalini, di odore fortemente ammoniacali. Molte delle loro proprietà corrispondevano con quelle della collidina di Baeyer e di Wurtz, ma io non l'ho potuta da essi ottenere allo stato di purezza. I loro cloroplatinati erano cristallizzati e solubilissimi.

La parte oleosa, che fu separata innanzi alle basi, con gli estratti eterei acidi, lasciò deporre, come la precedente, de' bei cristalli bianchi aghiformi. Ne raccolsi circa gr. 18 e li purificai con varie cristallizzazioni dall'etere. La sostanza così ottenuta fonde a 67°—68°, è solubilissima in tutti i solventi, alcool, etere, cloroformio, benzina, ecc. e un poco meno nell'acqua e da tutti ricristallizza bene. Trattata a caldo con potassa svolge forte odore di ammoniaca e a caldo parimenti reagisce col nitrato d'argento, formando un precipitato, che si ridiscioglie nell'acido nitrico bollente.

All'analisi diede i risultati seguenti:

I. gr. 0,1555 di sost. secca fornirono gr. 0,3355 di anidride carbonica;

II. gr. 0,2404 di sost. secca fornirono gr. 0,5200 di anidride carbonica e gr. 0,1730 di acqua;

III. gr. 0,1207 di sost. secca fornirono gr. 0,2590 di anidride carbonica e gr. 0,0845 di acqua;

IV. gr. 0,2572 di sost. secca, bruciati con cromato di piombo, fornirono gr. 0,5512 di anidride carbonica e gr. 0,1700 di acqua;

V. gr. 0,1454 di sost. secca fornirono gr. 0,3513 di $Pt$ (col metodo Will e Varrentrapp);

Da cui la composizione centesimale seguente:

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| $C =$ | 58,84; | 58,99; | 58,52 | 58,45; | — |
| $H =$ | — | 7,99; | 7,77 | 7,34; | — |
| $N =$ | — | — | — | — | 34,33. |

Numeri questi che conducono alla formula

$$C^6 H^9 N^3$$

per la quale si calcola:

$$C = \ldots \; 58,54$$
$$H = \ldots \; 7,32$$
$$N = \ldots \; 34,14$$
$$100,00.$$

La composizione e tutte le proprietà dimostrano che questo corpo è l'*imidopropionitrile* $NH\,(CH^3\,CH\,CN)^2$, che Erlenmeyer e Passavant (1) ottennero facendo agire l'acido solforico e l'acido cianidrico sull'aldeide-ammoniaca.

La materia oleosa rimasta, stando lungo tempo ancora sull'acido solforico, cristallizzò in gran parte, deponendo ancora dell'*imidopropionitrile*.

*Solfato d'imidopropionitrile.* — Una porzione della materia oleosa trattata con acido solforico diluito fornisce un magma cristallino, che viene convenientemente purificato per pressione fra carta e quindi con varie cristallizzazioni dall'alcool. È in bei cristalli prismatici splendenti, solubilissimo nell'acqua con parziale scomposizione, insolubile nell'etere, solubile a caldo nell'alcool, donde cristallizza. La soluzione acquosa non dà reazioni di alcaloidi. Scaldato si scompone verso i 120°. Fu disseccato sull'acido solforico, poi analizzato:

Gr. 0,2205 di sost. secca, bruciati con cromato di piombo, fornirono gr. 0,3405 di anidride carbonica e gr. 0,1213 di acqua.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato per $(C^6H^9N^3)^2H^2SO^4$ |
|---|---|---|
| $C = \ldots$ | 42,11 | 41,86 |
| $H = \ldots$ | 6,11 | 5,81. |

*Cloridrato d'imidopropionitrile.* — Trattando in egual modo la massa oleosa con acido cloridrico si ottiene un precipitato cristallino, che dopo conveniente purificazione si presenta in lamelle esagonali. È solubilissimo nell'acqua con parziale scomposizione, insolubile nell'etere e solubile a caldo nell'alcool, donde

(1) *Ann. der Chem.*, t. 199-200, p. 124.

cristallizza. Scaldato si scompone verso i 120°. Stando a sè all'aria ed alla luce si decompone. Ha tutte le proprietà ed i caratteri del *cloridrato d'imidopropionitrile*, che ho anche preparato direttamente dall'imidopropionitrile puro, procedendo nel modo indicato da Erlenmeyer e Passavant (1).

All'analisi si comportò come segue:

Gr. 0,3128 di sost. secca, bruciati con cromato di piombo, fornirono gr. 0,5200 di anidride carbonica e gr. 0,1890 di acqua.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato per $C^6H^9N^3HCl$ |
|---|---|---|
| $C$=..... | 45,34 | 45,14 |
| $H$=..... | 6,71 | 6,27. |

*Cloroplatinato d'imidopropionitrile.* — Nell'ipotesi che nella parte oleosa, che non cristallizza o cristallizza difficilmente, si trovasse l'*amidopropionitrile*, da cui si fosse generato poi l'*imidopropionitrile*, mediante la perdita di una molecola di ammoniaca, ho proceduto alla ricerca di detto composto, operando come è indicato da Erlenmeyer e Passavant, cioè sciogliendo l'olio nell'etere, disseccando la soluzione eterea con cloruro di calcio e saturando poi con acido cloridrico. Ebbi così un precipitato cristallino, che raccolsi e sciolsi poi in poc'acqua, vi aggiunsi una soluzione concentratissima di cloruro di platino e lasciai evaporare sull'acido solforico. Dopo vario tempo raccolsi un precipitato cristallino giallo chiaro, solubilissimo nell'acqua e poco solubile in una soluzione alcoolico-eterea. Seccato convenientemente e sottoposto ad analisi si comportò come segue:

Gr. 0,2480 di sost. secca calcinati fornirono gr. 0,0772 di platino metallico.

Da cui:

| | Trovato | Calcolato per $(C^6H^9N^3HCl)^2PtCl^4$ |
|---|---|---|
| $Pt$=.... | 31,12 | 30,00. |

Il composto però non fu potuto ottenere in un grande stato di purezza.

---

(1) Loc. cit.

Come si vede non si è trovato nei prodotti della reazione l'amidopropionitrile, per la cui formula del cloroplatinato $(C^3H^3N^2HCl)^2 PtCl^4$ si calcola $Pt = 35,69$.

L'*imidopropionitrile* ottenuta si è formata in condizioni assai diverse da quelle indicate da Erlenmeyer e Passavant. Probabilmente la reazione ha avuto luogo direttamente fra l'acido cianidrico e l'aldeide-ammoniaca, producendosi prima l'*amidopropionitrile*, e quindi l'*imidopropionitrile* mediante la perdita di una molecola di ammoniaca.

$$\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CHNH^2 \\ | \\ CN \end{array} + \begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CHNH^2 \\ | \\ CN \end{array} = \begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CH-NH- \\ | \\ CN \end{array} \begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CH \\ | \\ CN. \end{array} + NH^3$$

Per l'azione dell'ammoniaca sull'alcool etilico nelle condizioni descritte si producono quindi i composti azotati seguenti:

1° *Piridina.*

2° *Basi piridiniche*, tra le quali probabilmente la *Collidina* di Baeyer e di Wurtz.

3° *Imidopropionitrile* di Erlenmeyer e Passavant.

Altre esperienze con altri alcoli saranno fatte in seguito.

Torino, R. Università. Laboratorio del Prof. GUARESCHI
Luglio 1883.

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio presenta due lavori manoscritti, uno « *Sulla Geometria della retta e delle sue serie quadratiche* » del signor Dott. Corrado Segre: l'altro del signor Dott. Gino Loria, intitolato « *Ricerche intorno alla Geometria della sfera e loro applicazioni allo studio ed alla classificazione delle superficie* ». Questi lavori, destinati alla stampa nei volumi delle *Memorie*, sono consegnati a due Commissioni incaricate di esaminarli e riferirne in una prossima adunanza.

**Adunanza del 30 Dicembre 1883.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio, condeputato coi Soci Cav. Prov. Bruno e Maggiore Prof. F. Siacci ad esaminare la Memoria del signor Dott. Corrado Segre presentatasi nell'ultima adunanza « *Sulla Geometria della retta e delle sue serie quadratiche* », legge la seguente

# RELAZIONE

Questa Memoria fa seguito alla precedente dello stesso Dottor Segre intitolata « *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* », della quale fu recentemente deliberata la stampa nelle Memorie della nostra Accademia.

L'A. si propone di trattare la Geometria dello spazio rigato come applicazione della teoria delle quadriche di un numero qualunque di dimensioni. Definita la retta come elemento di una quadrica non specializzata a 4 dimensioni, il punto e il piano compaiono come spazi lineari a due dimensioni contenuti nella quadrica; e non essendovi altri di tali spazi oltre $\infty^3$ punti e $\infty^3$ piani, e presentandosi essi in condizioni eguali, la legge di dualità geometrica si trova pienamente spiegata. I complessi dirette, le congruenze e le rigate si presentano come spazi a 3, 2, 1 dimensione contenuti nella quadrica.

Fondandosi su queste definizioni, l'A. espone le proprietà dei complessi e congruenze di 1° grado e delle rigate di 2° grado; dà alcuni cenni sulle rigate in generale e in particolare di 3° e 4° grado, che sono di due specie; indi passa alla generazione dei complessi e congruenze di 2° grado e delle rigate di 4° grado

e 1ª specie, considerando questi tre enti come quartiche a 3, 2, 1 dimensione, ed applicando così la teoria delle quartiche esposte nella Memoria precedente.

Ciò posto, l'A. si occupa della polarità nei complessi di 2° grado, delle rette singolari e delle superficie singolari di tali complessi, delle serie di complessi di 2° grado omofocali, degli invarianti assoluti dei singoli complessi di 2° grado. Segue un'analoga ricerca sulla congruenza di 2° grado, in quanto alla polarità, alle rette singolari ed alla superficie focale, nonchè alle serie di congruenze di 2° grado omofocali e loro curva singolare. Indi sono date le proprietà di una rigata di 4° grado e 1ª specie, delle sue generatrici singolari e iperboliche, e delle serie omofocali di tali rigate.

Nel corso di queste sue ricerche l'A. ha occasione di ritrovare, ma con nuovo ed uniforme procedimento, i principali risultati già acquisiti alla geometria della retta, aggiungendone parecchi nuovi ed importanti.

Merita soprattutto attenzione la classificazione dei complessi di 2° grado, delle congruenze di 2° grado e delle rigate di 4° grado e 1ª specie, con cui l'A. chiude il suo lavoro, come applicazione della classificazione delle quartiche fatta nella Memoria precedente in base al metodo de' divisori elementari del Weierstrass. I complessi di 2° grado vengono divisi in 7 classi, suddivise in 49 specie, di ciascuna delle quali si danno le proprietà caratteristiche, e una delle quali comprende il complesso di Battaglini; l'A. ha cura di rettificare alcune asserzioni del Weiler, che con lo stesso principio, ma con procedimenti meno eleganti e appropriati, aveva data questa classificazione. La classificazione delle congruenze di 2° grado, che è nuova, conduce a 39 specie.

La Commissione è di avviso che questo lavoro sia dotato degli stessi pregi che essa ebbe a rilevare nella precedente Memoria, della quale anzi porge una illustrazione assai interessante e feconda; e però ne propone la lettura alla Classe.

G. Bruno.

F. Siacci.

E. D'Ovidio, *Relatore*.

Lo stesso Socio D'Ovidio, condeputato coi Soci Bruno e Siacci ad esaminare la Memoria del signor Dott. Gino Loria che era stata presentata nell'ultima adunanza, intitolata « *Ricerche sulla Geometria della sfera, e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di 4° ordine aventi per linea doppia il centro immaginario all'infinito* », legge la seguente

# RELAZIONE

L'insieme delle sfere nello spazio ordinario costituisce una varietà o spazio a quattro dimensioni, come l'insieme delle rette: e la connessione fra la Geometria delle sfere e quella delle rette fu già notata e utilizzata dal Lie ed altri. Ciò che il D.r Loria si è proposto in questo lavoro, si è di studiare lo spazio di sfere applicando la teoria generale degli spazi lineari a più dimensioni. Lo spazio di punti e quello de' piani sono contenuti in quello di sfere, e vi costituiscono il primo una quadrica a tre dimensioni, il secondo uno spazio lineare (un piano); e però la Geometria dello spazio di punti e la Geometria dello spazio di piani si presentano subordinate a quella dello spazio di sfere.

La Memoria è divisa in tre parti.

Nella prima parte l'A. stabilisce il sistema di coordinate per le sfere e ne assegna il significato geometrico, con che viene ad associare ad un gruppo di cinque sfere fondamentali un secondo gruppo di cinque sfere assai interessante. Nota che, se la quadrica dei punti si sceglie per assoluto, si ha una metrica iperbolica, e l'angolo di due sfere si presenta come distanza fra due elementi della varietà (Cremona).

Nella seconda parte sono studiati i sistemi lineari e quadratici di sfere. — Un sistema o complesso lineare consta delle sfere ortogonali a una data, la quale proprietà conduce fra le altre conseguenze ad alcuni teoremi enunciati dal Moutard. — Un complesso quadratico di sfere contiene $\infty^3$ fasci di sfere. La teoria della polarità per un tal complesso conduce agl'invarianti dei sistemi

lineari di sfere (e della quadrica dei punti). Un complesso quadratico ha poi un invariante, il cui annullarsi specializza una o due volte il complesso. — Un fascio di complessi quadratici avendo per base una congruenza di 4° grado, la considerazione dei complessi speciali del fascio serve a classificare le congruenze di 4° grado. Fra queste è notevole quella dei punti-sfere di un complesso quadratico, che è la superficie detta *ciclide* dal DARBOUX, della quale l'A. dimostra così le principali proprietà, circa la generazione come luogo di punti e come inviluppo di sfere, i piani bitangenti, le rette sulla superficie, le curve focali, i fuochi: e dà l'espressione generale del sistema di ciclidi omofocali già considerato dal REYE.

La terza parte della Memoria è dedicata alla classificazione delle ciclidi, non esaurita dalle ricerche del DARBOUX e del CASEY. Col metodo dei divisori elementari del WEIERSTRASS, l'A. assegna le forme canoniche delle due equazioni della ciclide come congruenza; e trova che vi sono 18 specie di ciclidi non trasformabili l'una nell'altra, sia per proiezione sia per raggi vettori reciproci. Espone le singolarità per ogni specie, la disposizione delle rette, le proprietà focali e i modi di generazione. Osservando che fra le ciclidi omofocali a una data vi è almeno una superficie di 3° ordine viene a classificare anche le ciclidi di 3° ordine, e per proiezione le superficie tutte di 3° ordine, con sostanziale accordo con lo SCHLAEFLI.

Le precedenti indicazioni mostrano come sia importante l'argomento della Memoria del D.r LORIA, e come questa contenga risultati interessanti per novità e importanza, ottenuti con procedimento uniforme e fecondo.

E però la Commissione propone alla Classe la lettura della Memoria stessa.

G. BRUNO.
F. SIACCI.
E. D'OVIDIO, *Relatore*.

In questa medesima adunanza si diede lettura dei due lavori sopraccennati, e la Classe con votazione regolare ne approvò la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta e legge la seguente Nota del Cav. Ermenegildo Rotondi, Prof. nel R. Museo industriale italiano:

## RICERCHE DI CHIMICA ELETTROLITICA

# ELETTROLISI DELL'OLIO D'ANILINA.

L'olio d'anilina (1) non subisce alterazione sensibile allorquando si assoggetta, mediante elettrodi di platino, all'azione della corrente elettrica fornita da sei elementi Grenet atti a produrre 175 centim. cub. di gas idrogeno all'ora, ma se si rende fortemente alcalino il liquido con ammoniaca (50 parti d'olio d'anilina, 200 di acqua e 5 di soluzione concentrata d'ammoniaca) avviene immediatamente l'elettrolisi; un abbondante svolgimento di idrogeno si osserva al polo negativo, mentre al positivo, ove lo svolgimento di gas è quasi nullo, si forma dapprima una sostanza rossastra, ed in seguito, dopo tre giorni di continuata elettrolisi si ottiene una sostanza nera d'aspetto catramoso, ed un liquido colorato in rosso avente una leggiera reazione alcalina. Questo fatto, prova che l'ammoniaca è stata per la massima parte decomposta dalla corrente, e che la sostanza che si è formata non può essere un sale di rosanilina.

Il residuo catramoso, ottenuto nel modo anzidetto, dopo d'averlo separato dalla parte liquida si trattò con circa sei litri d'acqua bollente. Si ebbe così un residuo insolubile *R*, ed una soluzione rossa, che evaporata a piccolo volume a bagno maria diede un liquido *a* che colora la lana in un bel rosso (campione 1 e 2) ed un residuo *b*, di colore brunastro solubile nell'acido cloridrico in rossastro, e che colora la lana in rosso vinoso (campione 3).

(1) L'olio d'anilina impiegato in queste esperienze bolliva a 185 gradi centig.

☛ La Tavola III va unita alla Memoria del Prof. Rotondi sull'*Elettrolisi dell'olio d'anilina*, pag. 142, pubblicata nel fascicolo degli *Atti* di Novembre-Dicembre 1883.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Detta soluzione cloridrica, è probabilmente una miscela della sostanza *a* con altri principii gialli e bruni di cui vedremo in seguito.

Il residuo *R* trattato con alcool a 90 gradi Gay-Lussac, lascia un residuo insolubile $R_1$, e fornisce una soluzione *c* brunastra che colora la lana in bruno (campione 4-5-6). Se alla soluzione *c* si aggiunge $^1/_{10}$ del proprio volume di acqua, ed indi si elimina l'alcool col colore, si ha un liquido che tinge la lana in rosso vinoso (campione 7-8), ed un residuo d'aspetto metallico solubile in acido cloridrico, che colora la lana in nocciuola (campione 9). Questi fatti provano che la sostanza *c* è una miscela del principio *a* con altri gialli o bruni.

Colla distillazione secca, il residuo *R* somministra alcuni prodotti liquidi di color giallognolo, ed altri solidi incolori quasi insolubili nell'acqua, ma che si disciolgono facilmente nell'acido cloridrico diluito formando soluzioni rossastre, oppure nell'acido cloridrico o solforico concentrato, dando origini a soluzioni verdi, le quali però diventano rosse coll'aggiunta di acqua.

Il residuo *R*, lavato ripetutamente con alcool etere e acido cloridrico diluito, lascia un nuovo residuo $R_2$ nero, che ha tutti i caratteri del nero elettrolittico ottenuto da Federico Goppelsroeder impiegando sali di anilina. Detto residuo $R_2$, trattato con acido cloridrico concentrato, specialmente in tubi chiusi alla temperatura di 110 gradi si modifica, e collo svaporamento dell'acido fornisce un residuo poco solubile nell'acqua, ma che coll'alcool dà un liquido violaceo *f*, che colora la lana in nero rossastro (campione 10).

La soluzione *f* consta di più principii coloranti; aggiungendovi infatti ammoniaca e riscaldando, si ottiene un precipitato nerastro ed un liquido che colora la lana in bruno rossastro (campione 11). Il precipitato formatosi, che è solubile nell'alcool, specialmente acidificato con acido cloridrico, tinge la lana in bleu nerastro (campione 12), o in cinereo, a seconda che la tintura si eseguisce in presenza d'alcali oppure d'acido acetico.

L'azione dell'elettrolisi sopra l'olio d'anilina non produce, come si potrebbe supporre rosanilina; infatti le proprietà della materia colorante rossa *a* sono diverse. Essa si scioglie nell'acqua ed è inalterabile dagli acidi ed alcali diluiti; si colora in verde cogli acidi concentrati, specialmente il solforico, per riprendere il color rosso primitivo mediante diluzione con acqua, precipita le soluzioni d'acido picrico, e fornisce una sostanza violacea, che

probabilmente è fenilsaffranina, allorquando si tratta la soluzione con anilina. Detto prodotto colora la lana in violaceo. Tutte queste proprietà provano in modo evidente la formazione del gruppo delle saffranine, e che quindi, l'azione della corrente elettrica sull'olio d'anilina in presenza di ammoniaca è quella di dar origine a sostanze azoiche, la cui formazione, prescindendo dalle reazioni secondarie, si può facilmente spiegare, perchè l'ammoniaca, sottomessa all'elettrolisi nelle condizioni in cui si fecero le esperienze, dà origine a composti nitrosi, e quindi alle seguenti possibili reazioni:

1. Alla formazione di diazocomposti. Per il nitrato di anilina la reazione sarebbe:

$$C_6H_5 . NH_2 . NO_3H + NO_2H = C_6H_5 . N_2 . NO_3 + 2\,H_2O$$

nitrato di diazobenzina.

2. Formazione di diazoammido composti provenienti dall'azione dell'ammido sull'acido nitroso o sul nitrato del diazocomposto. Nel caso d'impiego d'anilina pura le reazioni sarebbero:

$$2\,C_6H_5 . NH_2 + NO_2H$$
$$= C_6H_5 . N_2 . NH . C_6H_5 + 2\,H_2O$$

diazoammido benzina.

$$C_6H_5 . N_2 . NO_3 + C_6H_5 . NH_2$$
$$= C_6H_5 . N_2 . NH . C_6H_5 + NO_3H\ .$$

3. Formazione di azocomposti per diretta ossidazione dell'ammido. Per l'anilina pura si avrebbe:

$$2\,C_6H_5 . NH_2 + 2\,O = 2\,H_2O + C_6H_5N_2C_6H_5$$

azobenzina.

4. Formazione di ammidoazoderivati per trasformazione molecolare dei diazoammido composti (ciò che come è noto avviene facilmente per la diazoammido benzina), oppure per riduzione dei nitroazocomposti. Nel caso di nitroazobenzina si avrebbe:

$$C_6H_5N_2C_6H_4 . NO_2 + 6\,H$$
$$= C_6H_5 . N_2C_6H_4 . NH_2 + 2\,H_2O$$

ammidoazobenzina.

Reazioni analoghe possono avvenire per la toluidina, e quindi i composti ad essa corrispondenti si saranno formati nell'elettrolisi dell'olio d'anilina impiegata nelle fatte esperienze, perchè conteneva toluidina, come lo indica il suo punto d'ebullizione.

È noto che l'anilina in determinate condizioni può dare svolgimento di ammoniaca; infatti:

$$C_6H_5NH_2 + 2H = C_6H_6 + NH_3.$$

È logico il supporre che tale reazione avvenga allorquando si elettrolizza l'anilina in presenza di idrato potassico; infatti le esperienze eseguite provarono, che sostituendo detta base all'ammoniaca nell'operazione dell'elettrolisi, si ottengono gli identici composti.

Premessi questi fatti, si comprende come l'elettrolisi dell'olio d'anilina in presenza di idrato ammonico o potassico possa dare origine alla formazione di saffranina, e come sia logico il supporre che le materie gialle e brune che unitamente ad essa si formano appartengono al gruppo dei corpi azoici.

Esposti per ora sommariamente questi primi risultati, è mio intendimento di tentare la separazione dei principali composti che si ottengono dall'olio d'anilina messo in condizioni diverse, perchè la facilità colla quale si formano le diverse materie coloranti, potrebbero trovare utili applicazioni nella tintoria e nella stampa dei tessuti.

Dal Laboratorio di Chimica del R. Museo industriale italiano.

Torino, 1883.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta ancora e legge la seguente Nota del Prof. Rotondi:

# RICERCHE CHIMICHE
# SOPRA I SAPONI.

L'azione che l'acqua esercita sopra i saponi, e le cause del loro potere detersivo, non furono fino ad ora oggetto di ricerche speciali. — Ordinariamente si ritiene per fondata l'opinione di Berzelius, il quale suppone, che l'impiego dei saponi nel ripulimento dei tessuti dipenda dalle seguenti cause:

1. Dalla facilità colla quale i saponi neutri si decompongono coll'acqua fredda in saponi acidi ed alcali libero.

2. Sulla proprietà emulsionante che hanno i saponi per le sostanze grasse.

La prima di dette ipotesi, dedotta dalle esperienze di Chevreul (1), è contraddetta dai fatti. Se essa fosse l'espressione della verità, il lavaggio col sapone non sarebbe che un mezzo molto costoso per procurarsi una liscivia diluita, ed inoltre, le soluzioni bollenti di sapone che non si decomporrebbero, dovrebbero avere un potere detersivo più debole in confronto delle soluzioni fredde, il che è in contraddizione coi fatti forniti dall'esperienza.

In risposta a tali obbiezioni, il Persoz (2) ed altri suppongono, che i saponi neutri siano solubili senza decomporsi in acqua calda, e che in presenza di acqua fredda, si scindano in saponi basici ed in saponi acidi. I primi avrebbero la proprietà di saponificare i corpi grassi rendendoli solubili, mentre i secondi invilupperebbero i prodotti che si sono formati per l'azione del sapone basico, ed

(1) *Études sur les corps gras.* Annales de Chim et de Phys., vol. II.
(2) *Traité théorique et pratique de l'impression des tissus*, v. I.

impedirebbero al sucidume di aderire nuovamente alle fibre. Anche tale ipotesi è difettosa, non spiegando come le soluzioni calde di sapone siano più attive delle fredde, ed è inoltre priva di fondamento, perchè non venne fino ad ora sperimentalmente provata l'azione saponificante del sapone basico sui corpi grassi, e quella emulsionante dei saponi acidi.

Recentemente il sig. Stanley Jevon (1), tentò di spiegare l'azione detersiva dei saponi con un' ipotesi in fondo identica a quella di Persoz, nella quale però vi introdusse un nuovo concetto, affatto ipotetico, di un movimento oscillatorio fra le particelle di sapone, che avrebbe per effetto di asportare dalle fibre da detergere le sostanze grasse che le inquinano.

La questione di conoscere le cause del potere detersivo dei saponi mi parve abbastanza importante per farne oggetto di studio. Perciò, si preparò del sapone puro disciogliendo in alcool a 95 gradi Gay-Lussac del sapone di buona qualità (ottenuto precipitando con cloruro di sodio una soluzione di sapone di Marsiglia), e trattando per due volte nell'identica maniera il residuo fornito dall'evaporazione della soluzione alcoolica. — Si ebbe così un sapone completamente solubile in acqua bollente, avente reazione alcalina sulla carta di tornasole, ma privo di idrato e carbonato alcalino, del che mi accertai analizzando il liquido ottenuto dalla filtrazione di una soluzione di detto sapone, dopo d'averla trattata con cloruro di sodio.

Il sapone preparato nel modo anzidetto aveva la composizione seguente:

| Elementi determinati | 100 parti di sapone essiccato | |
|---|---|---|
| | all'aria | sopra ac. solforico |
| Acqua ..... | 29. 41 | — |
| Acidi grassi (2) fusibili a 41 5 *C* | 64. 90 | 91. 43 |
| Ossido di sodio ..... | 7. 82 | 11. 32 |
| Sostanze minerali diverse ..... | 0. 16 | 0. 31 |

(1) *Scientific American Supplement*, 1878.
(2) Essiccati nel vuoto in presenza d'acido solforico.

Con detto sapone si fecero soluzioni di differente concentrazione, le quali, messe in condizioni diverse, si sottoposero alla dialisi in apparecchi chiusi di 30 cent. quad. di superficie dializzante. Le esperienze fatte con tale indirizzo furono le seguenti:

1. 100 grammi di sapone ridotto in piccolissimi pezzi, e messi in un litro d'acqua distillata, si dializzarono per 30 giorni alla temperatura di 15 gradi.

2. 100 grammi sapone messi in due litri d'acqua distillata si trattarono come nel caso precedente.

3. 100 grammi di sapone disciolti in due litri di acqua bollente si dializzarono per 30 giorni alla temperatura di 15 gradi.

4. 100 grammi di sapone messi in un mezzo litro d'acqua distillata, si dializzarono per 30 giorni mantenendo per sei ore di ciascun giorno la temperatura a 80 gradi.

Alla fine del tempo indicato nelle predette esperienze, si evaporarono separatamente a bagno maria i liquidi dializzati e non dializzati, ed i residui ottenuti essiccati nel vuoto in presenza di acido solforico diedero all'analisi i seguenti risultati:

| Esperienza | Ossido di sodio contenuto nel residuo lasciato dal liquido | |
|---|---|---|
| | dializzato | non dializzato |
| 1 | 15. 06 | 10. 81 |
| 2 | 15. 34 | 10. 74 |
| 3 | 16 12 | 9. 56 |
| 4 | 15 58 | 9. 33 |

La quantità di sapone dializzato, specialmente nelle esperienze 1 — 2, fu assai piccola in confronto di quello non dializzato.

I residui dell'evaporazione dei liquidi dializzati sono solubili in acqua calda, e le soluzioni non intorbidano col raffreddamento che dopo d'averle lasciate esposte all'aria per alcuni giorni. I residui invece provenienti dai liquidi non dializzati, sono pure solubili nell'acqua calda ma intorbidano immediatamente col raffreddamento. Continuando la dialisi per lunghissimo tempo, si arriva ad avere per residuo non dializzabile una sostanza quasi insolubile anche a caldo.

Siccome i liquidi dializzati non contengono alcali libero, le esperienze fatte conducono alle seguenti conclusioni:

1. I saponi neutri a base alcalina ($C_n H_{2n-1} MO_2$), sono decomposti dall'acqua in saponi basici ($C_n H_{2n-1} MO_2 OMH$), solubili sia a freddo che a caldo nell'acqua, ed in saponi acidi ($C_n H_{2n-1} MO_2 C_n H_{2n} O_2$), che sono pochissimo solubili a caldo ed insolubili a freddo.

2. La decomposizione del sapone neutro è più facile in presenza di acqua calda che di acqua fredda, ed avviene in tempo più o meno lungo, a seconda della concentrazione del liquido e delle condizioni di temperatura.

3. I saponi basici dializzano facilmente, mentre i saponi acidi non godono di tale proprietà.

4. La soluzione di sapone basico ottenuta colla dialisi, potendo contenere anche sapone neutro, può decomporsi ulteriormente in sapone acido e basico, e ciò fino a tanto che la soluzione resta formata esclusivamente di sapone basico, che si può separare dal sapone acido colla dialisi.

5. I saponi neutri decomponendosi in presenza dell'acqua, non danno nè idrato nè carbonato alcalino, il che si prova precipitando le soluzioni dei saponi basici con cloruro di sodio, ed analizzando il liquido separato colla filtrazione.

L'azione che l'acqua esercita sopra i saponi, si studiò anche senza ricorrere alla dialisi. Perciò, preparata a caldo una soluzione formata con 100 grammi di sapone e un litro d'acqua distillata, si lasciò per 24 ore in matraccio aperto, ed indi si separò colla filtrazione un sapone insolubile *a* ed un liquido *b*.

Il sapone *a*, essiccato nel vuoto in presenza di acido solforico, diede un residuo contenente il 10,17 p. $^0/_0$ di ossido di sodio. Detto residuo, è completamente solubile nell'acqua bollente, ma col raffreddamento e successiva filtrazione, fornisce un sapone insolubile, che contiene il 6,11 p. $^0/_0$ d'ossido di sodio.

La soluzione *b*, che lascia coll'evaporazione un residuo contenente il 14,12 p. $^0/_0$ di ossido di sodio, abbandonata in matraccio aperto diede origine ad una sostanza d'aspetto filamentoso, la quale, separata colla filtrazione dopo quindici giorni, ed essiccata nel vuoto sopra acido solforico, conteneva il 7,84 p. $^0/_0$ di ossido di sodio. Il liquido da cui si separò la predetta sostanza, e che lasciò nell'evaporazione un residuo contenente il 15,97 p. $^0/_0$ di alcali, abbandonato per altri quindici giorni in matraccio aperto,

fornì una nuova quantità di materia insolubile, ed un liquido, che separato a mezzo della filtrazione e lasciato esposto all'aria, non diede più precipitato. — Il residuo dell'evaporazione di detto liquido contiene il 16,21 p. % di ossido di sodio; esso è completamente solubile nell'acqua fredda, ha una reazione fortemente alcalina, precipita completamente col cloruro di sodio, e dopo separato colla filtrazione il sapone precipitato, diede un liquido esente d'idrato e carbonato alcalino. Come si vede, i risultati di queste esperienze concordano con quelli forniti dalle soluzioni di sapone dializzato.

La proprietà del sapone basico, ossia delle soluzioni di sapone completamente solubili nell'acqua fredda, ed ottenute dalla separazione dei saponi acidi che si formano trattando con acqua i saponi neutri, sono le seguenti:

1. I saponi basici sono completamente solubili nell'acqua fredda, mentre i saponi acidi lo sono pochissimo anche in acqua calda.

2. I saponi basici precipitano completamente con cloruro di sodio senza che venga messo in libertà dell'alcali.

3. Le soluzioni acquose di sapone basico, specialmente a caldo, danno coll'acido oleico ed altri acidi grassi un liquido limpido, anche dopo il raffreddamento, qualora il sapone basico sia stato impiegato in quantità conveniente. Se la soluzione si lascia a contatto dell'aria, dopo alcuni giorni può intorbidare, e ciò perchè la miscela di sapone basico e neutro formatasi, si scinde per dare sapone acido e sapone basico.

4. I saponi basici sciolgono a caldo i saponi acidi, e le soluzioni che se ne ottengono, intorbidano col raffreddamento in un tempo più o meno lungo, a seconda della quantità di sapone basico impiegato per una data quantità di sapone acido. È per questa ragione che i saponi ordinari sono solubili nell'acqua calda, quantunque da essa decomposti in saponi basici e acidi, in modo più completo che dall'acqua fredda.

5. Le soluzioni acquose e fredde di sapone basico non si combinano, ma emulsionano i corpi grassi; colla triolina si ottiene una massa bianca che ha l'aspetto di panna battuta assai consistente, e che si conserva tale per più mesi senza che in essa si separino particelle oleose. Il riscaldamento non produce alcun cambiamento nella massa, ma se si aggiunge alcool a 80 gradi Gay-Lussac, la materia grassa si porta alla superficie di un liquido limpido,

il quale non contenendo glicerina, prova contrariamente a quanto oggidì si ammette, che non ebbe luogo saponificazione, ma soltanto emulsionamento della materia grassa.

I saponi neutri ordinari, quantunque in grado minore, godono della stessa proprietà emulsionante specialmente a caldo, e ciò probabilmente perchè si decompongono in saponi basici ed in saponi acidi più facilmente che a freddo. Anche in questo caso non ha però luogo saponificazione, perchè separando con alcool la sostanza grassa nel modo detto precedentemente, non si trova glicerina nella soluzione alcoolica. — I saponi acidi, anche a caldo, sono privi, o godono solo in grado piccolissimo del potere emulsionante.

6. Se una soluzione acquosa e fredda di sapone basico è attraversata da una corrente di acido carbonico, si forma un liquido lattiginoso, che coll'esposizione all'aria, col calore, o coll'aggiunta di alcool si rende trasparente. Colla filtrazione si ottiene invece difficilmente un liquido limpido, dal quale però il cloruro di sodio precipita completamente il sapone che tiene in sospensione o disciolto, e fornisce un liquido esente d'alcali e carbonato alcalino.

L'azione dell'acido carbonico sopra i saponi basici, parmi potersi spiegare ammettendo che essi siano nella soluzione di detto acido meno solubili, oppure che si formi del carbonato sodico, il quale non si renderebbe libero, ma si unirebbe al sapone neutro formatosi per dare origine a un nuovo composto meno solubile e di costituzione analoga a quella dei saponi basici, in cui però l'idrato alcalino sarebbe sostituito dal carbonato. — Siccome si può induttivamente ammettere, che i composti insolubili, forniti dall'azione dell'acido carbonico sopra i saponi basici, siano dotati d'un potere detersivo minore dei saponi basici e neutri, si comprende il perchè, le acque ricche in acido carbonico (indipendentemente dai sali terrosi che contengono), non siano le più adatte per l'impiego dei saponi nell'industria.

La decomposizione dei saponi neutri in acidi ed alcalini, mi sembra che possa avvenire in modo analogo a quello che si verifica per altri composti della serie grassa, come per esempio per alcuni acetati, che a freddo, ma specialmente a caldo, danno miscele di sali basici e di acido acetico libero. Nel caso dei saponi neutri si avrebbe invece un sapone acido insolubile, non potendo l'acido rendersi libero ed essere eliminato coll'ebollizione, ed un sapone basico solubile, incapace di scomporsi fino al punto di dare ossido

alcalino per la ragione sopra indicata. Trattando però il liquido con vapore a conveniente temperatura si avrebbe per residuo l'idrato alcalino e distillerebbe l'acido grasso.

Le cose dette, oltre insegnarci il perchè le soluzioni calde di sapone sono più attive delle fredde, ci spiegano pure le anomalie che si osservano nelle proprietà e nella potenza detersiva di saponi fatti colle stesse materie prime ed impiegate nelle stesse proporzioni; avviene ad esempio, che dall'impiego di saponi aventi la stessa composizione chimica, si ottengono in certe operazioni industriali risultati differenti. — Queste anomalie si spiegano ammettendo, che i saponi, anche esenti d'alcali libero, possono contenere del sapone acido e del sapone basico. Questi fatti provano l'importanza d'alcuni precetti dati dai pratici nella fabbricazione dei saponi, i quali mirano essenzialmente ad ottenere non solo saponi privi d'alcali libero, ma formati possibilmente da solo sapone neutro, perchè anche la presenza di molto sapone basico può essere dannosa in alcune industrie, come ad esempio nella sgommatura della seta.

In un recente lavoro, Oscar Scheurer (1), ebbe a rilevare un fatto molto importante e che viene a confermare le cose sopra esposte. Esso provò che il metodo di cottura dei saponi influisce nell'avere un prodotto perfetto, perchè i saponi neutri sarebbero la conseguenza della combinazione di un sapone basico con un sapone acido, i quali si formerebbero come prodotti primi nel processo di fabbricazione dei saponi.

Rammentando che i saponi basici sono completamente precipitati dal cloruro di sodio, si comprende facilmente come vi possono essere saponi commerciali privi d'alcali libero, e che contengono una quantità di base maggiore di quella che corrisponde a un sapone neutro, e come saponi preparati con una quantità di base insufficiente per formare un sale neutro, possono essere più attivi dei saponi neutri. Tali fatti, si devono aver presenti nell'analisi dei saponi, allorquando si vuole stabilire se l'impiego di un sapone è conveniente per una data operazione industriale.

In appoggio alle esperienze eseguite si può conchiudere che l'azione detersiva dei saponi è una conseguenza dei seguenti fatti:

1. L'acqua, specialmente a caldo, decompone i saponi neutri in saponi basici ed in saponi acidi senza formazione d'alcali libero.

---

(1) *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*, V. LII.

2. Le soluzioni dei saponi basici sciolgono i saponi acidi e gli acidi grassi liberi, ed emulsionano i corpi grassi neutri senza saponificarli.

3. I saponi acidi non sciolgono e non emulsionano, nè gli acidi grassi, nè i corpi grassi neutri.

4. L'acido carbonico rende insolubili i saponi basici senza che vi sia formazione d'alcali libero.

Dal Laboratorio di Chimica del Regio Museo Industriale Italiano. — Torino 1883.

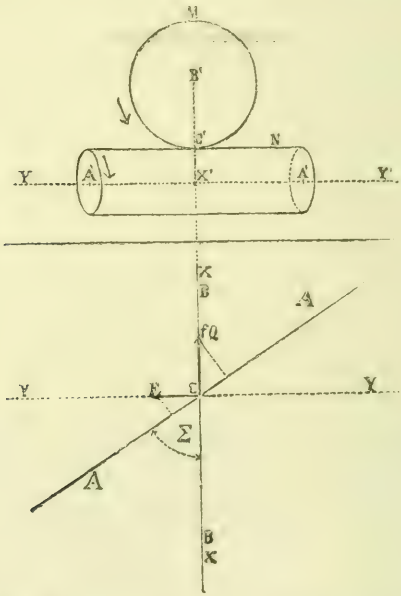
☞ La Tavola III, unita alla Memoria del Prof. Rotondi sull'*Elettrolisi dell'olio d'anilina*, pag. 142, uscirà nel prossimo fascicolo degli *Atti*.

Il Socio Comm. Prof. G. Curioni presenta e legge la seguente Nota del signor Ing. Scipione Cappa,

# SUL LIMITE DELL'ADERENZA

## che si può svolgere fra due cilindri ad assi qualunque che si trasmettono il movimento rotatorio.

In questa nota mi sono proposto di determinare il limite della forza di aderenza che si può svolgere fra due cilindri aventi gli assi comunque diretti e che si trasmettono il movimento ro-




tatorio. Siano $M$, $N$ due cilindri a sezione retta circolare, volubili intorno ai loro assi e trasmettentisi il movimento rotatorio per sola aderenza; sia $CC'$ il loro punto di contatto, $\varepsilon$ l'angolo qualunque fatto dai loro assi $AA'$, $A'A$, $BB$, $B'B'$, $R$ il

raggio del cilindro superiore $M$ che supporremo essere il condotto, $r$ il raggio del cilindro inferiore $N$ che supporremo essere il conduttore.

Potremo anzitutto stabilire la relazione che passa tra le velocità angolari dei due sistemi, ricordando che in altra Memoria (*) si è dimostrato come, avendosi due sistemi di forma invariabile rotanti intorno ad assi aventi direzioni qualunque e trasmettentisi il movimento direttamente ovvero per mezzo di un tirante di lunghezza invariabile, le velocità angolari dei due sistemi stiano tra loro in ragione inversa dei prodotti delle minime distanze della linea d'azione dagli assi pei seni dei rispettivi angoli fatti da questa linea d'azione cogli assi stessi. E come per conseguenza supposto che i due sistemi rotanti si riducano a due circoli centrati sugli assi ed ammesso ancora che l'aderenza faccia per la trasmissione del movimento l'uffizio che farebbe un tirante, il quale passando pel punto di contatto dei due circoli, giacesse nel piano parallelo ai due assi ed avesse la direzione del moto del sistema condotto, la velocità angolare del sistema condotto stia a quella del conduttore come il prodotto del raggio del circolo conduttore pel coseno dell'angolo fatto dai due assi sta al raggio del circolo condotto.

Ammettendo quindi pel caso che ora consideriamo la stessa ipotesi, detti $\varphi$ e $\psi$ gli angoli descritti nel medesimo tempo rispettivamente dal cilindro conduttore e dal cilindro condotto, avremo per la relazione che determina il rapporto delle velocità angolari dei due sistemi la seguente:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{r \cos \varepsilon}{R} .$$

Ciò premesso stabiliamo l'equazione di equilibrio del cilindro conduttore considerato mentre ha luogo la comunicazione del movimento fra i due cilindri.

Sia perciò $P$ la potenza applicata al sistema conduttore con direzione normale all'asse dello stesso sistema ed $a$ il suo braccio; sia $Q$ la mutua pressione dei due cilindri, $f$ il coefficiente di

(*) *Sulla trasmissione del movimento fra due assi qualunque.* — Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVIII, adunanza del 24 Giugno 1883

attrito di prima specie ed $F$ la forza di aderenza che si svolge fra i due cilindri. Se si immagina che i due cilindri rotino attorno ai loro assi descrivendo rispettivamente gli angoli $\varphi$ e $\psi$, gli è chiaro che la rotazione che subisce il punto di contatto $CC'$ dei due cilindri considerato come appartenente al sistema conduttore, si può ritenere come risultante di due rotazioni fatte attorno a due assi $XX$ $X'X'$, $YY$ $Y'Y'$ posti coll'asse del cilindro conduttore nello stesso piano parallelo all'asse del cilindro condotto, incontrantisi nel piede della perpendicolare calata su questo piano dal punto $CC'$ e parallelo l'uno all'asse del cilindro condotto, perpendicolare l'altro allo stesso asse del cilindro condotto.

In virtù della rotazione attorno all'asse $XX$ $X'X'$ parallelo a quello del cilindro condotto, il punto $CC'$ descriverà uno spazio che sarà uguale allo spazio descritto dallo stesso punto $CC'$ considerato come appartenente al cilindro condotto mentre questo descrive l'angolo $\psi$, essendochè nella direzione normale all'asse del cilindro condotto non vi deve essere scorrimento di un cilindro sull'altro. In virtù invece della rotazione attorno all'asse $YY$ $Y'Y'$ perpendicolare a quello del cilindro condotto, il punto $CC'$ considerato come appartenente al sistema conduttore subirà uno scorrimento lungo la generatrice del cilindro condotto che si proietta in $C'$. In questo scorrimento si svilupperà quindi una resistenza di attrito il cui valore sarà dato da

$$fQ\,.$$

Al movimento del sistema conduttore si oppongono perciò la forza di aderenza che abbiamo indicata con $F$ e che è applicata nel punto $CC'$ in direzione perpendicolare all'asse del cilindro condotto e la resistenza di attrito $fQ$ applicata anch'essa nel punto $CC'$ con direzione parallela all'asse del sistema condotto. Per l'equilibrio del sistema conduttore, astrazione fatta dagli attriti che si sviluppano nei pulvinari che sostengono l'albero su cui sarà calettato il cilindro, dovrà essere nulla la somma dei momenti rispetto al suo asse, delle forze $P$, $F$, $fQ$ che lo sollecitano, ossia avvertendo che le proiezioni delle forze $F$ ed $fQ$ sopra un piano perpendicolare all'asse $AA$ $A'A'$ del cilindro conduttore sono rispettivamente date da:

$$F\cos\varepsilon \qquad fQ\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$$

e quindi i loro momenti rispetto allo stesso asse sono:

$$rF\cos\varepsilon \qquad\qquad rfQ\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$$

dovrà sussistere l'equazione:

$$aP = rF\cos\varepsilon + rfQ\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$$

donde si trae:

$$P = (F\cos\varepsilon + fQ\,\mathrm{sen})\,\varepsilon\frac{r}{a}\,.$$

Evidentemente la forza di aderenza $F$ si svolge più o meno intensa a seconda delle maggiori o minori resistenze che si oppongono al movimento del sistema condotto, il quale si può supporre impiegato, a cagion d'esempio a sollevare un peso più o meno grande, mediante una fune avviluppata attorno al cilindro condotto stesso. Se il peso da sollevarsi sarà nullo, facendo qui pure astrazione dagli attriti che si svolgono nei pulvinari del cilindro condotto, anche l'aderenza $F$ sarà nulla, ma a misura che il peso da sollevarsi dal sistema condotto crescerà; crescerà eziandio la forza di aderenza $F$, e come si vede dalla equazione stabilita, crescerà parimente la potenza $P$ da applicarsi al sistema conduttore.

Se però le resistenze che si oppongono al movimento del cilindro condotto aumenteranno oltre un certo limite, è facile capire che mentre il cilindro conduttore roterà attorno al suo asse, non avrà più luogo la comunicazione di movimento, ma si farà invece lo scorrimento del cilindro inferiore sotto al cilindro superiore, che resterà immobile.

Noi potremo scrivere l'equazione di equilibrio delle forze applicate al cilindro inferiore quando non ha luogo la comunicazione di movimento fra i due cilindri, avvertendo che in questo caso in cui il cilindro superiore resta immobile mentre quello inferiore gira attorno al suo asse, al movimento di questo cilindro inferiore si oppone l'attrito di prima specie $fQ$ che si sviluppa fra i due cilindri e che ha direzione contraria al moto del sistema conduttore, cioè perpendicolare all'asse del cilindro conduttore stesso. Detta quindi $P'$ la potenza da applicarsi al cilindro inferiore con braccio $a$ per fare equilibrio alla resistenza di attrito, sussisterà l'equazione:

$$aP' = fQ\,.\,r$$

donde:

$$P' = f Q \frac{r}{a}.$$

Ricordando ora quanto si è precedentemente osservato che cioè col crescere delle resistenze che si oppongono al moto del sistema condotto, cresce la forza di aderenza $F$ necessaria per vincere quelle resistenze stesse e la potenza $P$ da applicarsi al sistema conduttore, è facile lo scorgere che potrà giungere il punto in cui questa potenza $P$ diventerà uguale a $P'$ ossia ad

$$f Q \frac{r}{a}.$$

Prima di giungere a questo punto avrà sempre avuto luogo la comunicazione di movimento fra i due cilindri, ed è chiaro che quando la potenza $P$ avrà raggiunto il valore $P'$, potrà succedere indifferentemente la comunicazione o la non comunicazione di movimento fra i due cilindri. Sarà allora:

$$P = f Q \frac{r}{a} = (F \cos \varepsilon + f Q \operatorname{sen} \varepsilon) \frac{r}{a}$$

ossia:

$$f Q = f \cos \varepsilon + f Q \operatorname{sen} \varepsilon$$

donde

$$F = f Q \frac{1 - \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \varepsilon}.$$

Questo pertanto è il valore limite della forza di aderenza che si può svolgere fra i due cilindri, poichè se le resistenze che si oppongono al movimento del sistema condotto aumentassero ancora, e quindi divenissero tali da richiedere per essere vinte lo sviluppo di una forza di aderenza ancora maggiore di quella testè trovata, non si farebbe più la comunicazione di movimento fra i due cilindri, ma avverrebbe invece lo scorrimento del cilindro inferiore $N$ sotto il superiore $M$ il quale resterebbe immobile. Oppure quando prevalesse il peso attaccato alla fune avvolta sul cilindro superiore, questo verrebbe a concepire un movimento in senso contrario a quello che il cilindro inferiore tenderebbe a comunicargli.

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio presenta e legge la seguente Memoria del signor Dott. Corrado Segre.

SULLE

# GEOMETRIE METRICHE

## DEI COMPLESSI LINEARI E DELLE SFERE

E

## SULLE LORO MUTUE ANALOGIE.

In seguito ai lavori di Lie e di Klein (*) è noto che la geometria dello spazio ordinario, quando si prende per gruppo fondamentale di trasformazioni (**) il gruppo delle inversioni (o trasformazioni per raggi reciproci) si può considerare come identica alla geometria proiettiva di un complesso lineare. Ai punti dello spazio ordinario corrispondono le rette del complesso lineare, alle sfere ed ai circoli di quello le congruenze lineari e le rigate quadriche (*Regelschaaren*) di questo. Come in un fascio di sfere vi sono due sfere singolari o sfere nulle, così in un fascio di congruenze lineari contenute nel complesso lineare vi sono due congruenze lineari speciali (dalle direttrici coincidenti). — Se invece di considerare le rette di un complesso lineare si considerano tutte le rette dello spazio, le analogie

(*) V. Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen, Bd. V, pag. 145-256. — Klein, *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann. Bd. V, pag. 257-277. — Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872.

(**) Pel concetto importantissimo, e forse non abbastanza noto, del gruppo fondamentale di trasformazioni veggansi i lavori citati di Klein ed inoltre la sua seconda Memoria: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann. Bd. VI, pag. 112-145.

facendo astrazione dal numero delle dimensioni degli spazi considerati, rimangono ancora perfettamente: la geometria *proiettiva* dello spazio di rette e dei complessi lineari di queste corrisponde perfettamente alla geometria *delle inversioni* dello spazio ordinario di punti e delle sfere. La ragione intima di queste analogie sta nel fatto che tanto l'una quanto l'altra geometria equivalgono alla geometria di uno spazio lineare risp. a 5 ed a 4 dimensioni, in cui il gruppo fondamentale di trasformazioni consta delle trasformazioni lineari che non mutano una quadrica fissa non degenere risp. a 4 ed a 3 dimensioni, la quale nell'un caso ha per elemento ciò che si suol chiamare *retta*, nell'altro caso ciò che si suol chiamare *punto*. In altri termini quelle due geometrie non sono altro che le *geometrie metriche* di spazi lineari risp. a 5 ed a 4 dimensioni, quando in ciascuno di questi spazi si prenda per *assoluto* una quadrica non specializzata. In questo modo si vede anche che se si considera l'*angolo* (o *distanza*) di due complessi lineari colla quadrica di rette per assoluto, vale a dire coll'introduzione del rapporto anarmonico determinato da due tali complessi coi due complessi speciali del loro fascio, a questo *angolo* corrisponde appunto l'*angolo* di due sfere inteso nel senso ordinario, poichè è noto (*) che quest'angolo corrisponde appunto all'assumere per assoluto nello spazio di sfere la quadrica dei punti-sfere.

Ma la ricerca di analogie tra le geometrie metriche *ordinarie* (*euclidee*) delle rette e dei punti non pare che finora sia stata fatta: eppure tali analogie esistono e non sono meno notevoli che quelle dianzi accennate tra la geometria proiettiva delle rette e la geometria delle inversioni dei punti. Noi ci proponiamo appunto di mostrarle in questa nota: vedremo come esse siano tali che la geometria metrica ordinaria dei punti e delle sfere può considerarsi come caso particolare di quella delle rette e dei complessi lineari, quando si scambino tra loro le parole *punto* e *retta*, *sfera* e *complesso lineare*. E il fondamento di queste analogie verrà da noi trovato nel fatto che entrambe quelle geometrie metriche ammettono, per così dire, due *assoluti*, dei quali l'uno è la quadrica di rette o la qua-

(*) V. Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* (Atti della R. Accademia dei Lincei, tomo 3°, serie 2ª, numero 27).

drica dei punti, e l'altro è nella geometria metrica delle rette una quadrica degenere, la quale determina il complesso delle rette secanti l'assoluto euclideo, e nella geometria metrica dei punti l'insieme di quelle sfere che si riducono a piani. Ora questi secondi assoluti, rappresentati risp. da una nuova quadrica e da un piano, sono tali che questo può considerarsi come caso particolare di quello. Analiticamente poi giungeremo allo stesso risultato in conseguenza del fatto che, usando coordinate lineari generali di sfere e di complessi lineari (e, come casi particolari, di punti e di rette), vedremo che l'espressione del momento di due rette, ovvero del prodotto della distanza di queste per la tangente del loro angolo, si riduce, con una particolarizzazione delle funzioni che vi entrano, all'espressione della distanza di due punti in coordinate pentasferiche generali. Indi stabiliremo alcuni dei teoremi più noti e più importanti riguardanti i complessi lineari, i loro assi, i loro parametri, i loro mutui momenti, ecc., mediante l'uso delle coordinate più generali di retta e di complesso lineare, cosa che non crediamo sia stata fatta finora (poichè quei teoremi furono tutti dimostrati o sinteticamente, o analiticamente, ma coll'uso di sistemi di coordinate assai particolari (*)), e che costituisce pure uno scopo della presente nota. La generalità del sistema di riferimento vedremo accrescere eleganza alle dimostrazioni senza renderle più lunghe: così noi troveremo senza difficoltà le coordinate più generali dell'asse di un complesso lineare dato e ne dedurremo le più importanti proprietà di questo asse. Come casi particolari poi delle proposizioni e delle formule così trovate, avremo delle proposizioni e delle formule riguardanti la geometria metrica delle sfere, le quali anzi varranno per uno spazio euclideo ad un numero qualunque di dimensioni. Vedremo ad esempio che all'asse e al parametro di un complesso lineare corrispondono il centro ed il quadrato del raggio di una sfera, e che alla relazione

(*) Per dimostrazioni sintetiche di quei teoremi sui complessi lineari v. Reye, *Geometrie der Lage* (2te Auflage, 2te Abtheilung, pag. 69-77), e D'Ovidio, *Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVI, 1881). Per dimostrazioni analitiche poi veggasi la *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker e la Memoria di Drach, *Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe* (Math. Ann. II, pag. 126-139).

nota tra l'angolo di due sfere, i loro raggi e la distanza dei loro centri corrisponde una relazione, che crediamo nuova, tra l'*angolo* di due complessi lineari, i loro parametri e le quantità determinanti la posizione relativa dei loro assi.

## § 1.

Le sfere dello spazio ordinario formano una varietà lineare a 4 dimensioni, di cui i fasci costituiscono i sistemi lineari semplicemente infiniti, le stelle costituiscono i sistemi lineari doppiamente infiniti, ecc. Esse si possono dunque considerare come rappresentate dai *piani* (spazi lineari a 3 dimensioni) di uno spazio lineare a 4 dimensioni $S_4$. I fasci di sfere saranno rappresentati dai fasci di *piani* di questo spazio, e siccome in ciascuno di essi vi sono due *sfere nulle*, cioè sfere degenerate in coni, ed una sola sfera di raggio infinito, cioè ridotta ad un piano (ed al piano all'infinito), così conchiudiamo che in $S_4$ i *piani* rappresentanti le sfere nulle inviluppano una quadrica (a 3 dimensioni) $R$, ed i *piani* rappresentanti le sfere infinite, cioè rappresentanti i piani dello spazio ordinario, passano per un elemento fisso $a$. Siccome *non* esiste una sfera nulla, tale che ogni altra sfera nulla determini con essa un fascio di sfere nulle, così la quadrica $R$ non può essere degenere, cioè avere un piano doppio (*). Vi sono però delle sfere notevoli in quanto che godono della proprietà di essere nello stesso tempo sfere nulle e sfere infinite: le sfere cioè che si compongono, oltre che del piano all'infinito, di un piano tangente all'assoluto euclideo (cerchio imaginario all'infinito). Queste sfere formano $\infty^1$ fasci, ciascuno dei quali corrisponde ad un punto di contatto di questo assoluto, punto che va riguardato come centro di tutte le sfere di quel fascio; e tutti quei fasci hanno poi comune una sfera, quella che si riduce al piano all'infinito contato doppiamente. Vediamo così come nello spazio $S_4$ i *piani* passanti per $a$ e tangenti ad

(*) Per la proposizione su cui qui ci basiamo e per altre, di cui dovremo servirci, riguardanti la teoria generale delle quadriche, ci sia permesso rinviare il lettore alla nostra Memoria: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, che si sta stampando nelle Memorie di quest'Accademia.

$R$ formano un solo sistema di $\infty^1$ fasci aventi tutti comune un *piano* $\alpha$ corrispondente a quella sfera: donde segue immediatamente che l'elemento $a$ sta su $R$ ed ha questo *piano* $\alpha$ per *piano* tangente. — I punti dello spazio ordinario essendo in generale centri di sfere nulle da essi individuate potremo intenderli rappresentati dai piani tangenti ad $R$ che rappresentano queste sfere nulle, o meglio ancora dagli elementi di contatto di quei piani con $R$. In questo modo i punti dello spazio ordinario saranno rappresentati univocamente nello spazio $S_4$ dagli elementi di $R$, i quali perciò chiameremo anche *punti*. Però siccome nello spazio ordinario tutti i punti all'infinito sono centri di una stessa sfera nulla, il piano all'infinito doppio, ed inoltre ogni punto il quale oltre ad essere all'infinito stia sull'assoluto euclideo può considerarsi come centro di un fascio di sfere composte del piano all'infinito e di piani tangenti all'assoluto nel punto stesso, così l'elemento $a$ di $R$ rappresenterà nello stesso tempo tutti i punti all'infinito dello spazio ordinario, mentre ogni punto all'infinito posto sull'assoluto euclideo sarà rappresentato da una $\infty^1$ di elementi di $R$ formanti un *raggio* passante per $a$ e giacente nell'intersezione di $R$ con $\alpha$ (*). — Notiamo poi che nello spazio ordinario due sfere sono ortogonali quando sono coniugate armoniche rispetto alle due sfere nulle del loro fascio: dunque in $S_4$ i *piani* rappresentanti due sfere sono coniugati rispetto alla quadrica $R$ quando queste sfere sono ortogonali. In particolare, se l'una delle sfere è nulla la condizione perchè l'altra ne contenga il centro, sarà che il punto di contatto con $R$ del *piano* rappresentante la prima sfera stia sul *piano* rappresentante la seconda. Ne segue immediatamente che i punti dello spazio ordinario i quali stanno su una sfera sono rappresentati in $S_4$ dai punti di $R$ posti sul *piano* rappresentante quella sfera; cosicchè in questo modo di vedere le sfere dello spazio ordinario, considerate come luoghi di punti, figurano in $S_4$ come le *sezioni piane* della quadrica $S$ a 3 dimensioni. Quelle tra queste sezioni che hanno un punto doppio, cioè che sono fatte con *piani* tangenti ad $R$, costituiscono le

(*) Tutti questi risultati sulla rappresentazione dello spazio ordinario di punti in una quadrica a 3 dimensioni furono ottenuti dal Klein nei lavori citati mediante una *proiezione stereografica;* qui abbiamo voluto mostrare un modo diretto di trovarli.

sfere nulle e quei punti doppi sono precisamente i punti doppi o centri di queste sfere. Quelle sezioni invece che passano per $a$ costituiscono le sfere ridotte a piani. I *piani* poi di $S_4$ i quali passano per $a$ e sono tangenti ad $R$ (in punti posti, per conseguenza, sul *piano* $\alpha$), e le sezioni che i *piani* stessi determinano in $R$, rappresentano quelle sfere dello spazio ordinario le quali si riducono a piani tangenti all'assoluto euclideo (sfere di raggio indeterminato). — Similmente è chiaro che ogni spazio lineare a 2 dimensioni contenuto in $S_4$ taglierà $R$ secondo gli $\infty^1$ punti di un cerchio, il quale si ridurrà ad una coppia di rette secanti l'assoluto euclideo, cioè di *rette nulle*, se quello spazio è tangente ad $R$, e ad una retta qualunque insieme con una retta all'infinito se quello spazio passa per $a$. Si vede pure che gli $\infty^3$ *raggi* (spazi lineari ad 1 dimensione) contenuti in $R$ costituiscono nello spazio ordinario il complesso delle rette nulle o secanti dell assoluto, perocchè ciascuno di essi contiene un punto dell intersezione di $R$ con $\alpha$, cioè un punto dell'assoluto.

Ciò premesso, assumiamo un sistema qualunque di 5 coordinate lineari omogenee $x_1, x_2, \ldots x_5$ per gli elementi dello spazio $S_4$: allora la quadrica $R$ avrà una certa equazione quadratica:

$$R_{xx} = \Sigma R_{ik} x_i x_k = 0 \ .$$

ed il *piano* $\alpha$ avrà una cert'altra equazione lineare:

$$\alpha_x = \Sigma \alpha_l x_l = 0 \ .$$

e siccome queste due superficie devono essere tangenti, tra i coefficienti $R_{ik}$ ed $\alpha_l$ passerà questa (sola) relazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_k & R_{ik} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

I punti dello spazio ordinario avranno così 5 coordinate omogenee $x_i$, soddisfacienti però alla condizione $R_{xx} = 0$. Se poniamo

$$R_{xx'} = \Sigma \frac{1}{2} \frac{\partial R_{xx}}{\partial x_i} x_i' = \Sigma R_{ik} x_i' x_k \ ,$$

allora la condizione, perchè i due punti $x, x'$ stiano su una stessa retta nulla, sarà che essi siano coniugati rispetto ad $R$, cioè che

$R_{xx'}=0$. Ogni punto $x$ all'infinito sarà poi caratterizzato, per quanto dicemmo, dal soddisfare oltre che l'equazione $R_{xx}=0$ l'equazione lineare $\alpha_x=0$.

I punti che stanno su una sfera soddisferanno ad un'equazione lineare tra le $x_i$. Se i coefficienti di quest'equazione si rappresentano con $R_{ci}=\frac{1}{2}\frac{\partial R_{cc}}{\partial c_i}$ (il che si può sempre fare poichè il discriminante di $R$ non è nullo), vale a dire se quest'equazione si scrive così:

$$R_{cx}=\Sigma R_{ci}\,x_i=\Sigma R_{ik}\,c_k\,x_i=0\ ,$$

noi diremo che le $c_i$ sono le *coordinate* di quella sfera: in altri termini noi assumeremo come coordinate di una sfera determinata dall'intersezione di $R$ con un certo *piano* le coordinate del polo di questo *piano* rispetto ad $R$. La sfera $c$ si ridurrà ad una sfera nulla, il cui centro avrà le stesse $c_i$ per coordinate, se $R_{cc}=0$, e si ridurrà ad un piano dello spazio ordinario (col piano all'infinito) quando $\alpha_c=0$.

L'*angolo* $\widehat{cc'}$ di due sfere di coordinate $c_i$, $c_i'$, nel senso ordinario di quella parola, coincide, come già notammo, colla *distanza* (nel senso di Cayley e Klein) delle sfere stesse, quando per *assoluto* si prenda la quadrica delle sfere nulle (*) ed è quindi dato, per la nota formula di Cayley, dalla formula:

$$\cos\widehat{cc'}=\frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}\,R_{c'c'}}}\ .$$

Quell'angolo sarà retto se le due sfere sono ortogonali, sicchè in questo caso si avrà: $R_{cc'}=0$, condizione, che si sarebbe pure dedotta dal dover essere i due *piani* di $S_4$ rappresentanti quelle sfere coniugati rispetto ad $R$.

---

(*) Questo, che fu dimostrato analiticamente dal Cremona nella Memoria citata, risulta immediatamente per via sintetica dal fatto che le sfere di un fascio corrispondono proiettivamente ai loro piani tangenti in un punto comune, e gli angoli mutui di questi piani, cioè di quelle sfere, si ottengono, com'è noto, scegliendo per assoluto in quel fascio di piani i due piani tangenti al cerchio imaginario all'infinito, cioè i due piani tangenti nel punto considerato alle due sfere nulle del fascio.

Cerchiamo ora la distanza $\overline{xx'}$ tra due punti $x$, $x'$ di coordinate date $x_i$, $x_i'$ (soddisfacienti alle condizioni $R_{xx}=0$, $R_{x'x'}=0$). Per questo notiamo che i due punti individuano questa distanza a meno del segno, sicchè solo il quadrato della distanza sarà una funzione ad un sol valore delle $x_i$, $x_i'$. Questa funzione dovrà essere omogenea di grado zero, sia nelle $x_i$, sia nelle $x'_i$, poichè non può alterarsi se le $x_i$ ovvero le $x'_i$ si moltiplicano per un fattore qualunque. Inoltre scrivendo che la funzione stessa ha un valor dato e supponendo che le $x'_i$ siano date si deve avere l'equazione nelle $x_i$ di una sfera (di centro $x'$), cioè un'equazione la quale, tenendo conto della $R_{xx}=0$ sia lineare. Dunque quella funzione è espressa da un fratto in cui numeratore e denominatore sono forme lineari nelle $x_i$, e, per la stessa ragione, nelle $x'_i$. Ora quella funzione deve annullarsi solo quando i due punti $x, x'$ stanno su una retta nulla, cioè quando $R_{xx'}=0$, mentre essa deve diventare infinita solo quando l'uno dei due punti stessi sia all'infinito, il che accade solo, come vedemmo, quando $\alpha_x=0$ oppure $\alpha_{x'}=0$. Dunque quella funzione non può differire che per un fattor numerico da $\frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}}$. E siccome le funzioni $R_{xx}$, $\alpha_x$ non cessano, uguagliate a zero, di rappresentare gli enti visti, se vengono moltiplicate per un fattore numerico qualunque, così noi possiamo supporre che l'una o l'altra delle funzioni stesse venga moltiplicata per un tale fattore numerico che si abbia precisamente:

$$\overline{xx'}^2=\frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}} \quad (*).$$

---

(*) Benchè la via tenuta per giungere a questo risultato ci sembri preferibile, pure indicheremo un altro modo di giungervi, il quale in sostanza differisce poco da quello tenuto dal nostro caro amico Gino Loria nel suo lavoro sulle sfere. Rispetto a tre assi cartesiani ortogonali siano

$$S_i=\alpha_i(x^2+y^2+z^2)-2l_i x-2m_i y-2n_i z+p_i=0,$$

dove $i=1, 2, \ldots 5$, le equazioni di 5 sfere qualunque. Ogni altra sfera potrà rappresentarsi con $\Sigma x_i S_i=0$ e le $x_i$ si potranno perciò assumere come sue coordinate. Il quadrato del suo raggio sarà evidentemente espresso da

$$\frac{l_x^2+m_x^2+n_x^2-\alpha_x p_x}{\alpha_x^2},$$

sicchè la condizione, perchè la sfera si riduca ad un piano, sarà appunto $\alpha_x=0$, ed il numeratore poi di quel fratto sarà la nostra forma quadra-

## § 2.

Procederemo in modo simile per stabilire in coordinate generali di rette le formule fondamentali di geometria metrica della retta. La retta può considerarsi come l'elemento $x$ di una quadrica non degenere $R$ a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni $S_5$: le sue coordinate $x_i$ soddisfano dunque all'equazione di questa quadrica

$$R_{xx} = \Sigma R_{ik} x_i x_k = 0 \quad .$$

Ogni *piano* di quello spazio taglia da questa quadrica ciò che si suol chiamare un *complesso lineare* di rette: le coordinate $c_i$ del polo di quel piano rispetto alla quadrica stessa si assumeranno come *coordinate* di questo complesso lineare, cosicchè l'equazione lineare a cui soddisfano le rette del complesso lineare $c$ avrà la forma:

$$R_{cx} = \Sigma R_{ci} x_i = \Sigma R_{ik} c_k x_i = 0 \quad ,$$

e la condizione perchè il complesso lineare $c$ sia *speciale* sarà $R_{cc} = 0$.

Chiamiamo *angolo* $\widehat{cc'}$ di due complessi lineari $c$, $c'$ quell'angolo che corrisponde al prendere per assoluto la serie dei complessi lineari speciali, cioè la *distanza* degli elementi di $S_5$

---

tica $R_{xx}$, a meno di un fattor numerico arbitrario che possiamo prendere uguale a $-2$, sicchè:

$$R_{xx'} = \alpha_x p_{x'} + \alpha_{x'} p_x - 2 l_x l_{x'} - 2 m_x m_{x'} - 2 n_x n_{x'} \, .$$

Se ora si suppone che $x$, $x'$ siano due sfere di raggio nullo, allora notando che

$$\left(\frac{l_x}{\alpha_x}, \frac{m_x}{\alpha_x}, \frac{n_x}{\alpha_x}\right) \text{ e } \left(\frac{l_{x'}}{\alpha_{x'}}, \frac{m_{x'}}{\alpha_{x'}}, \frac{n_{x'}}{\alpha_{x'}}\right)$$

saranno le coordinate cartesiane dei loro centri e che $\frac{p_x}{\alpha_x}, \frac{p_{x'}}{\alpha_{x'}}$ saranno risp. le somme dei quadrati di queste coordinate, si scorge che effettivamente il quadrato della distanza di quei due centri, cioè dei due punti di coordinate pentasferiche $x_i$ $x'_i$, sarà dato da $\frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}}$ .

aventi le stesse coordinate, quando si prenda per assoluto la quadrica $R$. Sarà dunque:

$$\cos \widehat{c\,c'} = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}\,R_{c'c'}}} \; .$$

Se i due complessi $c$, $c'$ sono in involuzione, segue dalla definizione di questa che $R_{cc'} = 0$; dunque in tal caso sarà $\widehat{c\,c'} = \frac{\pi}{2}$, sicchè due complessi lineari involutori si potranno anche chiamare *complessi ortogonali*.

L'angolo di due complessi lineari è evidentemente una funzione proiettiva od invariante assoluto del sistema di questi (come l'angolo di due sfere è una funzione di queste che non muta per una trasformazione del gruppo delle inversioni). Ma veniamo a considerare funzioni veramente *metriche* di due rette o di due complessi lineari, ed a tal fine anzitutto quell'ente geometrico da cui esse hanno origine. Quest'ente è, come si sa, il complesso quadratico delle rette secanti il cerchio imaginario all'infinito. Possiamo rappresentare questo complesso con un'equazione quadratica

$$\Omega_{xx} = \Sigma\, \Omega_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \; .$$

il cui discriminante sia nullo insieme coi suoi subdeterminanti di 5° e 4° ordine: in altri termini quel complesso proviene dall'intersezione della quadrica $R$ con una quadrica $\Omega$ tre volte specializzata. Questo è conseguenza (*) del fatto che il complesso delle secanti di una conica (complesso di caratteristica [(222)] nella classificazione di Weiler) gode della proprietà caratteristica di avere per rette doppie tutte le rette di un piano, che è il piano della conica stessa. Da questo fatto segue anche che lo spazio lineare a 2 dimensioni degli elementi doppi di quella quadrica $\Omega$ doppiamente specializzata deve stare su $R$: i suoi elementi non sono altro che le rette all'infinito dello spazio ordinario. È facile scorgere che queste singolarità della quadrica $\Omega$ sia considerata da sè, sia per la sua posizione rispetto ad $R$, vengono tutte espresse dicendo che tutti i *piani* polari degli ele-

(*) V. le considerazioni sulla classificazione dei complessi quadratici di rette da noi svolte nella nostra Memoria: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, che si sta pure pubblicando tra le *Memorie* di quest'Accademia.

menti dello spazio $S_5$ rispetto ad $\Omega$ sono tra loro coniugati rispetto ad $R$ (sicchè in particolare ciascuno di essi è tangente ad $R$), vale a dire che, ponendo in generale

$$\Omega_{xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_i} \; .$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} = 0 \; .$$

qualunque siano le quantità $c_i$, $c'_i$ (coordinate di due elementi dello spazio $S_5$ o di due complessi lineari qualunque).

Volendo ora determinare le funzioni metriche di due rette $x$, $x'$ notiamo che l'angolo $\widehat{xx'}$ di esse è la *distanza* degli elementi $x$, $x'$ dello spazio $S_5$ quando in questo si prenda, come assoluto, la quadrica $\Omega$: ciò è evidente quando le rette $x$, $x'$ si tagliano e negli altri casi poi risulta dal fatto che se $x''$ è una retta qualunque parallela ad $x'$ e tagliante $x$, l'angolo di $x$, $x'$ è uguale a quello di $x$, $x''$, ed anche la *distanza* (colla quadrica $\Omega$ per assoluto) degli elementi $x$, $x'$ di $S_5$ è uguale a quella degli elementi $x$, $x''$ (poichè il parallelismo di $x''$ ed $x'$ è espresso, com'è facile vedere, dal trovarsi questi due elementi di $S_5$ in uno stesso spazio lineare a 3 dimensioni collo spazio a 2 dimensioni degli elementi doppi di $\Omega$). Ciò posto l'angolo $\widehat{xx'}$ sarà dato dalle formule:

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}} \; .$$

$$\operatorname{sen} \widehat{xx'} = \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega^2_{xx'}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}} \; , \qquad \operatorname{tg} \widehat{xx'} = \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega^2_{xx'}}}{\Omega_{xx'}} \; .$$

Per avere poi il momento delle due rette $x$, $x'$ notiamo che solo il suo quadrato è perfettamente determinato dalle coordinate di queste, e sarà una funzione razionale omogenea di grado zero delle $x_i$ e delle $x'_i$; questa funzione avrà, com'è facile vedere, numeratore e denominatore di 2° grado sia nelle $x_i$, sia nelle $x'_i$. Ora il momento non si annulla che quando le due rette si tagliano, cioè quando $R_{xx'} = 0$: e non diventa infinito, che quando almeno una delle due rette taglia l'assoluto, cioè quando $\Omega_{xx} = 0$.

oppure $\Omega_{x'x'}=0$. Dunque il quadrato di mom $(x, x')$ è dato da $\frac{R^2_{xx'}}{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}$. a meno di un fattore numerico, che si può però rendere uguale ad 1, moltiplicando tutti i coefficienti della forma $R$, o tutti quelli della forma $\Omega$ per una quantità conveniente. Si può dunque assumere:

$$\text{mom}\,(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}} \quad (*).$$

Dividendo poi questa formula per quella che dà sen $\widehat{xx'}$, si avrà la minima distanza di $x$, $x'$:

$$\text{dist.}\,(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega^2_{xx'}}}.$$

---

(*) Questi risultati si potevano anche ottenere per una via meno diretta valendosi delle formule note relative ad assi cartesiani ortogonali. Per un tale sistema di riferimento si sa che, indicando con $p_{ik}$, $p'_{ik}$ le coordinate di due rette $x$, $x'$, il loro angolo ed il loro momento saranno dati (Vedi Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, 3te Auflage, I Theil, pag. 67) da:

$$\cos\,\widehat{xx'} = \frac{p_{14}p'_{14}+p_{24}p'_{24}+p_{34}p'_{34}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}\,\sqrt{p'^2_{14}+p'^2_{24}+p'^2_{34}}}$$

$$\text{mom}\,(x, x') = \frac{p_{13}p'_{34}+p_{34}p'_{12}+p_{23}p'_{14}+p_{14}p'_{23}+p_{31}p'_{24}+p_{24}p'_{31}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}\,\sqrt{p'^2_{14}+p'^2_{24}+p'^2_{34}}}.$$

Ora se si passa ad un sistema di riferimento qualunque mediante una trasformazione lineare generale delle $p_{ik}$, $p'_{ik}$, nelle $x_l$, $x'_l$, le forme

$$p_{14}p'_{14}+p_{24}p'_{24}+p_{34}p'_{34}\,,\quad p_{12}p'_{34}+p_{34}p'_{12}+\ldots\ldots$$

diverranno risp. $\Omega_{xx'}$ e $R_{xx'}$, e quindi quelle formule diverranno appunto:

$$\cos\,\widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\,\sqrt{\Omega_{x'x'}}}\,,\qquad \text{mom}\,(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\,\sqrt{\Omega_{x'x'}}}.$$

E a questo proposito faremo notare come in vari lavori recenti si legga che il momento di due rette è proporzionale a $p_{12}p'_{34}+p_{34}p'_{12}+\ldots\ldots$ (o, in coordinate generali, ad $R_{xx'}$), il che non è esatto, poichè ciò dicendo si trascura un fattore dipendente dalle coordinate di entrambe le rette. D'altronde, siccome le coordinate, che si considerano, sono omogenee, occorre, affinchè una funzione delle coordinate di più rette abbia un significato geometrico dipendente solo da queste rette, che essa sia omogenea di grado zero in ciascuna di quelle serie di coordinate.

Dividendola invece per quella che dà $\cos \widehat{xx'}$, si avrà l'espressione del prodotto della minima distanza di $x, x'$ per la tangente del loro angolo. La radice quadrata di questo prodotto, che ci occorrerà spesso di considerare, la chiameremo per brevità *intervallo* tra le due rette $x$, $x'$ e la rappresenteremo con $\overline{xx'}$, vale a dire porremo: $\overline{xx'}^2 = \text{dist.}(x, x') \times \text{tg}\, \widehat{xx'}$. Ciò posto si avrà:

$$\overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\Omega_{xx'}} .$$

## § 3.

Noi faremo astrazione, d'or innanzi, dal numero delle dimensioni degli spazi considerati. Inoltre intenderemo che i risultati ottenuti nei due paragrafi precedenti si assumano come definizioni, vale a dire che per *punti* s'intendano gli elementi di una quadrica generale $R$, per *sfere* le intersezioni di questa coi *piani* dello spazio lineare in cui questa si trova, e che per *distanza* dei due punti $x$, $x'$ s'intenda la quantità $\overline{xx'}$ definita da:

$$\overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}} .$$

dove $\alpha_x = 0$ è un *piano* fisso tangente ad $R$, vale a dire tale che:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_k & R_{ik} \end{vmatrix} = 0 .$$

(È facile vedere che queste definizioni equivalgono a quelle ordinarie di *punti*, *sfere* e *distanze* per spazi *euclidei* non solo a 3, ma ad un numero qualunque di dimensioni). — Similmente con *rette* intenderemo gli elementi di una quadrica generale $R$, per *complessi lineari* di rette le intersezioni di questa coi *piani* dello spazio lineare ad $n$ dimensioni in cui questa si trova, per *angolo*, *momento* ed *intervallo* di due rette $x$, $x'$ le quantità $\widehat{xx'}$, $\text{mom}(x, x')$, e $\overline{xx'}$ definite dalle formule:

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}\ , \qquad \operatorname{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}\ ,$$

$$\overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\Omega_{xx'}}\ .$$

dove $\Omega_{xx} = 0$ è una quadrica avente uno spazio lineare ad $m$ dimensioni $\left(m \geqq \frac{n-1}{2}\right)$ di elementi doppi, il quale tocchi la quadrica $R$ lungo uno spazio lineare ad $n-m-1$ dimensioni; vale a dire $\Omega$ deve soddisfare alla condizione analitica che, qualunque siano le quantità $c_i$, $c_i'$ si abbia:

$$\begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Ora osserviamo che se il numero considerato $m$ diventa uguale ad $n-1$, la quadrica $\Omega$ si riduce ad un *piano*, contato doppiamente, tangente in un punto ad $R$, vale a dire diverrà:

$$\Omega_{xx} = \alpha_x^2\ .$$

dove le $\alpha_i$ soddisfano alla condizione:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_k & R_{ik} \end{vmatrix} = 0\ .$$

che si può pure dedurre dalla condizione precedente a cui soddisfaceva $\Omega$, notando che $\Omega_{ci}$ e $\Omega_{c'k}$ diventano $\alpha_c\alpha_i$ e $\alpha_{c'}\alpha_k$, e quindi il determinante che ivi entra, diventa divisibile per $\alpha_c\alpha_{c'}$. In tal caso sarà: $\Omega_{xx'} = \sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}} = \alpha_x\alpha_{x'}$, e le formule che definiscono $\widehat{xx'}$, $\operatorname{mom}(x, x')$, $\overline{xx'}$ si ridurranno a:

$$\cos \widehat{xx'} = 1\ , \qquad \operatorname{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x\alpha_{x'}}\ , \qquad \overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x\alpha_{x'}}\ .$$

vale a dire l'angolo $\widehat{xx'}$ tra due rette qualunque $x$, $x'$ varrà sempre zero, mentre il quadrato dell'intervallo $\overline{xx'}$ ed il momento delle rette stesse si riducono entrambi all'espressione $\frac{R_{xx'}}{\alpha_x\alpha_{x'}}$, che era quella del quadrato della *distanza* tra i due *punti* $x$, $x'$. Di qui deduciamo la seguente proposizione, che è l'oggetto principale della presente nota:

*La geometria metrica delle rette e dei complessi lineari include come caso particolare la geometria metrica dei punti e delle sfere* (*). *Si passa da una proposizione appartenente alla prima geometria ad una proposizione appartenente alla seconda cambiando le parole* rette *e* complessi lineari *in* punti *e* sfere, *uguagliando sempre a zero l'angolo di due rette e ponendo in luogo della radice quadrata del momento di due rette e in luogo del loro intervallo la distanza tra due punti.*

Noi ci proponiamo nei seguenti paragrafi di cercare colle nostre coordinate generali di retta varie formule e proprietà metriche importanti dei complessi lineari; e, applicando ogni volta il principio ora dimostrato, ne trarremo formule e proprietà metriche delle sfere.

## § 4.

Occupiamoci anzitutto della ricerca dell'asse di un complesso lineare e del centro di una sfera quando siano date le coordinate $c_i$ del complesso o della sfera. È noto che la retta $x'$ *coniugata* di $x$ rispetto al complesso lineare $c$ è definita dal fatto che i complessi lineari speciali aventi per direttrici $x$ e $x'$ fanno fascio con $c$; e così pure il punto $x'$ *coniugato* di $x$ rispetto alla sfera $c$ (cioè all'inversione rappresentata da questa sfera) è definito dal fatto che le sfere nulle $x$, $x'$ fanno fascio con $c$. Di qui si trae immediatamente che per espressioni delle coordinate di $x'$ in funzione di quelle di $x$ e di $c$ si può prendere:

$$(1) \ldots \qquad x'_i = 2\, R_{cx}\, c_i - R_{cc}\, x_i \,.$$

Ora la definizione ordinaria dell'asse $x$ di un complesso lineare $c$ equivale a questa: l'asse $x$ è tale che la sua retta coniugata $x'$ rispetto a $c$ è, considerata come complesso lineare speciale, il complesso polare di $x$ rispetto ad $\Omega$. Riducendo $\Omega$ ad $\alpha^2_x$, cioè considerando punti e sfere, questo asse $x$ diverrà il punto $x$ avente

(*) I nostri ragionamenti ci mostrano pure che, fatta astrazione del numero delle dimensioni, *la geometria metrica euclidea dei punti e delle sfere sarebbe affatto identica alla geometria metrica delle rette e dei complessi lineari dello spazio ordinario quando in quest'ultima geometria la conica costituente l'assoluto euclideo si facesse degenerare in una coppia di punti.*

per coniugato rispetto alla sfera $c$ l'elemento di contatto del *piano* $\alpha$ con $R$, vale a dire (§ 1) tutti i punti all'infinito: siccome questo punto $x$ è, come si sa, il centro della sfera $c$, così conchiudiamo che riducendo $\Omega_{xx}$ ad $x^2_x$ passeremo dall'*asse* del complesso lineare al *centro* della sfera. Supponiamo che si tratti di rette: allora la proprietà detta dell'asse $x$ del complesso lineare $c$ sarà evidentemente espressa dalle equazioni:

$$(2)\ldots\ldots \qquad \rho\,\Omega_{xk} = R_{x'k}\ ,$$

dove $\rho$ è un fattore indipendente dall'indice $k$. E siccome $x'$ rappresentando una retta all'infinito sarà un elemento doppio di $\Omega$, così dalle equazioni (1) e (2) dovrà seguire:

$$(3)\ldots\ldots \qquad \Omega_{x'k} = 0\ .$$

Tra queste varie equazioni (1), (2), e (3) elimineremo $\rho$ e le $x_i'$ nel seguente modo. Sostituendo le espressioni (1) delle $x_i'$ nelle (2) e (3) avremo:

$$(4)\ldots\ldots \qquad \rho\,\Omega_{xk} = 2\,R_{cx}\,R_{ck} - R_{cc}\,R_{xk}\ ,$$

$$(5)\ldots\ldots \qquad 2\,R_{cx}\,\Omega_{ck} - R_{cc}\,\Omega_{xk} = 0\ .$$

Da queste (4) e (5) risp. moltiplicando per $c_k$ e sommando si ha:

$$\rho\,\Omega_{cx} = R_{cc}\,R_{cx}\ , \qquad 2\,R_{cx}\,\Omega_{cc} = R_{cc}\,\Omega_{cx}\ ,$$

donde:

$$\rho = \frac{R^2_{cc}}{2\,\Omega_{cc}}\ ,$$

sicchè sostituendo nelle (4) avremo:

$$R_{cc}\,R_{xk} = 2\,R_{cx}\,R_{ck} - \frac{R^2_{cc}}{2\,\Omega_{cc}}\,\Omega_{xk}\ ,$$

ossia, in virtù delle (5):

$$R_{cc}\,R_{xk} = 2\,R_{cx}\,R_{ck} - \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}\,R_{cx}\,\Omega_{ck}\ ,$$

e, siccome possiamo moltiplicare per uno stesso fattore tutte le $x_i$, potremo anche assumere:

$$(6)\ldots\ldots \qquad R_{xk} = 2\,\Omega_{cc}\,R_{ck} - R_{cc}\,\Omega_{ck}\ .$$

Queste equazioni sono quelle che determinano l'asse $x$ del complesso lineare $c$. Esse sono nelle $x_i$ equazioni di 1° grado ad altrettante incognite ed i coefficienti di queste hanno un determinante $|R_{ik}|$, che non è nullo: quindi la risoluzione si può sempre fare. Ma conviene tenere le formule (6) senza mutazioni. Esse sono le *formule che dànno le coordinate dell'asse di un complesso lineare dato, qualunque sia il sistema di riferimento* (e più immediatamente ancora dànno i coefficienti dell'equazione di quell'asse. considerato come complesso delle rette che lo secano).

Le stesse formule si possono anche ottenere col seguente procedimento. Nello spazio $S_5$ nel quale la quadrica $R$ costituisce l'ordinario spazio di rette consideriamo l'elemento $c$ le cui coordinate $c_i$ sono quelle del complesso lineare considerato. L'asse $x$ di questo complesso è un elemento di $R$ la cui retta coniugata, cioè il secondo elemento $x'$ d'intersezione di $R$ col *raggio* che congiunge $c$ con $x$, ha per *piano* tangente ad $R$ il *piano* polare di $x$ rispetto ad $\Omega$. Ma il *piano* polare di $x$ rispetto ad $\Omega$ è, per la natura della quadrica $\Omega$, sempre tangente ad $R$ in un elemento doppio di $\Omega$: questo elemento doppio di $\Omega$ è dunque $x'$, donde segue (trovandosi $c$ ed $x$ in uno stesso raggio con $x'$) che il *piano* polare di $x$ rispetto ad $\Omega$ è lo stesso che il *piano* polare di $c$ rispetto ad $\Omega$. E come gli elementi $x$, $c$ ed $x'$ sono su uno stesso *raggio*, così i loro *piani* polari rispetto ad $R$ dovranno formare fascio, cioè dovrà essere:

$$R_{xk} = \lambda R_{ck} + \mu \Omega_{ck} .$$

Basta dunque determinare $\lambda : \mu$ in modo che realmente il *piano* di coordinate $R_{xk}$ sia tangente ad $R$, cioè che sia:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda R_{ci} + \mu \Omega_{ci} \\ \lambda R_{ck} + \mu \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} = 0 .$$

Il determinante del 1° membro si trasforma tosto nei seguenti:

$$\begin{vmatrix} -\lambda(\lambda R_{cc} + \mu \Omega_{cc}) & \lambda R_{ci} + \mu \Omega_{ci} \\ \mu \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda(\lambda R_{cc} + 2\mu \Omega_{cc}) & \mu \Omega_{ci} \\ \mu \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda R_{cc} + 2\mu \Omega_{cc}) |R_{ik}| + \mu^2 \begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} .$$

La seconda parte di quest'espressione è nulla, come vedemmo, in causa delle relazioni tra $\Omega$ ed $R$. Dunque rimane, dividendo per $-\lambda\,|R_{ik}|$, che non è nullo:

$$\lambda\, R_{cc} + 2\,\mu\,\Omega_{cc} = 0 \quad .$$

Possiamo dunque prendere $\lambda = 2\,\Omega_{cc}$, $\mu = -R_{cc}$ e sostituendo abbiamo di nuovo le formule (6) prima trovate:

$$(6). \ldots \qquad R_{xk} = 2\,\Omega_{cc}\,R_{ck} - R_{cc}\,\Omega_{ck} \quad .$$

Quando dalla geometria dei complessi lineari si passa alla geometria delle sfere, notammo come l'asse di un complesso lineare si muti nel centro di una sfera. Dunque, come caso particolare delle formule (6), abbiamo che *le coordinate $x_i$ del centro di una sfera di coordinate $c_i$ in un sistema di riferimento qualunque* sono date dalle formule seguenti:

$$(6'). \ldots \qquad R_{xk} = 2\,\alpha_c\,R_{ck} - R_{cc}\,\alpha_k \quad .$$

Applichiamo ora le formule (6) (che si potranno anche assumere come definizioni dell'asse di un complesso lineare e del centro di una sfera in ispazi euclidei a quante si vogliano dimensioni) a trovare le proprietà metriche più notevoli dei complessi lineari e delle sfere, supponendo questi enti definiti come nel § 3. Anzitutto dalle (6) segue, moltiplicandole per le $c_k$ e sommando:

$$R_{cx} = \Omega_{cc}\,R_{cc} \quad .$$

cosicchè le equazioni (5) (le quali non mutarono per effetto della moltiplicazione delle $x_i$ per uno stesso fattore, fatta per giungere alle (6)) diverranno:

$$(7). \ldots \qquad \Omega_{xk} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{ck} \quad .$$

Ciò posto, indicando con $z$ una retta qualunque del complesso $c$, sicchè $R_{cz} = 0$, avremo dalle (6) e (7) moltiplicandole per $z_k$ e sommandole rispettivamente:

$$R_{xz} = -R_{cc}\,\Omega_{cz} \quad ; \qquad \Omega_{xz} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{cz} \quad ;$$

e quindi dividendo membro a membro:

$$\frac{R_{xz}}{\Omega_{xz}} = -\frac{1}{2}\,\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}} \quad .$$

ossia:

$$\overline{xz} = \sqrt{-\tfrac{1}{2}\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}} = \text{cost.}$$

Conchiudiamo dunque, che: *Ad ogni complesso lineare c corrisponde una retta notevole x detta* asse *del complesso, la quale è definita dalle equazioni* (6) *e gode della proprietà che l'intervallo tra essa ed ogni retta del complesso è costante. Il quadrato di questo intervallo, cioè nella geometria ordinaria il prodotto costante della distanza di ogni retta del complesso dall'asse per la tangente del loro angolo, si chiama* parametro *del complesso, ed è espresso da* $-\tfrac{1}{2}\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}$.

In particolare avremo che: *Ad ogni sfera c corrisponde un punto notevole x detto* centro *della sfera, il quale è definito dalle equazioni* (6') *e gode della proprietà che la sua distanza da ogni punto della sfera è costante. Questa distanza costante dicesi* raggio *della sfera, ed il suo quadrato è espresso da* $-\tfrac{1}{2}\frac{R_{cc}}{\alpha^2_{E}}$.

In questo modo vediamo come passando dalla geometria dei complessi lineari a quella delle sfere il parametro di un complesso lineare si muti nel quadrato del raggio di una sfera.

Possiamo trovare proposizioni più generali di quelle ora viste. Consideriamo invece che una retta del complesso lineare $c$ due rette qualunque $y$, $y'$ coniugate rispetto a questo: potremo assumere, come già osservammo:

$$(8)\ldots\ldots \qquad y_i' = 2\,R_{cy}\,c_i - R_{cc}\,y_i\,.$$

Indicando sempre con $x$ l'asse, noi vogliamo calcolare la quantità dist $(x, y)$. tg $\widehat{xy'}$: sarà (v. § 2):

$$\text{dist.}\,(x\,,y)\,.\,\text{tg}\,\widehat{xy'} = \frac{R_{xy}}{\Omega_{xy'}}\frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{y'y'} - \Omega^2_{xy'}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}}\,,$$

senza tener conto del segno (*). Ora, dalle (7) abbiamo:

$$\Omega_{cx} = 2\,\Omega^2_{cc}\,, \quad \Omega_{xx} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{cx} = 4\,\Omega^3_{cc}\,, \quad \Omega_{xy} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{cy}\,,$$

(*) Parecchie delle quantità che consideriamo sono di tal natura che solo i loro valori assoluti sono determinati: questa è la ragione per cui alcune delle formule che troviamo valgono solo se si fa astrazione dai segni.

ed applicando anche le (8):

$$(9)\ldots\ldots\quad \Omega_{xy'} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{cy'} = 2\,\Omega_{cc}\,(2\,R_{cy}\,\Omega_{cc} - R_{cc}\,\Omega_{cy})\,;$$

$$\begin{aligned}\Omega_{xx}\,\Omega_{y'y'} - \Omega^2_{xy'} &= \Omega_{xx}\,(4\,R^2_{cy}\,\Omega_{cc} - 4\,R_{cy}\,R_{cc}\,\Omega_{cy} + R^2_{cc}\,\Omega_{yy}) \\ &\quad - 4\,\Omega^2_{cc}\,(4\,R^2_{cy}\,\Omega^2_{cc} - 4\,R_{cy}\,R_{cc}\,\Omega_{cy}\,\Omega_{cc} + R^2_{cc}\,\Omega^2_{cy}) \\ &= R^2_{cc}\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - 4\,\Omega^2_{cc}\,\Omega^2_{cy}) = R^2_{cc}\,(\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy})\,.\end{aligned}$$

$$(10)\ldots\ldots\quad \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{y'y'} - \Omega^2_{xy'}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}} = R_{cc}\,.$$

La (9) poi, in virtù delle (6), si riduce a:

$$\Omega_{xy'} = 2\,\Omega_{cc}\,R_{xy}\ ,$$

sicchè infine sostituendo abbiamo:

$$\operatorname{dist}(x\,,y)\,.\,\operatorname{tg} xy' = \tfrac{1}{2}\,\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}\ .$$

Dunque abbiamo il seguente teorema: *Il prodotto della distanza di una retta qualunque dello spazio dall'asse di un complesso lineare per la tangente dell'angolo che la retta coniugata fa con quest'asse ha un valor assoluto costante ed uguale a quello del parametro del complesso.*

Perchè questo teorema si possa applicare alle sfere senza ridursi ad un'identità, bisogna trasformarlo nel seguente modo. Essendo $\operatorname{dist}(x,y)\,.\,\operatorname{tg}\widehat{xy'}$ e $\operatorname{dist}(x,y')\,.\,\operatorname{tg}\widehat{xy}$ uguali al parametro, il loro prodotto sarà uguale al quadrato di questo. Ma quel prodotto vale $\operatorname{dist}(x,y)\,\operatorname{tg}\widehat{xy} \times \operatorname{dist}(x,y')\,\operatorname{tg}\widehat{xy'}$, ossia $\overline{xy}^2 \times \overline{xy'}^2$. Dunque: *il prodotto degl'intervalli tra due rette coniugate qualunque e l'asse del complesso è costante ed uguale al parametro di questo.* — Ed in particolare dunque, passando alla geometria dei punti e sfere:

*Il prodotto delle distanze di due punti qualunque coniugati rispetto ad una sfera dal centro di questa è costante ed uguale al quadrato del raggio* (*).

---

(*) Come due punti coniugati rispetto ad una sfera stanno in linea retta col centro di questa, così due rette coniugate rispetto ad un complesso lineare stanno su un paraboloide equilatero in cui l'asse di questo complesso è una generatrice *principale* (cioè passante pel vertice); sicchè questi paraboloidi

Due rette coniugate qualunque $y$, $y'$ rispetto ad un complesso lineare $c$ hanno pure una relazione semplicissima con tutte le rette di questo complesso. Sia in fatti $z$ una retta di $c$: dalle formule (8) che legano le due rette coniugate $y$, $y'$ avremo:

$$R_{y'z} = 2\, R_{cy} R_{cz} - R_{cc} R_{yz} \,.$$

ossia, essendo per ipotesi $R_{cz} = 0$ :

$$R_{y'z} = - R_{cc} R_{yz} \,,$$

dunque:

$$\frac{\text{mom}\,(z, y')}{\text{mom}\,(z, y)} = \frac{R_{y'z}}{\sqrt{\Omega_{y'y'}}} : \frac{R_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}}} = - R_{cc} \frac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{y'y'}}} \;;$$

quindi: *il rapporto dei momenti di due rette fisse coniugate rispetto ad un complesso lineare con ogni retta del complesso è costante.*

Passando alla geometria delle sfere avremo come caso particolare del teorema precedente il seguente: *Il rapporto delle distanze di due punti fissi coniugati rispetto ad una sfera da ogni punto di questa è costante.*

Quanto al primo rapporto, lo si suol chiamare *modulo* del complesso rispetto alle due rette coniugate $y, y'$ che si considerarono. Il suo valor assoluto $R_{cc} \dfrac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{y'y'}}}$ si può scrivere in virtù dell'equazione (10), così:

$$\frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{y'y'} - \Omega^2_{xy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{y'y'}}} : \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{yy}}} \,. \quad \text{ossia sen } \widehat{x\,y'} : \text{sen } \widehat{x\,y} \,.$$

---

nella geometria della retta corrispondono in certo modo alle rette punteggiate nella geometria dei punti e delle sfere. Ma senza stare a sviluppare questa corrispondenza ci limiteremo a osservare come anche al teorema noto sulla potenza di un punto rispetto ad una sfera corrisponda un teorema nella geometria della retta, il quale si può enunciare così: dato un complesso lineare $c$ ed una retta qualunque $r$, questa è generatrice principale per infiniti paraboloidi equilateri, su ciascuno dei quali stanno (nel sistema di generatrici a cui appartiene $r$) due rette del complesso $c$; orbene, il prodotto degl'intervalli tra queste due rette e la $r$ è costante. Questo prodotto non è altro che il parametro del complesso lineare di asse $r$ ed involutorio (ortogonale) a $c$, complesso rispetto al quale quelle due rette di $c$ sono sempre coniugate.

Vediamo dunque che in valor assoluto: *Il modulo di un complesso lineare rispetto ad una sua coppia di rette coniugate è dato dal rapporto dei seni degli angoli che queste fanno coll'asse del complesso.*

## § 5.

Consideriamo ora due complessi lineari $c$, $c'$, dei quali siano $x$, $x'$ gli assi. Come vedemmo, nel § precedente, questi saranno determinati dalle equazioni:

$$(1)\ldots\ldots \qquad R_{xi} = 2\,\Omega_{cc}\,R_{ci} - R_{cc}\,\Omega_{ci}\ ,$$

$$(1')\ldots\ldots \qquad R_{x'k} = 2\,\Omega_{c'c'}\,R_{c'k} - R_{c'c'}\,\Omega_{c'k}\ .$$

I due complessi $c$, $c'$ ci dànno luogo a considerare varie funzioni metriche. Anzitutto i loro parametri $r^2$, $r'^2$ saranno dati, come vedemmo, dalle formule:

$$(2)\ldots\ldots \qquad r^2 = -\tfrac{1}{2}\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}\ , \qquad r'^2 = -\tfrac{1}{2}\frac{R_{c'c'}}{\Omega_{c'c'}}\ .$$

L'angolo $\widehat{cc'}$ poi dei due complessi, quale fu definito nel § 2, sarà dato da:

$$(3)\ldots\ldots \qquad \cos\widehat{cc'} = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}}\,\sqrt{R_{c'c'}}}\ .$$

Inoltre possiamo considerare quelle funzioni che dipendono soltanto dagli assi $x$, $x'$ dei due complessi. L'angolo $\widehat{xx'}$ di questi assi è dato da:

$$\cos\widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}\ .$$

Ma le formule (7) del § precedente ci dànno, come conseguenze delle (1), (1'):

$$\Omega_{xk} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{ck}\ , \qquad \Omega_{x'k} = 2\,\Omega_{c'c'}\,\Omega_{c'k}\ ,$$

donde si trae:

$$\Omega_{xx'} = 2\,\Omega_{cc}\,\Omega_{cx'}\ , \qquad \Omega_{cx'} = 2\,\Omega_{c'c'}\,\Omega_{cc'}$$

e quindi:

$$\Omega_{xx'} = 4\,\Omega_{cc}\,\Omega_{c'c'}\,\Omega_{cc'}\ .$$

Inoltre:

$$\Omega_{xx} = 4\,\Omega_{cc}^{\ 3}\ , \qquad \Omega_{x'x'} = 4\,\Omega_{c'c'}^{\ 3}\ .$$

Dunque sostituendo si ha:

$$(4). \ldots \qquad \cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}}\,\sqrt{\Omega_{c'c'}}}\ .$$

Questa formula ci dà dunque l'angolo degli assi di due complessi lineari in funzione delle coordinate di questi. Essa si poteva anche ottenere dall'osservazione del fatto, che essa stessa ci mostra, ma che si può anche vedere facilmente per via diretta, cioè che l'angolo degli assi è uguale alla *distanza* dei due complessi, quando si prenda per assoluto la serie quadratica dei complessi soddisfacienti all'equazione $\Omega_{cc} = 0$.

Cerchiamo anche il momento dei due assi $x, x'$. È chiaro che siccome l'angolo ed il momento di $x, x'$ bastano a determinare la mutua posizione di queste due rette, e poi i valori dei parametri $r^2$, $r'^2$ dei complessi lineari $c$, $c'$, di cui esse sono gli assi, bastano a determinare $c, c'$, l'angolo $\widehat{cc'}$ di questi complessi dovrà essere determinato dalle 4 quantità dette. In altri termini è chiaro che tra le 5 quantità $\cos \widehat{cc'}$, $\cos \widehat{xx'}$, mom $(x, x')$, $r^2$, $r'^2$ dovrà passare una relazione, che noi ci proponiamo appunto di cercare. Il momento di $x, x'$ è espresso da:

$$\text{mom}\,(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\ \Omega_{x'x'}}}\ .$$

Ora, per un risultato avuto dianzi, sarà:

$$\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}} = 4\,\Omega_{cc}\,\Omega_{c'c'}\,\sqrt{\Omega_{cc}\,\Omega_{c'c'}}\ .$$

Quanto ad $R_{xx'}$ avremo dalle (1):

$$R_{xx'} = \Sigma\, x'_i\,(2\,\Omega_{cc}\,R_{ci} - R_{cc}\,\Omega_{ci})\ ,$$

sicchè eliminando le $x'_i$ tra quest'equazione e le (1'), le quali si possono scrivere:

$$2\,\Omega_{c'c'}\,R_{c'k} - R_{c'c'}\,\Omega_{c'k} = \Sigma\, x'_i\,R_{ik}\ ,$$

avremo:

$$0 = \begin{vmatrix} R_{xx'} & 2\,\Omega_{cc} R_{ci} - R_{cc}\,\Omega_{ci} \\ 2\,\Omega_{c'c'} R_{c'k} - R_{c'c'}\,\Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} R_{xx'} - 2\,\Omega_{c'c'}(2\,\Omega_{cc} R_{cc'} - R_{cc}\,\Omega_{cc'}) - R_{c'c'}\,\Omega_{c'k} & 2\,\Omega_{cc} R_{ci} - R_{cc}\,\Omega_{ci} \\ & R_{ik} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} R_{xx'} + 2\,R_{cc}\Omega_{c'c'}\Omega_{cc'} + 2\,R_{c'c'}\Omega_{cc}\Omega_{cc'} - 4\,R_{cc'}\Omega_{cc}\Omega_{c'c'} - R_{c'c'}\,\Omega_{c'k} & -R_{cc}\Omega_{ci} \\ & R_{ik} \end{vmatrix}$$

$$= (R_{xx'} + 2\,R_{cc}\,\Omega_{c'c'}\,\Omega_{cc'} + 2\,R_{c'c'}\Omega_{cc}\,\Omega_{cc'} - 4\,R_{cc'}\,\Omega_{cc}\,\Omega_{c'c'})\,|\,R_{ik}\,| +$$

$$+ R_{cc}\,R_{c'c'} \begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} .$$

In causa delle relazioni tra $\Omega$ ed $R$ vedemmo che la seconda parte di quest'espressione è nulla, qualunque siano le quantità $c_l$, $c'_l$. Rimane dunque:

$$0 = R_{xx'} + 2\,R_{cc}\,\Omega_{c'c'}\Omega_{cc'} + 2\,R_{c'c'}\,\Omega_{cc}\,\Omega_{cc'} - 4\,R_{cc'}\,\Omega_{cc}\,\Omega_{c'c'} .$$

Sostituendo nell'espressione di mom $(x, x')$ il valore, che di quì si trae, di $R_{xx'}$ ed il valore dianzi trovato di $\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}$ avremo:

$$\text{mom}\,(x\,,\,x') = \left( -\frac{1}{2}\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}} - \frac{1}{2}\frac{R_{c'c'}}{\Omega_{c'c'}} \right) \frac{\Omega_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}\,\Omega_{cc'}}} + \frac{R_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}\,\Omega_{c'c'}}} .$$

Applicando dunque le formule (2), (3), (4) e notando che:

$$\frac{R_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}}\,\sqrt{\Omega_{c'c'}}} = 2\,\frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}}\,\sqrt{R_{c'c'}}} \sqrt{-\frac{1}{2}\frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}}\,\sqrt{-\frac{1}{2}\frac{R_{c'c'}}{\Omega_{c'c'}}} ,$$

avremo la relazione cercata, cioè (scegliendo convenientemente i segni dei radicali):

(5). . . $\quad \text{mom}\,(x\,,\,x') = (r^2 + r'^2)\cos \widehat{xx'} - 2\,r\,r' \cos \widehat{cc'}$ .

Questa relazione assai notevole, e che crediamo nuova, lega le funzioni metriche del sistema di due complessi lineari. Se invece del momento dei due assi $x$, $x'$ si volesse il loro intervallo $\overline{xx'}$, si avrebbe dividendo la (5) per $\cos \widehat{xx'}$:

(6). . . . . $\quad \overline{xx'}^2 = r^2 + r'^2 - 2\,r\,r' \dfrac{\cos \widehat{cc'}}{\cos \widehat{xx'}}$ .

Dati i due assi $x, x'$ ed i parametri $r^2, r'^2$ dei due complessi, la formula (5), ovvero la (6), ci darà l'angolo $\widehat{cc'}$ dei complessi. In particolare la condizione perchè i due complessi siano involutori essendo che $\widehat{cc'} = \frac{\pi}{2}$, cioè $\cos \widehat{cc'} = 0$, si avrà allora:

$$(r^2 + r'^2) \cos \widehat{xx'} - \text{mom}(x, x') = 0 .$$

Questa condizione per l'involuzione di due complessi lineari coincide in sostanza con quella data dal KLEIN (*). Il 1° membro $(r^2 + r'^2) \cos \widehat{xx'} - \text{mom}(x, x')$ venne da questo scienziato chiamato *momento* dei due complessi lineari e noi vediamo dalla formula (5) che questo momento è uguale al doppio prodotto delle radici quadrate dei parametri dei due complessi lineari pel coseno dell'angolo di questi, ed è dato in coordinate generali di complessi lineari dalla formula

$$(7) \ldots\ldots \qquad \text{mom}(c, c') = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}\, \Omega_{c'c'}}} ,$$

analoga a quella che dà il momento di due rette (**).

---

(*) *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten.* Math. Ann. Bd. II, v. pag. 368.

(**) Da quella formula poi supponendo che il complesso $c'$ sia il complesso di riferimento avente per equazione $x_i = 0$, cioè sia tale che $R_{c'k} = 0$ per $k \gtrless i$, si ha che il momento di un complesso qualunque $c$ con questo è dato da $\frac{c_i}{\sqrt{\Omega_{cc}}} \frac{R_{c'i}}{\sqrt{\Omega_{c'c'}}}$, donde si conchiude che le coordinate generali $c_i$ di un complesso lineare sono quantità proporzionali ai momenti di questo complesso rispetto ai complessi fissi di riferimento moltiplicati rispettivamente per delle costanti fisse. A questo significato geometrico di quelle coordinate, già stato enunciato dal KLEIN nella Memoria dianzi citata si può sostituirne un altro servendosi della nostra espressione $2rr' \cos \widehat{cc'}$ pel valore del momento di $c$, $c'$; si ha cioè che le coordinate $c_i$ sono proporzionali ai coseni, moltiplicati per costanti fisse, degli angoli che il complesso $c$ fa coi complessi fissi di riferimento. Questa interpretazione (proiettiva, mentre quella era metrica) nel caso particolare, in cui questi complessi di riferimento siano a due a due in involuzione, fu già data dal KOENIGS nella Memoria di cui tra poco parleremo.

Se la forma quadratica $\Omega_{xx}$ si riduce ad $\alpha^2_x$, vale a dire se passiamo alla geometria delle sfere (in uno spazio euclideo ad $n$ dimensioni), $c$ e $c'$ saranno due sfere aventi per centri i punti $x$, $x'$ e per raggi $r$, $r'$; la quantità $\cos \widehat{xx'}$ si ridurrà ad 1, mentre $\widehat{cc'}$ diverrà l'angolo delle due sfere, e la formula (5) ovvero la (6) ci daranno come caso particolare:

$$(6') \ldots\ldots \qquad \overline{xx'}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \widehat{cc'} ,$$

relazione ben nota tra l'angolo di due sfere, i loro raggi e la distanza dei loro centri. Ne segue per condizione di ortogonalità delle due sfere:

$$r^2 + r'^2 - \overline{xx'}^2 = 0 .$$

Dalla (7) poi avremo:

$$2rr' \cos \widehat{cc'} = r^2 + r'^2 - \overline{xx'}^2 = \frac{R_{cc'}}{\alpha_c \alpha_{c'}} .$$

Ritornando alla formula (6) le si può dare un'apparenza alquanto diversa. Consideriamo una retta qualunque $x''$ comune ai due complessi $c$, $c'$. Come vedemmo, le radici quadrate $r$, $r'$ dei parametri di $c$, $c'$ non saranno altro che gl'intervalli tra $x''$ e gli assi $x$, $x'$ di questi complessi. Quindi, la (6) si potrà scrivere così:

$$(8) \ldots\ldots \qquad \overline{xx'}^2 = \overline{xx''}^2 + \overline{x'x''}^2 - 2\,\overline{xx''}\,.\,\overline{x'x''}\,\frac{\cos \widehat{cc'}}{\cos \widehat{xx'}} .$$

e ci dà una relazione fra tre rette qualunque $x$ $x'$ $x''$ e l'angolo dei complessi lineari passanti per l'una di esse ed aventi le altre risp. per assi. Essa si può enunciare così: *Se gli intervalli fra 3 rette qualunque dello spazio si prendono come lati di un triangolo rettilineo euclideo, il prodotto del coseno di un angolo qualunque di questo pel coseno dell'angolo delle due rette il cui intervallo costituisce il lato opposto a quello è uguale al coseno dell'angolo dei due complessi lineari aventi risp. queste due rette per assi e passanti per la terza retta.*

In questo modo un gruppo di 3 rette qualunque può dar luogo ad una specie di trigonometria, in cui la formula (8) e le sue analoghe si possono considerare come fondamentali.

Nell'enunciato ora dato della (8) ci siamo valsi di una formula di trigonometria ordinaria, la quale però si può considerare come una trasformazione della formula dimostrata (6'), o come un caso particolare della stessa (8). Questa ci dà in fatti, indicando con $x$, $x'$, $x''$ tre punti qualunque e con $c$, $c'$ le sfere di centri $x$, $x'$ e passanti per $x''$:

$$\overline{xx'}^2 = \overline{xx''}^2 + \overline{x'x''}^2 - 2\,\overline{xx''}\,.\,\overline{x'x''}\cos\widehat{cc'}\,.$$

e conduce così alla trigonometria dei triangoli rettilinei euclidei, la quale viene in questo modo a scaturire come un corollario dalle formule trovate ((5) ovvero (6) ovvero (8)) riguardanti la geometria dei complessi lineari.

---

Il sig. G. Koenigs, nella sua pregevole tesi « *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* » (la lettura della quale ci fu consigliata dall'egregio Prof. Klein), si occupa pure incidentalmente delle analogie tra la geometria dello spazio ordinario e delle sfere e quella della retta e dei complessi lineari. Però, malgrado l'apparenza, egli non incontra in questo campo risultati nuovi, non essendosi egli spinto al di là del paragone tra la geometria dei raggi reciproci da una parte e la geometria proiettiva dall'altra: le vere geometrie metriche non vennero da esso confrontate, sicchè nessuno dei nostri risultati si trova in quel lavoro. Così nel § VII della 2ª parte del suo lavoro il sig. Koenigs adopera l'equazione del complesso lineare sotto forma analoga all'equazione della sfera in coordinate cartesiane ortogonali; ma il suo metodo non gli dà, come analoghi nel complesso lineare al centro e al quadrato del raggio della sfera, l'asse ed il parametro del complesso lineare, ma bensì una retta ed una quantità che dipendono essenzialmente dal sistema di riferimento (il che ha però stretta relazione col nostro enunciato della nota al § 3). Nel § IV della 1ª parte s'incontra per tre rette qualunque infinitamente vicine tra loro $A$, $B$, $C$ la relazione

$$\begin{aligned}\operatorname{mom}(B, C) &= \operatorname{mom}(A, B) + \\ &+ \operatorname{mom}(C, A) - 2\sqrt{\operatorname{mom}(A, B)\,.\,\operatorname{mom}(C, A)}\cos\hat{A}\,,\end{aligned}$$

dove $\hat{A}$ è un certo angolo, relazione che si potrebbe considerare come un caso particolare della nostra formula (8) dell'ultimo paragrafo, e dalla quale il KOENIGS deduce relazioni tra i momenti mutui di quelle 3 rette e certi 3 angoli analoghe affatto a quelle che passano in un triangolo rettilineo euclideo tra i quadrati dei lati e gli angoli. Ma, senza che entriamo in altri dettagli per provare il nostro asserto, è facile scorgere che quest'analogia tra le formule relative al sistema di 3 rette infinitamente vicine e quelle relative ad un triangolo rettilineo euclideo poteva dedursi dalla semplice osservazione del fatto noto che *nell'infinitamente piccolo vale la geometria euclidea*, e che l'espressione del momento (o dell'*intervallo*, quale fu da noi definito) di due rette infinitamente vicine è una forma quadratica dei differenziali delle coordinate, sicchè per *distanze* infinitesime si possono assumere i momenti delle rette (e si potevano anche assumere i loro intervalli). L'origine invece della formula (8) per rette non infinitamente vicine e dell'analogia che essa presenta colla formula nota di trigonometria euclidea vediamo essere ben altra: essa è nel fatto da noi stabilito che *la geometria metrica dello spazio ordinario e delle sfere può considerarsi come caso particolare della geometria metrica della retta e dei complessi lineari.*

Torino, 18 Dicembre 1883.

Il Socio Cav. Prof. G. Basso presenta e legge la seguente Nota del signor L. Macchiati, Prof. nel R. Istituto tecnico di Cuneo:

# AZIONE

che esercitano

# I SALI DI FERRO

## SULLE PIANTE.

Sono pochi gli argomenti che come questo hanno richiamato la speciale attenzione dei fisiologi, e tuttavia dopo tanti studi, neppure ora siamo in grado di dire, in modo positivo, quale sia l'azione che il *ferro* eserciti sulle piante.

Non ignoriamo che quanto veniamo ad asserire, trovasi in opposizione colle idee dei più eminenti fisiologi, dai quali generalmente si ritiene che « il *ferro* sia il solo metallo al quale, appoggiandosi sulle esperienze, si è riusciti ad attribuire con certezza un'azione fisiologica positiva». E tutte le esperienze sembrano dar loro ragione; difatti: già Eusebio Gris (1) attribuiva la *clorosi* delle piante all'assenza dei sali di *ferro*, e di questo fatto forniva le seguenti prove:

1° Che le piante *clorotiche* rinverdiscono in qualche giorno, allorchè assorbono i sali di *ferro* per le radici; 2° che una porzione qualunque di foglia d'una pianta *clorotica*, rinverdisce quando sia lavata all'esterno con una soluzione di sali di *ferro*.

Il principe Salm. Horstmar (2) dimostrò che si può produrre la *clorosi* allevando le piante in una soluzione esente di sali di

(1) *De l'action des composés ferrugineux solubles sur la végétation*, 1843, — *Nouvelles expériences sur l'emploi des ferrugineux solubles appliqués à la végétation*, 1844.

(2) *Versuche und Resultate über die Nahrung der Pflan.* Braunschweig, 1856.

*ferro*, e farla cessare aggiungendo qualche sale solubile di questo metallo. Arturo Gris (1), figlio di Eusebio, ripetè le esperienze del padre e ne riconfermò i risultati. Sottopose all'esame microscopico le foglie *clorotiche* e vide che se le cellule venivano lavate con una soluzione di qualche sale di *ferro* (cloruro, nitrato o solfato) dopo tre o quattro giorni la porzione bagnata acquistava il color verde. Per l'azione del *ferro* si formano i granuli di *clorofilla* a diversi gradi di sviluppo; di cui, gli uni in forma di corpuscoli poligonali, attaccati alle pareti, gli altri arrotondati. Riferendosi ai risultati di dette esperienze, che ripetè su un numero considerevole di piante, concluse « la *clorosi* essere cagionata da un arresto di sviluppo, che impedisce l'evoluzione completa dei grani di *clorofilla*, e che i sali di *ferro* agiscono rendendo a detta sostanza la facoltà di ricostituirsi ».

Presso a poco trassero le stesse conclusioni dalle loro esperienze, fatte nel Giardino delle Piante, i signori Brogniard, Decaisne, Payen, Neumann e Pepin.

Coi risultati delle esperienze dei due Gris, richiamate da quasi tutti i fisiologi, si è sempre preteso d'aver detto l'ultima parola per quanto concerne l'azione dei sali di *ferro*.

Così J. Sachs (2) provò, con una serie di esperienze, fatte sulla germinazione del Maïs, che se si escludono i sali di *ferro* « la *clorosi* si manifesta allorchè tutte le parti del germe si sono sviluppate, a spese dei materiali contenuti dal seme». Le prime tre o quattro foglie che si formano in dette esperienze sono verdi, le seguenti verdi soltanto verso l'apice e bianche verso la base, e le altre perfettamente bianche. Lo stesso autore, nel 1861, iniziò una serie di esperienze, dai risultati delle quali concluse che, il *ferro*, non si poteva sostituire col *manganese*, nel qual senso risposero anche quelle del Risso rapporto al *nichel*.

Il solo Knop (3) osava di sollevare un dubbio sull'azione dei sali di *ferro*, dubbio, che si rileva dalle seguenti frasi: « La *clorosi* è dovuta a diverse cause: essa proviene da turbamento generale della nutrizione, e può essere occasionata dalla mancanza assoluta di *ferro*: ma la parte che si è attribuita a questo metallo nella formazione della *clorofilla*, e perciò nella colorazione delle

(1) *Annal. des sciences nat.*, 1857, VII, p. 201.
(2) *Die Landw Versuchsstat*, 1860.
(3) *Die Landw Versuchsstat*, 1863.

piante, non è sicuramente esatta». Alla quale conclusione del Knop si oppose energicamente J. Sachs (1) che in merito alla questione si espresse nei seguenti termini: « O il Knop conosce i lavori di Gris, ed allora doveva rifiutarli prima di emettere la sua propria opinione, od egli non li conosce, ed allora ha avuto il torto di voler trattare un soggetto del quale non ha studiato la letteratura». È inutile ricordare che al Sachs fecero eco quasi tutti i fisiologi, la maggior parte dei quali ne riportarono le testuali conclusioni.

Stohmann (2) fu condotto dalle sue esperienze a dichiarare, che il *ferro* prenda una parte positiva nella vegetazione, e non serva soltanto ad introdurre nella pianta l'acido fosforico.

Gerland (3) dimostrava che, senza l'attività speciale che possiede l'atomo di *ferro*, « non si ha il protoplasma, di cui la *clorofilla* non è che la manifestazione del lavoro di assimilazione operato dai granelli che la compongono».

A poca distanza di quest'ultimo Boussingault (4), all'Accademia delle Scienze di Parigi dimostrava che il *ferro* si trova in eguale proporzione, tanto nel sangue rosso, che nel sangue bianco degli invertebrati, e tanto nei funghi, che nelle piante verdi.

De Lanessan (5), nel considerare il *ferro* come uno degli elementi indispensabili alla formazione della *clorofilla* interpreta male i risultati di una delle esperienze dell'illustre Sachs (quella che fece nell'anno 1867 col *Phaseolus*) quando dice: « Però una esperienza del Sachs tenderebbe a far credere che una piccola quantità di *clorofilla*, potesse formarsi in assenza del *ferro* ». Dimentica quest'autore che quella tenue quantità di *clorofilla*, il sig. Sachs, l'attribuisce alle tracce di *ferro* contenute dal seme ».

Dopo che col metodo ideato dal sig. Gautier (6) si è riusciti a preparare la *clorofilla*, pura e cristallizzata, già intraveduta da Trécul, e che recentemente venne anche preparata dal sig. Hoppe Seyler (7), e con un nuovo processo da noi (8), se ne fece

(1) *Handbuch der Experimental Physiologie der Pflanzen*. Leipzig 1865.

(2) *Agronomische Zeitung*, 1864, p. 325.

(3) *Journal of the chemical Society*, anno 1873, aprile.

(4) *Compt. rend.*, 1873, mai.

(5) *Manuel d' Histoire Naturelle Médicale*, 156, 1879.

(6) *Bulletin de la Société chimique*, 20 *juillet* 1877; e Comp. rend. 17 novembre 1879.

(7) *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft.*, 1 sett. 1879.

(8) Memoria inedita di prossima pubblicazione, *su un nuovo processo di preparazione della clorofilla cristallizzata.*

più volte l'analisi, dalla quale è risultato che, contrariamente a quanto ritenevasi, non contiene il *ferro*. Eccone difatti la esatta composizione: Carbonio 73,97, Idrogeno 9,8, Azoto 4,15, Ossigeno 13,33, Fosfati alcalini e di Magnesio con tracce di Calcio 1,75.

I risultati dell'analisi della *clorofilla*, fatta da Hoppe Seyler, quasi coincidono con quelli di Gautier; e questa identità, che è una prova di più dell'esattezza del processo impiegato, acquista maggior valore dopo gli studi più recenti dell'illustre sig. A. Meyer (1).

Anche Giulio Wiesner (2), riferendosi ai risultati di questi ultimi, riconosce che, contrariamente a quanto erasi ritenuto dalla generalità degli autori, le recenti scoperte hanno indubbiamente dimostrato che la *clorofilla* non contiene il ferro; e si dimostrano dello stesso parere, nelle loro più recenti pubblicazioni gli illustri Van Tieghem (3), Baillon (4) e Duchartre (5). Ci arreca quindi meraviglia che anche dopo gli splendidi risultati raggiunti da Gautier, il sig. Roberto Grassmann (6), richiamando le analisi di Pfaundler (7), possa tuttavia insistere a considerare il *ferro* uno degli indispensabili componenti della *clorofilla*, come sembra anche crederlo il Prof. De Lanessan (8).

Dopo quanto abbiamo premesso, ci pare che non si possa più ammettere in tutta la sua integrità, ciò che affermava Sachs (Fisiologia vegetale), che cioè: « Il *ferro* sia un anello indispensabile della catena d'operazioni chimiche, per mezzo del quale la pianta produca i principii immediati; e, malgrado la debole proporzione nella quale pressochè sempre si trova, su di esso riposi tutto l'edifizio della pianta a *clorofilla* ».

La prima parte è indiscutibilmente vera, ma non così la seconda.

Abbiamo asserito che la prima parte è vera, non essendovi nessun dubbio che il *ferro* sia uno degli elementi indispensabili

---

(1) *Das Chlorophyllkorn in chemischer, morpholog. und biologis. beziehung.* Leipzig, 1883.

(2) *Elemente der Anatomie und Physiologie der Pflanzen.* Wien 1881, p. 169.

(3) *Traité de Botanique.* Paris 1882, p. 490.

(4) *Anatomie et Physiologie Végétales, etc.* Paris, 1882, p. 218.

(5) *Éléments de Botanique*, troisième édition 1884, p. 19.

(6) *Das Pflanzenleben oder die Physiologie der Pflanzen.* Stettin, 1882, p. 4, 79 e 82.

(7) *Ann. der chem. und Pharm.*, XII, 3.

(8) *La Botanique.* Paris 1883, p. 193 e 198.

dell'alimento della pianta a *clorofilla*; anzi i risultati del metodo analitico, iniziato dal Saussure (1) ed impiegato da molti altri, e quelli più concludenti del sintetico, già imperfettamente praticato da Knop, Stohmann e Nobbe, coi perfezionamenti che seppero introdurvi Pasteur (2) e Raulin (3) per le piante tallofite incolore, Sachs (4) e Boussingault (5) per le piante verdi, tutti stanno a riconfermare che il *ferro* è un elemento di tutte le piante.

Le piante assorbono il *ferro* sotto diverse forme di combinazioni solubili (solfato, nitrato, cloruro), ma è molto probabile che se lo assimilino in forma di ossido.

Relativamente alla seconda parte, ci permettiamo di far osservare all'illustre Sachs, che il *ferro* non facendo parte della composizione della *clorofilla*, non si può più ammettere come l'unico elemento a cui si possa attribuire con certezza un'azione fisiologica positiva, e tanto meno che « su di esso riposi tutto l'edifizio della pianta a *clorofilla* ».

Il *ferro* non ha maggiore importanza di qualunque altro degli elementi indispensabili all'alimento completo della pianta, dappoichè appena che ne viene a mancare uno, le funzioni fisiologiche non procedono più regolari, e si arresta la formazione delle sostanze immediate, non esclusa la *clorofilla*, che è una delle più complesse e, senza dubbio, la più importante dal punto di vista delle funzioni che in essa e per suo mezzo si compiono.

Quindi riteniamo che, se vengono a mancare i sali di *potassio*, di *calcio*, di *magnesio* o *l'acido fosforico*, dopo che la pianta abbia raggiunto un certo sviluppo, si possa egualmente manife-

---

(1) Th. de Saussure, *Recherches chimiques sur la végétation*, 1804. — Malaguti e Durocher, *Recherches sur la répartition des éléments inorganiques dans les principales familles du règne végétal* (Ann. de Chimie et de Physique, t. LIV, p. 257, 1858). — Garreau, *Considérations générales sur les cendres* (Ann. des sc. nat., 4ª ser., t. XIII, p. 163, 1850) — Wolff, *Aschenanalysen von landwirthschaftlich. Producten*, 1871 ecc.

(2) *Recherches pour servir à l' histoire physiologique des Mucédinées, Fermentation gallique* (Ann. des sc. nat., 5ª ser., t. VIII, 1868) e *Sur le développement de quelques Ascomycètes (Aspergillus et Sterigmatocystis)* (Bulletin de la Soc. Botaniq. de France, t. XXIX, 1877).

(3) *Etudes chimiques sur la végétation* (Ann. des sc. nat., 5ª ser., t. II, 1870.

(4) *Physiologie végétale*, p. 134 e seguenti, traduz.

(5) *Ann. de Chimie et de Physique*, ser. 3ª. — Chimique Agricol. et Physiologie, 1860.

stare la *clorosi*, e questo per la ragione, che, l'assenza di un elemento qualsiasi, nel medio nutritivo, per quanto possa essere richiesto in debole proporzione (se è nel novero degli indispensabili) fa sì che tutti gli altri divengano inefficaci. E se vi ha un composto minerale che meriti sopra agli altri una preferenza, nella formazione della *clorofilla*, questo è indubbiamente *l'acido fosforico*, che, abbiamo visto esservi contenuto in una proporzione non insignificante.

Perchè non si abbia a credere basato tutto questo ragionamento su delle semplici supposizioni, che potrebbero venire anche smentite, riporteremo i risultati di qualche nostra esperienza, al cui responso ci siamo in tutto riferiti.

Immergemmo vari individui di *Tropaeolum majus*, a diversi gradi di sviluppo colle radici in un recipiente pieno d'acqua distillata, nella quale avevamo avuto l'avvertenza di fare sciogliere l'aria. Passato qualche giorno, le foglie incominciarono a decolorarsi, poi si fecero giallicce; allora aggiungemmo, inutilmente, in tenue proporzione, come è suggerito in questi casi (Sachs), una soluzione di *cloruro di ferro*, ma senza nessun vantaggio per le piante, che seguitarono a decolorarsi. Ma ben altro risultato ottenemmo aggiungendo tutti gli elementi richiesti in una giusta proporzione e sotto forma di qualche sale solubile; oppure preparando più soluzioni di uno o parecchi sali, tali che al necessario grado di concentrazione aggiungessero la prerogativa di non dare de' precitati ciò che si ottiene col metodo delle soluzioni frazionate descritto dal Sachs: in quest'ultimo caso facevamo vegetare le piante alternativamente nei differenti vasi, la cui acqua stillata conteneva in soluzione, *nitrato di potassio*, *solfato di magnesio*, *fosfato di calcio* (monobasico), *cloruro di ferro* e *cloruro di manganese*. In tali condizioni, se la degenerazione della *clorofilla* non era molto avanzata, le foglie esistenti rinverdivano e se ne formavano delle nuove di un bel color verde.

Ora ci teniamo autorizzati ad asserire che dagli autori si era esagerata l'azione dei sali di *ferro*. Il credere che il *ferro* faccia parte della molecola di *clorofilla*, come riteneva il Verdeil, e come sembrano crederlo Salm Horstmar, Pfaundler, Grassmann e molti altri, è altrettanto errato quanto il ritenere che l'*ematosina* da esso debba ripetere il suo color rosso, dopo che Mudler e Van Gaudoever, dimostrarono che le si poteva togliere tutto il *ferro* senza decolorarla.

I grani di *clorofilla* (*xantocloroleuciti*) (1) sono formati di *protoplasma* incolore (*leuciti primitivi*) (2) e delle due materie coloranti (*xantofilla*) (3) e (*clorofilla*) (4), che per svilupparsi, hanno bisogno di principii nutritivi *azotati* e di *fosfati alcalini*; e se vengono a mancare queste sostanze, si arresta lo sviluppo del *protoplasma*, la *clorofilla* degenera, e tale stato è una vera *clorosi*. È però indubitato che il *ferro* deve contribuire cogli altri elementi a dare la forza necessaria al lavoro di collegamento e di distribuzione degli atomi della molecola di *clorofilla*, senza che faccia parte della sua composizione.

Dopo il premesso vediamo ora a quali prove Sachs si era riferito per portare dei valevoli argomenti, onde sostenere che il *ferro* fosse l'elemento al quale dovrebbesi la formazione della *clorofilla*; eccole: 1° Che, « le piante *clorotiche* rinverdiscono in qualche giorno allorchè assorbono i sali di *ferro* per le radici »;

2° Che, « una porzione qualunque d'una pianta *clorotica*, lavata all'esterno con una soluzione di un sale di *ferro*, inverdisce rapidamente »;

3° Che, « le ricerche microscopiche di Gris, hanno mostrato che, in quest'ultimo caso, il *protoplasma* incolore ed informe si trasforma in *clorofilla* »;

4° Che, « si può produrre la *clorosi*, facendo germinare i semi nelle soluzioni esenti di sali di *ferro*. In questo caso le prime foglie riescono sempre verdi, ma allorchè queste foglie incominciano ad assimilare i principii nutritivi assorbiti, nei quali i sali di *ferro* non sono compresi, si sviluppano delle foglie di un verde chiaro, a metà verdi a metà bianche in sul principio, e poco dopo tutte bianche »;

5° Che, « una tal pianta può vivere un certo tempo, ma soccombe tosto a causa della mancanza di organi assimilatori »;

6° Che, « se la *clorosi*, artificiale, non ha cagionato una disorganizzazione delle foglie, si può guarire facendo assorbire alla

---

(1) L. Macchiati, *Qualche rettifica sui solventi della clorofilla*, 1881.

(2) Trécul, *Des formations vésiculaires dans les cellules végétales* (Ann. des sc. nat., 4ª ser., t. 10, p. 20, 1858).

(3) Elfving, *Ueber eine Beziehung zwischen Licht und Etiolin* (Arbeiten des bot. Instituts in Würzburg, II, p. 495, 1880).

(4) Mohl, *Ueber den Bau der Chlorophylls* (Botanische Zeitung, 1855). — Kraus, *Zur Kentniss der Chlorophyllfarbstoffe und ihrer Verwandten*. Stuttgart, 1872, p. 78, e seguenti, ecc.

pianta dei sali di *ferro* per le radici o per le stesse foglie. Si è provato dal Risso che in questo caso il *manganese* ed il *nichelio* non possono rimpiazzare il *ferro* ».

Ora ci pare di poter concludere che, tutte queste prove (le quali non possono essere messe in dubbio) non provino niente in favore della tesi dell'illustre fisiologo (Sachs), perchè si rileva che gli autori ai quali si è riferito, e lui stesso, hanno avuto il torto di essersi limitati a studiare l'azione dei sali di *ferro* sulla *clorosi*, prodotta artificialmente escludendo dal medio nutritivo questo elemento. Le medesime prove si potrebbero sostenere se si studiasse l'azione dell'*acido fosforico* o dei sali di *potassio* ecc. sulla *clorosi*, che si fosse fatta produrre artificialmente, escludendo dal medio nutritivo le combinazioni che contengono il *fosforo* od il *potassio*. Considerando ora il caso del *fosforo*, si vedrebbe:

1° Che, le piante *clorotiche* rinverdirebbero in qualche giorno, allorchè assorbissero i fosfati solubili per le radici;

2° Che una porzione qualunque di una pianta *clorotica*, lavata all'esterno con un *fosfato* solubile, inverdirebbe rapidamente;

3° Che, le ricerche microscopiche dimostrerebbero che in quest'ultimo caso il *protoplasma* incolore ed informe si trasformerebbe in *clorofilla;*

4° Che, si potrebbe produrre la *clorosi* facendo germinare i semi nelle soluzioni esenti di sali di fosforo;

5° Che, una pianta ottenuta come nel caso antecedente, potrebbe vivere un certo tempo, ma soccomberebbe tosto a causa della mancanza di organi assimilatori;

6° Che, se la *clorosi* artificiale non avesse cagionato una disorganizzazione delle foglie, si potrebbe guarire facendo assorbire alla pianta i sali di *ferro* per le radici o per le stesse foglie.

---

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio presenta un lavoro dell'Ing. Camillo Guidi « *Sugli archi elastici* ». Questo lavoro destinato ad essere pubblicato nei volumi delle *Memorie*, viene consegnato ad una Commissione incaricata di esaminarlo e riferire in proposito in una prossima adunanza.

*L'Accademico Segretario*
A. Sobrero.

# CLASSI UNITE

# CLASSI UNITE

**Adunanza del 9 Dicembre 1883.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

In questa adunanza il Segretario della Giunta Accademica per l'aggiudicazione del **Premio BRESSA** nel quadriennio 1879-82, legge la seguente Relazione:

EGREGI COLLEGHI,

**Il terzo premio Bressa**, che la nostra Accademia deve oggi conferire, è destinato a quello scienziato od inventore di qualunque nazione esso sia, il quale, secondo le parole testuali del lascito Bressa, durante il quadriennio 1879-1882, « a giu-
» dizio dell'Accademia delle Scienze di Torino, avrà fatto la più
» importante scoperta, pubblicato l'opera più ragguardevole sulle
» scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, matematiche pure
» ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, non escluse la
» geologia, la storia, la geografia e la statistica ».

Conforme a quanto prescrive il Regolamento speciale per il conferimento dei premii Bressa, la nostra Accademia nella

seduta del giorno 3 Aprile 1881 nominò una Giunta coll'incarico di esaminare le domande di concorso al premio, di fare delle proposte di propria iniziativa, e di accogliere quelle presentate dai Soci nazionali.

Nella adunanza generale dell'Accademia, tenutasi il 15 Aprile di questo anno, ho già avuto l'onore di farvi conoscere il risultato dei lavori di quella prima Giunta, e Voi ricorderete che delle ventitre domande presentate direttamente per il concorso al premio Bressa, una sola fu giudicata meritevole d'essere presa in considerazione e fu quella del nostro Collega socio corrispondente Prof. Ernesto HAECKEL dell'Università di Jena, che si presentò candidato al premio per la sua opera che ha per titolo: *Monographie der Medusen:* pubblicata a Jena nell'anno 1881. La Giunta non vi ha per il terzo premio Bressa presentato delle proposte di propria iniziativa e vi ha annunciato quelle di un nostro Collega, il quale propose come meritevoli di essere presi in considerazione per il conferimento del premio: il Barone NORDENSKJÖLD per la sua prima circumnavigazione completa dell'Asia e dell'Europa, ed il signor ORMUDZ RASSAM, Console britannico a Bagdad, per le scoperte da lui fatte cogli scavi intrapresi nella Babilonide, per il ritrovamento della città di Sipara e dei tesori letterarii in essa contenuti. A queste proposte, nella stessa seduta del 15 aprile 1883, un altro egregio nostro Collega aggiunse quella relativa al D.r Roberto KOCH di Berlino, per i suoi lavori sui microfiti in generale, e specialmente per quelli sui bacilli della tubercolosi.

Chiuso colla seduta già più volte ricordata del 15 Aprile 1883 il periodo concesso alle proposte per il conferimento del premio,

l'Accademia nominò una seconda Giunta composta, oltrechè del Presidente Prof. Fabretti, dei soci Lessona, Dorna, Cossa, Basso e Mosso per la classe di Scienze fisiche e matematiche e dei soci Gorresio, Flechia, Manno, Carle e Nani per quella di Scienze morali. L'incarico affidato dal Regolamento del 7 Dicembre 1876 a questa seconda Giunta era di esaminare e confrontare le proposte presentate dalla Giunta precedente, e di presentarvi nella seduta d'oggi delle proposte definitive per l'aggiudicazione del premio, con una relazione da pubblicarsi negli Atti della Accademia.

Nella sua prima riunione la Giunta, che mi volle onorare coll'incarico di suo segretario, dopo avere esaminate le proposte fatte relativamente ai nomi di HAECKEL, ORMUDZ RASSAM, NORDENSKJÖLD, KOCH, deliberò ad unanimità di comprenderle in un'unica categoria, presentandole tutte come eminentemente meritevoli del premio che l'Accademia oggi deve conferire.

I meriti dell'illustre viaggiatore e mineralogo NORDENSKJÖLD d'avere circumnavigato per il primo l'Asia, sono così conosciuti, che io credo affatto superfluo l'esporveli anche con poche parole. Per quanto concerne l'importanza dei lavori a cui si riferiscono le altre tre proposte, permettetemi che io la richiami alla vostra memoria con brevissimi cenni, che io ho compendiato sulle relazioni parziali presentate alla Giunta da alcuni nostri Colleghi.

La monografia del Professore Ernesto HAECKEL sulle Meduse segna un periodo nello studio della fauna marina inferiore. Le meduse costituiscono un esteso gruppo di animali marini sommamente importanti per le loro forme e per il loro sviluppo. Ma lo studio delle meduse, che è suscettibile di gettar molta luce intorno ad importanti fenomeni biologici, riesce malagevolissimo

per le difficoltà grandissime che si riscontrano nella ricerca, nell'osservazione e nella conservazione di questi animali. Sono trascorsi più di cinquant'anni dacchè lo illustre Escholtschz pubblicava un lavoro fondamentale intorno alle meduse. Dopo quel tempo, la scienza si arricchì di nuovi fatti inaspettati intorno alla vita degli animali del mare e molto materiale venne accumulato rispetto alle meduse. Da venticinque anni il Prof. Haeckel dà opera allo studio di questi animali: egli raccolse personalmente un materiale nuovo e copiosissimo, compiendo lunghi viaggi, prima nel Mediterraneo, poi in altri mari, segnatamente nell'Oceano indiano. Visitò i Musei ricchi di tal sorta di collezioni ed ebbe numerosissimi invii dai suoi colleghi d'ogni parte del mondo. Così egli potè accingersi all'opera malagevolissima di un grande lavoro intorno alle meduse, e raddoppiò il numero degli ordini conosciuti nella classe e descrisse più di trecento specie nuove, oltre a quelle a un dipresso in pari numero, che già si conoscevano, e sfoggiò il suo valore di artista, rappresentandole con disegni colorati nella forma naturale e in sezione. Ma la quantità del lavoro, per quanto grande, è poca cosa in comparazione della qualità. Le forme, i rapporti, lo sviluppo, l'origine di questi animali, sono stati palesati dallo Haeckel con tanto grande evidenza quanto profondo sapere.

L'opera del signor Haeckel è considerata giustamente dai naturalisti come un lavoro capitale, destinato a rimanere imperituramente nella scienza.

Ormudz Rassam, agente diplomatico inglese prima ad Aden e poscia a Bagdad, è già da molti anni conosciuto per importanti scoperte archeologiche da lui medesimo in più riprese riassunte nelle *Transactions of the Society of Biblical Archeology.*

A lui si devono le scoperte fatte fino dagli anni 1853-54, della biblioteca di Assurbanipal; delle famose porte metalliche di Balawat, comprendenti iscrizioni e bassorilievi concernenti le spedizioni e le gesta di Salmanasarre II (859-825 a. C.), e del prisma decagono di terra cotta, tratto in luce da un palazzo di Assurbanipal a Ninive, contenente in 1300 linee di fina scrittura cuneiforme, gli annali di quel celebre monarca. Ma tutte queste scoperte furono di gran lunga eclissate dalla scoperta recente (1880) ch'egli fece della città caldaica di Sipara, già celebre nelle antichissime leggende caldaiche del diluvio, secondo le quali il Noè caldaico avrebbe ivi sepolto le notizie storiche anteriori a quell'avvenimento, per salvarle dalla distruzione. Ora il Rassam scoprì ben 10 mila tavolette scritte in carattere cuneiforme, che riempivano un sotterraneo del gran tempio di Astarte in quella città. Queste del Rassam vanno certamente collocate tra le più importanti e grandiose scoperte archeologiche di questi ultimi anni.

Il Dottore Roberto Koch, noto già per eccellenti lavori originali intorno all'eziologia delle malattie infettive, pubblicò l'anno scorso un lavoro sulla eziologia della tubercolosi, il quale, stando all'autorità incontestata dell'egregio nostro collega Prof. Bizzozero, formerà di certo epoca nella Storia della scienza. A doppio titolo questo lavoro ha attirato su di sè l'attenzione generale. In primo luogo in esso è dimostrato che una malattia così diffusa e così grave come la tubercolosi, riconosce la sua origine in funghi microscopici a forma di bacilli che si moltiplicano nei tessuti animali, cagionandone in ultima analisi la distruzione. Questa scoperta, ora universalmente accettata, ha condotto ad una diagnosi assai più facile della malattia, ed ha mostrato la via per potere più facilmente combatterla.

In secondo luogo il lavoro del D.r Koch è così magistralmente condotto, e risponde in tal modo a tutte le possibili obbiezioni, ha introdotto tali metodi rigorosi d'indagini, che esso si può considerare di un valore generale nello studio di tutta quella numerosa ed importante classe di malattie che sono le *infettive*, e potrà servire di modello per tutti gli studî che su di queste si faranno. Del che si hanno già delle prove, essendo evidentemente da considerarsi come una conseguenza dei lavori di Koch le scoperte fatte da altri sulla risipola e sul moccio.

Dopo questa brevissima esposizione relativa ai pregi delle opere e delle scoperte che vi si propongono per il conferimento del premio, Voi troverete certamente non fuor di luogo che il vostro relatore, a nome della Giunta, vi faccia osservare come sia cosa ardua il confrontare i meriti di proposte che si riferiscono ad argomenti di scienze affatto disparate, come sia difficile il giudicare della preminenza tra scoperte geografiche ed archeologiche e lavori di anatomia comparata e di patologia. Tuttavia la vostra Giunta, a cui fu dato l'incarico di presentare alle Vostre deliberazioni delle proposte definitive, dovette, come fu praticato per i due premii precedenti, procedere ad una graduazione delle quattro proposte. Questa graduazione fu dalla Giunta, nella sua ultima adunanza, deliberata a maggioranza di voti nell'ordine seguente:

1° Ernesto Haeckel.
2° Ormudz Rassam.
3° Nordenskyöld.
4° D.r Roberto Koch.

Questa graduazione non vincola però in nessuna maniera le deliberazioni dell'Accademia.

Colle proposte che ho avuto l'onore di presentarvi, la Giunta ha esaurito l'onorevole ed arduo incarico affidatole. Essa si terrà altamente soddisfatta se le sue proposte Vi potranno riuscire di qualche utilità nell'importante votazione a cui siete oggi chiamati.

Professore ALFONSO COSSA
*Segretario relatore.*

---

Nella stessa seduta in cui fu letta questa Relazione, l'Accademia deliberò, a maggioranza, di assegnare il premio **Bressa** per il quadriennio 1879-1882 al signor **Ormudz Rassam.**

*Gli Accademici Segretari* { ASCANIO SOBRERO
GASPARE GORRESIO.

# SOMMARIO

ELENCO degli Accademici ..... *Pag.* 3

## Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

BONARDI — Contribuzione all'istologia del sistema digerente dell'*Helix pomatia* ..... *Pag.* 33
FUSARI — Sull'origine delle fibre nervose nello strato molecolare delle circonvoluzioni cerebellari dell'uomo ..... » 47
SIACCI — Presentazione di un'opera stampata del sig. F. CHAPEL . » 52
D'OVIDIO — Presentazione di due lavori manoscritti, uno del sig. Dott. Corrado SEGRE, e l'altro dell'Ing. Giovanni de BERARDINIS » 52
GENOCCHI — Presentazione di un opuscolo del Principe BONCOMPAGNI, che ha per titolo: *Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace* ..... » 53
DORNA — Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti per l'anno 1884, ed altri lavori dell'Osservatorio ..... » 54
D'OVIDIO — Relazione sulla Memoria del Dott. Corrado SEGRE, intitolata: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* ..... » 81
CAMERANO — Intorno alla Neotenia ed allo sviluppo degli anfibi . . » 84
DORNA — Relazione sulla Memoria dell'Ing G. de BERARDINIS « *Sullo scostamento della linea geodetica dalle sezioni normali di una superficie* » ..... » 94
COSSA — Presentazione d'una Memoria stampata di C. FRIEDEL e E. SARASIN ..... » 98
JADANZA — Sui sistemi diottrici composti ..... » 99
DACCOMO — Contributo allo studio chimico del triclorofenolo . . . » 118
MONARI — Azione dell'ammoniaca sull'alcool etilico ..... » 130
D'OVIDIO — Relazione sulla Memoria del Dott. Corrado SEGRE « *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* » ..... » 138
—— Relazione sulla Memoria del Dott. Gino LORIA, che ha per titolo: *Ricerche sulla geometria della sfera, e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie* ..... » 140
ROTONDI — Ricerche di chimica elettrolitica. — Elettrolisi dell'olio d'anilina ..... » 142
—— Ricerche chimiche sopra i saponi ..... » 146
CAPPA — Sul limite dell'aderenza che si può svolgere fra due cilindri ad assi qualunque che si trasmettono il movimento rotatorio ..... » 154
SEGRE — Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie ..... » 159
MACCHIATI — Azione che esercitano i sali di ferro sulle piante . . » 187
D'OVIDIO — Presentazione di un lavoro manoscritto dell'Ing. Camillo GUIDI « *Sugli archi elastici* » ..... » 195

## Classi Unite.

COSSA — Relazione per l'aggiudicazione del *Premio Bressa* nel quadriennio 1879 82 ..... » 199

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XIX, DISP. 2ª (*Gennaio* **1884**)

**Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.**

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

**Gennaio**

1884.

# CLASSE
## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza del 13 Gennaio 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Cav. Prof. NACCARI presenta e legge il seguente lavoro da lui fatto in collaborazione col sig. Dott. G. GUGLIELMO,

# SUL RISCALDAMENTO DEGLI ELETTRODI
## PRODOTTO DALLA SCINTILLA D'INDUZIONE
### NELL'ARIA MOLTO RAREFATTA.

In una nota sui fenomeni termici prodotti dalla scintilla d'induzione (1) vennero descritte da uno di noi alcune esperienze dirette allo studio del riscaldamento degli elettrodi nell'aria rarefatta, ma la massima rarefazione raggiunta in quelle esperienze fu di 9 mm. per la insufficienza della macchina pneumatica adoperata.

Nella Nota presente descriviamo una serie di esperienze fatte nell'aria la cui pressione da 10 mm. circa fu ridotta ad una piccolissima frazione di mm. usando a tal uopo una macchina pneumatica a mercurio di Töpler modificata da Bessel-Hagen, costruita dal Müller di Berlino.

Il rocchetto adoperato fu quello con cui si fecero le citate esperienze: esso fu costruito da Carpentier di Parigi ed è atto a dare una scintilla di 45 cm. da punta a disco quando la corrente induttrice sia data da 8 grandi coppie Bunsen. Per avere una sola delle due correnti indotte abbiamo interposto nel circuito un intervallo d'aria di 2 mm. fra sfere d'ottone di 10,8 mm. di diametro, essendo stato osservato nella Nota citata che l'intervallo d'aria rarefatta non basta ad impedire il

(1) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVII, p. 343 (1882).

passaggio della corrente inversa, anzi in qualche caso fa sì ch'essa prevalga sulla diretta. Una bussola reometrica di Wiedemann con le spirali rivestite di guttaperca era inserita nel circuito.

Ciascun elettrodo era costituito da un cilindro cavo d'ottone lungo 50 mm. che terminava da una parte con un emisfero, dall'altra con una base piana; la sezione aveva il diametro di mm. 26,5. Gli elettrodi vennero disposti in modo che i loro assi si trovassero sopra la stessa retta orizzontale, e la scintilla scoccasse fra i due emisferi che si trovavano posti l'uno di fronte all'altro. Presso alla base piana del cilindro era saldato un breve tubo di ottone perpendicolare all'asse del cilindro stesso, volto all'insù ed aperto superiormente. Così i due elettrodi costituivano due serbatoi, ai quali mediante un tappo di gomma elastica si applicavano due tubi capillari. Introdotto in essi un liquido adatto, essi facevano l'uffizio di due termometri o piuttosto di due piccoli calorimetri. In queste esperienze abbiamo adoperato alcool come liquido termometrico.

I due elettrodi vennero introdotti per gran parte della loro lunghezza in un tubo di vetro il cui diametro interno era poco maggiore di quello degli elettrodi, e si usò ceralacca per empire l'intervallo in modo che fosse tolto assolutamente il passaggio all'aria. Restavano fuori del tubo di vetro le parti degli elettrodi alle quali era applicato il tubo capillare. La distanza delle due superficie curve poste così l'una di fronte all'altra era di 47 mm. Nel punto di mezzo del tubo di vetro e propriamente nella parte superiore di esso era saldato un tubo pure di vetro e verticale nel quale era introdotto un cilindro massiccio di ottone destinato a far l'ufficio di elettrodo accessorio, come si vedrà più innanzi, e si usò ceralacca per chiudere gl'interstizi. A questo tubo e al disotto dell'estremità dell'elettrodo accessorio era saldato un tubo orizzontale che comunicava colla macchina, con un manometro e con un serbatoio d'acido solforico concentrato, destinato a disseccare l'aria rarefatta. L'apparecchio così costruito portava un tubo verticale lungo 85 cm., aperto superiormente, il quale serviva alla congiunzione dell'apparecchio colla macchina. Per fare questa congiunzione non ci siamo serviti del tubo ad U capovolto che accompagna la macchina stessa, ma ne abbiamo usato un altro, uno dei bracci del quale circondava il tubo principale ascendente della macchina e l'altro braccio rivestiva il tubo verticale congiunto all'apparecchio descritto. Per separare lo spazio interno dall'esterno nei punti di congiunzione del tubo ad U colla mac-

china da una parte e con l'apparecchio degli elettrodi dall'altra si adottò l'espediente della vaschetta anulare piena di mercurio già adottato nella macchina per la prima di queste congiunzioni. Abbiamo seguito questo sistema per evitare la rigidità che presentano le congiunzioni mediante superficie smerigliate e le saldature di tubi di vetro. Fino alla pressione di tre o quattro millimetri ci siamo serviti del manometro, ed abbiamo dedotto il valore delle pressioni inferiori dagli spostamenti del mercurio nel tubo d'efflusso col metodo descritto nella memoria di Bessel-Hagen, non tenendo conto della tensione del vapore di mercurio. Siccome la macchina ci fu fornita senza alcuna scala, nè indicazione alcuna intorno al volume delle varie parti, così gli elementi necessari per il calcolo anzidetto furono determinati mediante apposite esperienze a pressioni non molto piccole, valendoci del manometro che avevamo congiunto alla macchina.

In queste esperienze, come nelle precedenti, si ebbe sempre cura di fare doppie determinazioni, vale a dire dopo aver fatto passare la corrente in un dato senso nell'intervallo fra i due elettrodi, si scambiavano i reofori applicati ad essi per eliminare l'influenza di piccole differenze fra un elettrodo e l'altro. Il senso della polarità del rocchetto si mantenne sempre inalterato. Nella seguente tabella sono indicati i risultati di più serie d'esperienze, parecchie delle quali furono raggruppate per avere una media di maggior precisione. Nella colonna segnata $H$ sono indicate le pressioni dell'aria rarefatta espresse in millimetri di mercurio, nella colonna segnata $i$ trovansi le intensità della corrente prendendo per unità la corrente che produce una deviazione uguale ad una particella della scala; questa corrente ha il valore di 0,0000104 ampère.

Nelle colonne $n$ e $p$ sono indicati gli spostamenti della colonna d'alcool rispettivamente spettanti all'elettrodo negativo ed al positivo, divisi per il valore di $i$ e per la durata del passaggio della corrente. Nel dedurre questi valori si seguirono le solite norme relative ai calcoli calorimetrici tenendo conto delle perdite di calore mediante opportune osservazioni fatte prima del passaggio della corrente e dopo di esso. Nella colonna $\frac{n}{p}$ stanno i rapporti dei due riscaldamenti anzidetti; e nella colonna $N$ è indicato il numero delle esperienze da cui ciascun valore della linea corrispondente è dedotto.

La corrente induttrice fu in generale prodotta da 3 coppie Bunsen di media grandezza, ma nel caso di grandi rarefazioni si dovette aumentare il numero delle coppie fino a 9 affinchè la corrente indotta attraversasse l'intervallo, e si avesse un riscaldamento abbastanza grande da poter venir facilmente misurato. In tali casi si osservò che il passaggio della corrente produceva un aumento di pressione relativamente grande, e si dovette limitare la durata del passaggio, il che veniva in parte compensato dall'uso di pila induttrice più forte. La pressione fu osservata in ciascheduna esperienza prima e dopo il passaggio della corrente e si prese la media dei due valori così ottenuti. La durata si adattò nei singoli casi all'intensità del riscaldamento e variò in generale fra 1 e 2 minuti: nel caso di grandissime rarefazioni, per evitare le variazioni di pressione sopra notate, essa fu ridotta anche fino a 5″. In questo caso non si potè osservare l'intensità della corrente e perciò i valori corrispondenti di $n$ e $p$ dati nella tabella non sono ridotti ad unità di corrente.

| $N$ | $H$ | $i$ | $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 12,7 | — | 113,0 | 34,8 | 3,25 |
| 2 | 7,5 | — | 99,4 | 22,0 | 4,52 |
| 2 | 5 | — | 101,5 | 20,8 | 4,88 |
| 2 | 2,87 | 110 | 0,355 | 0,055 | 6,46 |
| 5 | 2,15 | 130 | 0,368 | 0,050 | 7,40 |
| 4 | 1,2 | 113 | 0,389 | 0,0456 | 8,55 |
| 2 | 0,65 | 116 | 0,474 | 0,0399 | 11,9 |
| 2 | 0,53 | 100 | 0,486 | 0,0382 | 12,7 |
| 2 | 0,45 | 110 | 0,530 | 0,0285 | 18,6 |
| 2 | 0,274 | 95 | 0,615 | 0,0223 | 27,5 |
| 4 | 0,21 | 90 | 0,645 | 0,024 | 26,9 |
| 8 | 0,13 | 74 | 0,884 | 0,087 | 10,2 |
| 2 | 0,053 | 37,5 | 1,55 | 0,4215 | 3,68 |
| 4 | 0,03 | 39,5 | 1,87 | 0,657 | 2,85 |
| 2 | 0,0245 | 25,5 | 2,66 | 0,946 | 2,49 |
| 1 | 0,022 | 24 | 2,65 | 1,54 | 1,72 |
| 2 | 0,0095 | 22,5 | 2,63 | 2,01 | 1,31 |
| 2 | 0,0025 | — | 21,8 | 36,9 | 0,59 |
| 2 | 0,0017 | — | 8,0 | 21,4 | 0,374 |

Da queste esperienze risulta il fatto notevole che il rapporto $n:p$, il quale, come è detto nella Nota citata, fra le pressioni di 760 mm. e 10 mm. varia solamente entro limiti ristretti e propriamente fra 2 e 4, per pressioni minori di 9 mm. ed in condizioni non molto diverse varia grandemente e raggiunge un massimo per una pressione prossima a 0,25 mm. Per rendere più chiaro l'andamento di questa variazione abbiamo tracciato la curva segnata $A$ nella tavola, prendendo come ascisse le pressioni e come ordinate i valori corrispondenti del rapporto $n:p$; i millimetri di mercurio sono rappresentati da 1 cm. e le unità del rapporto da 0,5 cm.

Da questa curva appare che il rapporto $n:p$ aumenta lentamente fino a 5 mm., da questa pressione fino a quella di 1,2 cresce con maggiore rapidità, e cresce rapidissimo da 1,2 fino a 0,27 circa: di poi scende con grandissima rapidità, per piccolissime pressioni raggiunge il valore 1 e per le estreme rarefazioni a cui si potè sperimentare assume dei valori inferiori all'unità, cioè il riscaldamento dell'elettrodo positivo prevalse su quello del negativo.

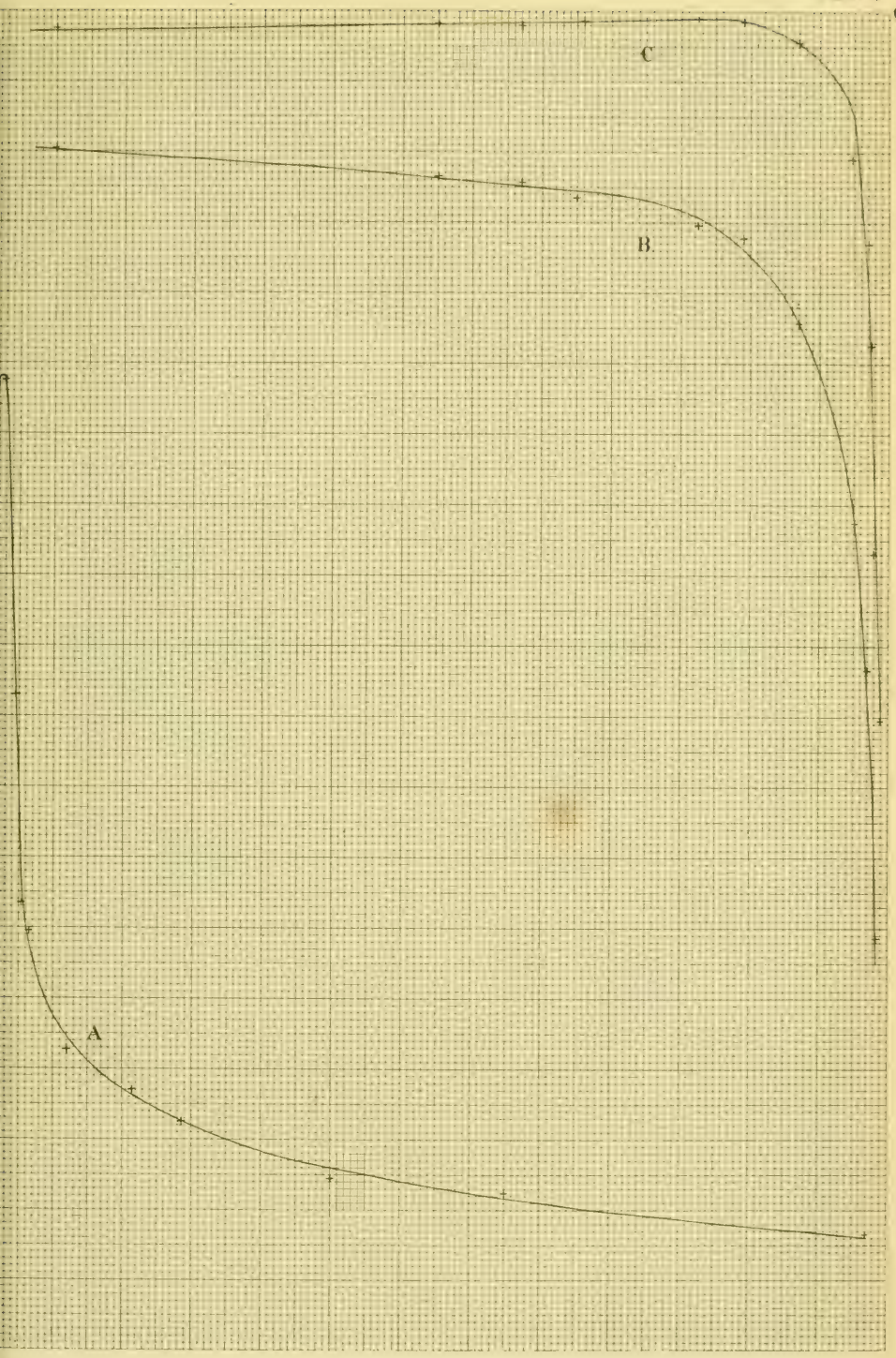
Le curve $B$ e $C$ rappresentano l'andamento dei riscaldamenti dell'elettrodo negativo e del positivo rispettivamente, e sono state tracciate prendendo a partire da $0'$ le pressioni come ascisse, ed i valori corrispondenti di $n$ e $p$ come ordinate. Ogni millimetro di mercurio di pressione è rappresentato da 10 mm., ogni unità di $n$ e $p$ da 50 mm. Appare da queste curve che per l'elettrodo positivo il riscaldamento a partire dalla pressione di 2,87 mm. decresce lentamente fino alla pressione di circa 0,02, indi cresce rapidamente. Il riscaldamento del negativo invece cresce già, sebbene lentamente, al diminuire della pressione dalla pressione di 2,87 e fin verso 0,2, di poi cresce anch'esso rapidissimamente. Per le pressioni superiori a 2,87 non s'è potuto avere il riscaldamento per unità di corrente, non essendo nota l'intensità di questa. Altre esperienze eseguite con elettrodi posti a distanza minore e che furono interrotte per un accidente sopravvenuto, ci hanno mostrato che i riscaldamenti di entrambi gli elettrodi vanno decrescendo al diminuir della pressione da 750 a 9 mm., e che il riscaldamento dell'elettrodo negativo comincia a crescere a partire dalla pressione di 9 mm. Ciò è conforme a quanto risulta dalla Nota citata.

Avendo osservato il riscaldamento maggiore dell'elettrodo positivo nel caso di grandi rarefazioni, mentre in generale, fatta

eccezione per l'arco voltaico, si riscalda sempre di più l'elettrodo negativo, e tenendo conto dei noti fenomeni della materia radiante, abbiamo voluto esaminare se l'elettrodo positivo si riscaldasse almeno in parte per effetto della radiazione proveniente dall'elettrodo negativo. Ci siamo serviti dell'elettrodo accessorio di cui abbiamo fatto cenno più sopra applicando, ad esso uno dei reofori ed applicando l'altro reoforo ad uno dei soliti elettrodi, mentre l'altro di questi rimaneva isolato. Così la corrente doveva percorrere due tratti rettilinei ad angolo retto. Se l'elettrodo accessorio era negativo, dalla parte della superficie del tubo di vetro, che era direttamente opposta al tubo in cui si trovava quell'elettrodo, si vedeva la solita macchia verde dovuta alla fosforescenza del vetro e questa riusciva più o meno brillante a seconda che la rarefazione era più o meno avanzata. Se l'elettrodo accessorio era positivo, quella radiazione andava a colpire l'elettrodo opposto che era isolato. Anche in questo caso per evitare l'influenza di cause accessorie speciali ai singoli elettrodi, abbiamo fatto sì che ora l'uno ora l'altro dei due elettrodi calorimetrici rimanesse isolato. Nella seguente tabella stanno indicati i risultati ottenuti in queste esperienze. Per le quattro prime colonne e per la sesta valgono le indicazioni date di sopra. Nella colonna I stanno i riscaldamenti dell'elettrodo isolato e nell'ultima colonna i valori del rapporto $\frac{n}{p}$ quali si sono trovati in condizioni simili mediante esperienze fatte con i soliti elettrodi calorimetrici.

| $H$ | $i$ | $n_1$ | $p_1$ | $I$ | $n_1:p_1$ | $n:p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,87 | 105 | 0,374 | — | 0 | — | |
| » | 100 | — | 0,055 | 0,0025 | 6,8 | 6,46 |
| 0,54 | 105 | 0,539 | — | 0,003 | — | — |
| » | 65 | — | 0,0508 | 0,0123 | 10,6 | 12,7 |
| 0,12 | 62 | 1,07 | — | 0,124 | — | — |
| » | 26 | — | 0,236 | 0,0423 | 4,53 | 10,2 |
| 0,034 | 39 | 1,71 | — | 0,695 | — | — |
| » | 19 | — | 0,505 | 0,142 | 3,39 | 2,85 |
| 0,025 | 36 | 2,06 | — | 0,813 | — | — |
| » | 21 | — | 0,53 | 0,081 | 3,89 | 2,49 |

Tav. V




LIT. SALUSSOLIA, TORINO

Altre esperienze vennero eseguite in condizioni alquanto diverse, mantenendo un reoforo (ordinariamente il positivo) sempre applicato ad uno degli elettrodi calorimetrici ed applicando l'altro ora al secondo di questi elettrodi, ora all'accessorio. Nella seguente tabella sono esposti i risultati relativi.

| $H$ | $i$ | $n_1$ | $p_1$ | $I$ | $n$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0227 | 37,5 | 2,51 | — | 2,16 | — | — |
| » | 44 | — | — | — | 2,45 | 1,61 |
| 0,0185 | 19,5 | — | 1,28 | 0,143 | — | — |
| » | 31 | — | — | — | 2,88 | 2,65 |
| 0,008 | 19 | — | 2,14 | 0,10 | — | — |
| » | 25 | — | — | — | 2,99 | 3,38 |

Dalle esperienze, contenute nelle due ultime tabelle, sebbene eseguite in condizioni meno buone, ed in minor numero di quelle della prima tabella, risulta che quando uno dei reofori è applicato all'elettrodo accessorio, l'elettrodo isolato a pressioni non troppo piccole si riscalda sempre pochissimo e che a partire dalla pressione di 0,12 circa, esso si riscalda maggiormente allorchè è opposto all'elettrodo negativo anzichè al positivo, e tanto più quanto minore è la pressione: il rapporto del riscaldamento che avviene nel primo caso a quello del secondo cresce anch'esso al diminuire della pressione e diventa circa 15 per la pressione di 0,02 mm. Tale effetto pare dovuto alla radiazione proveniente dall'elettrodo opposto. Questo elettrodo se è negativo si riscalda un po' più di quel che si riscaldava nelle condizioni ordinarie, ma con uguale andamento rispetto alla pressione; se è positivo e specialmente per rarefazioni un po' grandi, si riscalda di meno. Il valore del rapporto $n:p$ risulta dunque in questo caso maggiore che nel caso ordinario; esso diminuisce avvicinandosi all'unità quando la rarefazione aumenta notevolmente, ed in alcune esperienze parve discendere anche in queste condizioni al disotto dell'unità, ma in causa della irregolarità della corrente nel breve tempo in cui essa passava essendo difficile di apprezzarne con sufficiente esattezza il valor medio, non abbiamo potuto chiarire con sicurezza la questione, il che forse ci riescirà con ulteriori esperienze.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università, Torino 10 Gennaio 1884.

Il Socio Comm. Prof. G. Curioni, condeputato col Socio Comm. Prof. A. Genocchi ad esaminare la Memoria del signor Ing. Prof. Guidi « *Sugli archi elastici* », presentata nell'adunanza del 30 p. p. Dicembre, legge la seguente

# RELAZIONE

Il lavoro, sul quale si riferisce, è il complemento di una memoria dello stesso Professore Guidi, stata pubblicata negli Atti dell'Accademia dei Lincei (Serie 3ª, Vol. IV); e l'autore brevemente tratta in esso delle determinazioni relative agli archi elastici, giovandosi del metodo grafico dato dal Professore Eddy di Cincinnati nella prima parte « New constructions in Graphical Statics » del suo libro intitolato « Resèarches in Graphical Statics » per determinare la curva delle pressioni in un arco elastico caricato.

L'autore, non trovando abbastanza chiara la dimostrazione che l'Eddy stesso dà del suo metodo, incomincia col presentarne un suo; e quindi lo applica al caso di un arco di sezione variabile, di un sol pezzo, incastrato alle estremità e sollecitato da carichi fissi, introducendo del suo nella risoluzione del problema quelle modificazioni che derivano dalla variabilità della sezione dell'arco.

Dopo questo, l'autore prende a studiare un arco di un sol pezzo, di sezione costante, incastrato agli estremi e sollecitato da carichi mobili. Incomincia col supporre l'esistenza di un carico unico concentrato passante successivamente in varie posizioni, e, applicando il metodo di Eddy, determina le reazioni degli appoggi ed in conseguenza la *linea d'intersezione* e l'*inviluppo delle reazioni*, cioè a dire il luogo dell'intersezione delle reazioni degli appoggi colla linea del carico e le due curve inviluppate dalle reazioni stesse.

In conformità dei risultati già ottenuti analiticamente dal Winkler e dal Culmann, il Guidi dimostra: come per un arco

parabolico, qualunque la *linea d' intersezione* possa senza errore apprezzabile, essere sostituita da una determinata orizzontale; e come ne venga la conseguenza di determinate iperboli per le linee inviluppate dalle reazioni degli appoggi.

Dopo le costruzioni della linea d'intersezione e dell'inviluppo delle reazioni, l'autore espone un nuovo metodo grafico per la ricerca dei massimi sforzi interni di pressione, di tensione e di taglio prodotti in una sezione qualunque dell'arco da un carico mobile uniformemente ripartito. Per ultimo passa a considerare l'arco di un sol pezzo articolato a cerniera alle estremità, limitandosi a determinare col metodo d'Eddy la spinta orizzontale nell'ipotesi di un carico concentrato in varie posizioni, giacchè l'ulteriore ricerca dei massimi sforzi interni già trovasi esposta nella precedente sovraccennata memoria.

Il lavoro del Professore Guidi si riferisce ad un argomento di grande importanza nella scienza dell'ingegnere, ed è svolto abilmente a seconda dei moderni studi della Statica grafica. Al metodo dell'Eddy ha aperto un più vasto campo di utili applicazioni e per questo la Commissione è lieta di proporre alla Classe la lettura della memoria del Professore Guidi sugli archi elastici.

Torino, 13 gennaio 1884.

Angelo Genocchi.
G. Curioni, *Relatore.*

La conclusione della Commissione è accolta dalla Classe, la quale, udita la lettura del lavoro del Professore Guidi, con regolare votazione ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia, per l'annessione agli *Atti* in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni meteorologiche* del mese di Dicembre ultimo, coi rispettivi riassunti e diagrammi, dell'Assistente Prof. Angelo CHARRIER.

**Anno XVIII** **1883**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Dicembre.

La media delle altezze barometriche osservate in questo mese è 39,11, ed è superiore di mm. 2,06 alla media di Dicembre degli ultimi diciassette anni.

Il quadro seguente dà i massimi e minimi valori delle altezze osservate:

| Giorni del mese. | Minimi. | Giorni del mese. | Massimi. |
|---|---|---|---|
| 1 . . . . . | 36,20 | 2 . . . . . | 40,16 |
| 4 . . . . . | 18,82 | 9 . . . . . | 44,99 |
| 12 . . . . . | 29,79 | 14 . . . . . | 39,40 |
| 16 . . . . . | 28,47 | 19 . . . . . | 40,86 |
| 20 . . . . . | 34,86 | 25 . . . . . | 48,62. |

L'altezza barometrica dal 25 in poi si mantenne sempre sopra i 740 mm., crescendo ancora negli ultimi giorni in modo da raggiungere il valore 49,16 alle 9 p. del 31.

La temperatura fu molto variabile nella prima e nella seconda decade, poco nella terza. Nella prima variò fra $-5^\circ,9$ e $+11^\circ,0$; nella seconda fra $-5^\circ,2$ e $+10^\circ 5$; nella terza fra $-3^\circ,4$ e $+7,^\circ 0$. Gli estremi della temperatura del mese si ebbero nella prima decade.

Il valor medio della temperatura $1^\circ,4$ è inferiore di $1^\circ,2$ alla media temperatura di Dicembre degli ultimi diciassette anni.

Non si ebbero giorni piovosi, ma frequenti con nebbia fitta, e si raccolsero nel pluviometro mm. 2,9 d'acqua.

Il quadro seguente dà la frequenza dei venti.

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 6 | 9 | 8 | 0 | 1 | 0 | 6 | 21 | 38 | 2 | 6 | 2 | 0 | 1 |

In questa adunanza il Socio Cav. Prof. Giulio BIZZOZERO presenta un lavoro manoscritto del sig. Dott. L. GRIFFINI, Professore di Anatomia patologica nella R. Università di Messina, intitolato « *Contribuzione alla patologia del tessuto epiteliare cilindrico* ». Desiderando l'Autore che questo suo lavoro sia stampato nei vol. delle *Memorie*, si nomina una Commissione alla quale viene affidato perchè lo esamini e riferisca in proposito in una prossima adunanza.

**Adunanza del 27 Gennaio 1884.**

PRESIDENZA

DEL SOCIO ANZIANO SIG. COMM. PROF. ANGELO GENOCCHI

Il Socio Comm. Prof. M. LESSONA presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. Prof. L. CAMERANO:

# MONOGRAFIA

DEGLI

# IDROFILINI ITALIANI.

Il gruppo degli Idrofilini è rappresentato in Europa, secondo l'ultimo catalogo di Heyden, Reiter e Weise, da tre generi vale a dire *Hydrophilus*, Geoffroy, *Tropisternus*, Solier, *Hydrochares*, Lat.

I generi *Hydrophilus* e *Hydrochares* fanno parte veramente della fauna europea, il genere *Tropisternus* invece, affine al genere *Hydrophilus*, è un genere essenzialmente americano. Le sue specie abbondano principalmente nell'America centrale e nell'America meridionale.

Il Mulsant nel 1855 presentava alla Società Linneana di Lione una nota (1) nella quale annunziava la presenza di questo genere anche in Europa colle seguenti parole; « Le genre *Tro-* « *pisternus* établi par Solier dans la tribu des Palpicornes, pa- « raissait jusqu'à ce jour ne devoir comprendre que des Coléoptères « étrangers à l'Europe; or voici qu'une espèce de ce genre, et « qui plus est une espèce mexicane, vient d'être prise dans un

(1) *Additions et observations relatives à la Monographie des palpicornes.* Opuscules Entomol. 7, 1856.

« ruisseau coulant dans la forêt des Maures en Provence, par « M. Robert, l'un de nos entomologistes méridionaux les plus « zélés ».

La specie in discorso è, secondo il Mulsant, il *Tropisternus apicipalpis*, Chevrol., del Messico. Così che la stessa specie abiterebbe il Messico e la Provenza, dove sarebbe stata trovata in numero di due esemplari dal predetto signor Robert.

Non mi consta che questa specie sia stata trovata di nuovo nella stessa località o in altre località d'Europa.

Nel catalogo dello Stein, edizione del 1868, il genere e la specie in discorso sono considerate come dubitativamente appartenenti alla fauna europea.

Nel catalogo dei coleotteri di Gemminger ed Harold per la specie *apicipalpis* è indicato soltanto l'habitat del Messico quantunque si faccia menzione della pubblicazione del Mulsant.

Nei moderni lavori riguardanti la fauna coleotterologica francese non si parla del genere *Tropisternus*. Il Seriziat (1) dice: « Nous avons en France trois espèces d'Hydrophiles, l'*H. piceus*, l'*H. pistaceus* e l'*H. aterrimus*.

Io credo quindi sia d'uopo ritenere come poco certa la presenza in Europa del genere *Tropisternus*.

In Italia si trovano i generi *Hydrophilus* e *Hydrochares* i quali sono rappresentati da tutte o per meglio dire da quasi tutte, poichè una, a mio avviso, merita di essere meglio ricercata, le specie europee.

Nessuno si è occupato, almeno che io mi sappia, particolarmente dello studio di questi animali in Italia. Io ho creduto perciò di fare cosa non inutile di riunire le cognizioni che attualmente si hanno sopra questi animali interessanti non solamente dal punto di vista puramente tassonomico e dal punto di vista della loro distribuzione geografica, ma eziandio pei fenomeni di polimorfismo sessuale che essi presentano.

Nel corso del lavoro verrò menzionando i vari Autori italiani che parlano di specie del gruppo di coleotteri che stiamo studiando.

---

(1) *Histoire des Coléoptères de France*, 1880.

# IDROFILINI.

Il gruppo degli Idrofilini può essere caratterizzato brevemente nella maniera seguente :

Le antenne hanno nove articoli: il primo articolo è largo e compresso e più grande del secondo: il secondo articolo è subcilindrico e più lungo dei tre seguenti riuniti insieme : il sesto articolo serve di base alla *mazza* formata dai tre ultimi articoli. Il settimo e l'ottavo articolo sono allungati trasversalmente: il nono è di forma irregolare e alquanto compresso. Gli articoli costituenti la *mazza* sono ricoperti di fitta peluria.

Le mandibole e le mascelle sono poco sviluppate: le mandibole sono bidentate alla estremità: le mascelle hanno internamente due lobi quasi membranosi e ricoperti di piccole spine. I palpi mascellari sono più lunghi delle antenne. I palpi labiali sono di tre articoli: l'ultimo è più corto del secondo ed è un po' rigonfio.

Lo scudetto è ben spiccato e triangolare, e con lati presso a che eguali in lunghezza.

Il capo è convesso e più o meno carenato longitudinalmente. L'addome presenta cinque segmenti visibili ora tutti carenati longitudinalmente, ora, meno l'ultimo, lisci.

Zampe anteriori prive di peli natatorî.

Zampe mediane e posteriori coi tarsi compressi e rivestiti di peli natatorî nella loro parte interna.

Gli insetti di questo gruppo vivono nelle acque stagnanti o di lento corso. Essi compiono il loro sviluppo verso la metà dell'autunno, epoca nella quale sono abbondanti nelle pozzanghere. Essi passano generalmente in letargo e nella melma al fondo dell'acqua, od anche nella terra all'asciutto i mesi dell'inverno. Se l'inverno è mite, essi non cessano dal fare vita attiva e non è raro il caso di trovare idrofili in Gennaio ed in Febbraio liberamente moventisi nelle pozzanghere, anche quando queste sono ricoperte da un sottile strato di ghiaccio.

Gli Idrofilini amano tuttavia le acque un po' calde e ricche di vegetazione e soprattutto pantanose. Raramente ho trovato questi insetti nelle acque fredde e limpide.

Questi insetti non salgono molto sui monti e non mi consta che essi si trovino oltre ai 1500 o ai 1600 metri sul livello del mare.

Il loro regime è misto. Essi si nutrono sia di sostanze vegetali, sia di sostanze animali. Gli Idrofili amano molto più queste ultime e non la cedono in ferocia ai loro compagni di pozzanghere i Ditiscidi.

Il Mulsant e non altri Autori considerano gli Idrofili come erbivori. Il Mulsant dice (1): « Ils sont herbivores dans leur « dernier état et n'avaient pas besoin de l'agilité indispensable « aux carnassiers aquatiques pour saisir leur proie ».

Ciò deve essere modificato così: Gli Idrofilini sono onnivori, ma più carnivori che non erbivori. Essi non pare siano predatori, poichè per lo più si nutrono di animali morti o di sostanze animali in decomposizione.

In cattività, negli acquari, gli Idrofili sono ghiotti della carne cruda e quando non ne viene data loro per qualche tempo non raramente assalgono i tritoni, li mordono e talvolta riescono ad ucciderli e a divorarli in gran parte. Gli Idrofili sia allo stato di larva sia allo stato perfetto divorano le uova di rane e di Tritoni e non disdegnano i girini.

Il Duméril, ed altri Autori dopo di lui, avendo osservato che il canal digerente dell'Idrofilo perfetto era molto più lungo di quello della larva, avevano conchiuso senz'altro che l'Idrofilo perfetto era schiettamente erbivoro. Ciò, come si è già detto non è, e qui si ha una delle tante eccezioni alla regola generale della corrispondenza della lunghezza del canale digerente colla natura del cibo.

Gli Idrofilini sono buoni volatori, e spesso nottetempo viaggiano da pozzanghera a pozzanghera. La luce li attrae. A questo proposito si osservò ultimamente in Alessandria un fatto curioso. All'epoca della commemorazione del compianto Rattazzi essendosi illuminata la piazza principale di quella città con un fanale a luce elettrica, per varie sere un grande numero di *Hydrophilus*

(1) *Coléoptères de France — Palpicornes*, p. 104.

*piceus*, attratti dalla luce vennero dalle vicinanze di Alessandria a cadere ai piedi del fanale stesso con grande meraviglia di tutti, come riferì il Dottor A. Torre, presente al fatto.

Le femmine costruiscono una sorta di bozzolo o meglio una sorta di ovoteca, nella quale riuniscono le uova, che attaccano ad una foglia sommersa o a qualche fuscello, od anche a qualche pietra.

I generi Europei (1) appartenenti al gruppo degli Idrofilini possono venire distinti nella maniera seguente:

ARCO INFERIORE del 5° segmento ventrale
- armato di una spina ..... Genere *Tropisternus*
- inerme
  - Prosterno con una incavatura nella sua parte anteriore. Epistoma prolungantesi a mo' di dente ai suoi angoli anteriori ed esterni..... Genere *Hydrophilus*
  - Prosterno fatto a mo' di carena e senza incavatura nella sua parte anteriore. Epistoma rettilineo anteriormente. ..... Genere *Hydrochares*

Il gruppo degli Idrofilini è sparso per tutta Europa, ma è tuttavia più sviluppato nell'Europa media e nell'Europa meridionale.

In Italia, come già dissi, si trovano i due generi *Hydrophilus* ed *Hydrochares*.

## Genere **Hydrophilus** (2).

Géoffroy, *Ins. Par.* I, p. 180 (1764).

Oltre ai caratteri menzionati nella tavola precedente, il genere *Hydrophilus* presenta: le mandibole con due denti interni trasversali, depressi e un po' bifidi alla estremità; il secondo articolo dei palpi mascellari arcuato e spiccatamente più grande del susseguente: gli occhi grandi e molto sporgenti: il corpo

---

(1) Darò qui anche i caratteri del genere *Tropisternus* pel quale valgono le osservazioni sopra riferite.

(2) ὕδωρ, acqua; φίλος, amico.

grande, ovale, convesso e più o meno carenato longitudinalmente nella parte superiore: il prosterno piccolo e incavato; la sua punta è diretta in alto verso il mento: il mesosterno ora è piano, ora è più o meno incavato: il metasterno si prolunga in una punta aguzza notevolmente al di là dell'estremità dei trocanteri delle zampe posteriori I maschi hanno i tarsi delle zampe anteriori allargati e rivestiti di peli ventose.

Le femmine sono generalmente polimorfe.

Tre sono le specie che i migliori Autori moderni ammettono in Europa del genere *Hydrophilus*, esse sono l'*H. piceus*, Linn., l'*H. pistaceus*, Lap. e l'*H. aterrimus*, Eschsch.

In Italia, la presenza delle due prime è ben sicura, e a mio avviso incerta, per le ragioni che verrò dicendo in seguito la presenza della terza.

Le tre specie sopra menzionate si possono distinguere nel modo seguente:

ADDOME inferiormente
- carenato longitudinalmente in tutti i segmenti
  - Le elitre presentano alla loro estremità posteriore, all'angolo suturale, una piccola ma ben evidente spina ..... *H. piceus*
  - Le elitre non presentano spina alla loro estremità posteriore, all'angolo suturale ..... *H. pistaceus*
- addome convesso ma non carenato, che sull'ultimo ..... *H. aterrimus.*

Qualche Autore e fra questi Jaquelin Duval e Ph. Lareynie considerano l'*H. pistaceus* e l'*H. piceus* come una sola specie (1) pel fatto che essi hanno trovato una volta un maschio dell'*H. pistaceus* accoppiato con una femmina di *H. piceus*. Questo fatto isolato non ha alcuna importanza, come facilmente si comprende; trattandosi soprattutto di forme così affini, per legittimare la riunione delle due specie.

Non è facile nello stato attuale delle nostre cognizioni dire esattamente la distribuzione geografica delle specie del genere *Hydrophilus*.

---

(1) *Quelques observations sur les Coléoptères des environs de Montpellier.* Ann. Soc. Ent. Franc. 1852, p. 721.

L'*H. piceus* è la specie più diffusa in Europa.

L'*H. pistaceus* è forma essenzialmente meridionale ed occidentale.

L'*H. aterrimus* a quanto pare è forma dell'Europa centrale ed orientale.

La presenza di questa ultima specie in Italia merita, a mio avviso, di essere meglio accertata e studiata.

Il catalogo dei coleotteri italiani del Bertolini (1) dice:

*H. aterrimus*, Eschs., *morio* Sturm. — Trentino. — Liguria.

Nella collezione del compianto Cav. Eugenio Sella, collezione da lui legata, morendo, al R. Museo Zoologico di Torino, io trovai realmente due Idrofili col nome di *H. aterrimus* e coll'indicazione di *Liguria*: ma avendoli esaminati diligentemente, riconobbi con tutta facilità e sicurezza trattarsi invece di due *H. pistaceus*. Tutti i veri *H. aterrimus* della collezione del Sella provengono dalla Moravia.

Il Cav. Baudi di Selve, noto ed autorevole colleotterologo, da me interpellato intorno a questa questione, gentilmente mi rispose:

« In risposta alla domanda fattami nel pregiato suo foglio le dirò che in collezione posseggo due soli *H. aterrimus* un ♂ di Ungheria ed una ♀ di Svizzera, nè mi ricordo averne visto altri, meno poi di Liguria, dacchè son uso, ogniqualvolta mi viene sott'occhio qualche specie rinvenuta in Italia, che di tale provenienza non abbia, di prenderne nota nel mio catalogo ».

Il Dottor Gestro mi scrive da Genova: « Non mi consta che l'*Hydrophilus aterrimus* sia stato preso in Liguria. Nel Museo abbiamo di specie Liguri il *piceus* ed il *pistaceus*. Il signor Dodero, abile raccoglitore non ha mai trovato che queste due specie ».

La collezione entomologica del R. Museo Zoologico di Torino, quella del R. Museo Zoologico di Firenze (2), non hanno *H. aterrimus* nè di Liguria, nè di altre località italiane.

In Francia l'*H. aterrimus* non venne trovato che presso Strasbourg e in altre località del nord-est.

Io credo, perciò ripeto, che sia bene di fare nuove ricerche intorno alla presenza di questa specie in Liguria.

---

(1) Firenze, 1872, p. 41.

(2) *Catalogo della collezione di insetti italiani*. Firenze, 1876-1879.

Che l'*H. aterrimus* si trovi nel Trentino è più facile a spiegarsi, poichè sono varie le specie anche in altri gruppi di animali (Batraci, ad esempio) i quali appartengono alla fauna europea centrale ed orientale e che si addentrano più o meno nell'Italia settentrionale nelle vallate dell'Adige, del Po, ecc.

La distribuzione delle varie specie di *Hydrophilus* in Italia, è per quanto se ne sa ora, la seguente:

Io seguo qui le divisioni faunistiche dell'Italia già da me discusse e adottate in un mio precedente lavoro (1).

| NOME GENERICO E SPECIFICO | Provincia *Continentale* | Provincia *Peninsulare* | Provincia *Corso-Sarda* | Provincia *Siculo-Maltese* |
|---|---|---|---|---|
| *Hydrophilus piceus* . . . . . | + (8) | + (6) | + (9) | + (2) |
| » *pistaceus* . . . | | + (7) | + (4) | + (3) |
| » *aterrimus* . . | + (5) | | | |
| *Hydrochares caraboides* . | + | + | + | |
| var. *intermedia* . | + | » | + | |
| var. *scrobiculata* | + (10) | | | |
| *Hydrochares flavipes* . . . . | + | + | + | |

(1) *Monografia degli anfibi anuri italiani.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Sez. II, vol. XXXV, 1883.

(2) Catagnano, Escursioni entomologiche al bosco della Ficuzza e nei prossimi ex feudi di Marraccio e Catagnano fatto da Giacomo Pincitore Marott. Bull. Soc. Ent. Ital., 1873, p. 190.

(3) Vari autori. Collezione Sella, coll. Baudi, coll. Museo zoologico di Torino; Bertolini, op. cit.; Lago Leutini (G. La Rosa Libertini, *Naturalista siciliano*, anno 1, n. 12, p. 282).

(4) Vari autori. Bertolini, op. cit., coll. del Museo zoologico di Torino, coll. Museo zoologico di Firenze del cav. Baudi; Bargagli, Materiali per la fauna di Sardegna, Bull. Soc. Ent. Ital., 3, p. 50.

(5) Bertolini, Op cit.

(6) Vari autori. Museo zoologico di Firenze.

(7) Liguria, Coll. Sella, R. Museo zoologico di Torino.

(8) Molti autori. Il Sordelli lo trovò fossile nella torba presso Bernate.

(9) Collezione del Museo zoologico di Torino, Bargagli, Op. cit., p. 50.

(10) Bertolini, Catal. Coleott. Ital., p. 41.

## **Hydrophilus piceus** (Linn.).

*Dytiscus piceus*, Linn. Faun. suec. 214, 764. - Lyst. nat. 1, 664. Scop. ent. carn. 96 - 293.

*Hydrophilus ruficornis*. De Geer. Mem., vol. 4, 371, tav. 14, fig. 1-2.

*Hydrophilus piceus*, Fabr., Syst. ent. 228-1 - Rossi Faun., Etrur. - Oliv. entom. 3-39, p. 9, tav. 1, fig. 2. - Schneid. Mag. 364 - Payk. faun. suec. 1-178 - Illig. Kaef. pr. 248-10 - Latr. Hist. nat., vol. 10, 61 - Herbst Nat. 7-294, tav. 113 - Duftsh. Faun. aust. 1-258. - Gyll. Ins. suec. 1-113. - Schonh. Syn. ins. 2, 1. Miger Ann. du Mus., vol. 14, tav. 88, fig. 1, 2, 3. - Lamarck Anim. s. v. 4-535 - Brullé, Hist. nat. vol. 5 *bis*, 274, tav. 11. - Erichs. Kaef. 1, 206. - De Casteln., Hist. 2-49, tav. 3 - Heer fauna Helv. 483. - Mulsant Coléopt. de France Palpicornes, pag. 108. - Fairmaire e Laboulbéne Coléopt. de France, pag. 225. — Bargagli. Catalog Coleot. Sard. Bull. Soc. Ent. Ital. v. 3, p. 50. Bertolini, Catal. coleot. Ital. — Firenze, 1872, pag. 41. A. Bacciforti - Storia naturale degli Stagni, Parma, 1871 — Entomol. degli Stagni, Viadana 1873 (1). — Camerano. - Polimorfismo nella ♀ dell'*Hydrophilus*, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XII, 1877.

*Hydrous piceus*. Leach. Misc. 9-94 - Latr. Hist. nat. 366 — Curtis. — Ent. brit. 239 - Solier - Ann. Soc. Ent. Franc. vol. 3, 304.

*Oblungo, ovale; convesso, fatto a mo' di carena superiormente e longitudinalmente a cominciare dalla metà posteriore — Elitri posteriormente con una piccola spina all'angolo suturale; le elitri sono longitudinalmente striate ed hanno intercalatamente alle strie delle file di punti impressi. L'addome è carenato longitudinalmente sopra tutti i segmenti. Il colore è superiormente nero lucente talvolta con riflessi cuprei o di*

---

(1) L'autore ammette due specie l'*H. piceus*, Linn., e l'*H. minor*, Leach. Quest'ultima non è altro che una varietà più piccola della precedente.

*color nero olivastro scuro. Le parti inferiori e le zampe sono nere. Le antenne ed i palpi sono o giallastro-scure od anche brune.*

Maschi col 5 articolo dei tarsi anteriori dilatati e ricoperti di peli-ventose.

Femmine di due forme principali, le une col margine laterale delle elitre lisce, e le altre col margine delle elitre provviste di un grosso rialzo careniforme nella parte anteriore.

L'epistoma ha lateralmente e parallelamente ai suoi margini una depressione punteggiata. Esso presenta inoltre due solchi punteggiati che partono dagli angoli anteriori e convergono fra loro verso la parte posteriore senza tuttavia riunirsi. La fronte ha al margine interno di ciascun occhio una depressione intensamente punteggiata.

Il protorace è in generale due volte più largo che lungo con due leggere incavazioni punteggiate in alto verso il mezzo. Talvolta vi hanno quattro infossature, due superiori e due inferiori. Presso ai margini laterali vi sono pure due o più gruppi di punti, più radi, ma ben spiccati.

Lo scudetto è grande ed ha quasi la forma di un triangolo equilatero ora è privo di punteggiatura, ora invece ha un punto incavato molto spiccato nella sua parte inferiore.

Le elitre sono alla loro base un po' più larghe della parte posteriore del protorace. La profondità delle strie longitudinali e delle serie di punti impari varia alquanto.

La spina suturale varia pure nello sviluppo, ma essa è tuttavia sempre riconoscibile.

Inferiormente il mesosterno ora, è piano o leggermente incavato, come si osserva nelle femmine; ora invece è profondamente scavato come nei maschi.

La spina metasternale è aguzza e giunge generalmente fino ai due terzi del secondo segmento visibile dell'addome.

*Dimensioni massime e minime.*

| | Lunghezza | Larghezza |
|---|---|---|
| ♂ | m. 0,044 | m. 0,022 |
| » | » 0,034 | » 0,018 |
| ♀ | » 0,046 | » 0,024 |
| » | » 0,038 | » 0,020 |

Questa specie presenta numerose varietà sia nella punteggiatura, sia nella colorazione; le principali che io ho osservato, sono le seguenti:

*a* - Due infossature alla base del protorace, (fig. 5). Questa varietà è frequente;
*b* - Protorace con sei infossature punteggiate, poco frequente;
*c* - Scudetto con una impressione puntiforme nel mezzo. Comune.
*d* - Scudetto con due impressioni puntiformi. Rara.
*e* - Elitre con tre linee di punti oltre le consuete, presso la sutura: due cioè che dalla base vanno quasi fino all'apice, ed una che pur cominciando presso alla base si scosta poco oltre l'angolo inferiore dello scudetto. Non comune.
*f* - Elitri punteggiate e granulose. Rara.
*g* - Colore generale del corpo superiormente nero con riflessi rosso verdastri. Frequente.
*h* - Colore generale nero violaceo intenso. Rara.
*l* - Elitre col margine esterno rossigno ben evidente. Non rara.
*m* - Antenne cogli ultimi articoli bruno scuri. Non rara.
*n* - Antenne e palpi giallo-chiari. Non rara.

Le femmine di questa specie presentano il fatto notevole del polimorfismo sessuale che io descrissi in un precedente lavoro (1), al quale rimando il lettore, che desidera maggiori particolari in proposito. Nelle figure 1 e 5 sono le femmine di una forma quella col rialzo careniforme sul margine delle elitre e nella figura 2 vi è l'altra forma; quella priva di rialzo careniforme.

## **Hydrophilus pistaceus** Casteln.

*Hydrophilus pistaceus*, Casteln. Hist. Nat. II, p. 50. - Dahl, Déj. Cat. 3ª ediz., pag. 147 — Faimaire e Laboulbéne, Faune entomol. Franc., pag. 225. — Bargagli, Catalogo dei coleotteri di Sardegna. Boll. Soc. Ent. Ital. 3, 50. — Bertolini, Catal. coleotteri italiani. Firenze, 1872, pag. 41.

---

(1) *Polimorfismo nella femmina dell'* Hydrophilus piceus. Atti R. Accad. delle Scienze, vol. XII, 1877.

*Hydrophilus inermis*, Lucas. Expl. Alg. p. 244, t. 23, f. 3. Leprieur, Ann. Soc. Ent. Franc., 1854, pag. 69, t. 3, f. III, 3. — Jacq. Duv. Ann. Soc. Ent., Franc. 1857, pag. 88.

*La forma generale dell'animale è come nell'* H. piceus, *tuttavia nell'* H. pistaceus *la convessità è un po' maggiore. Le elitri mancano della piccola spina all'angolo suturale. Le strie e le serie di punti delle elitri non presentano differenze notevoli da quelle dell'* H. piceus. *La carenatura dell'addome è un po' meno forte che non nell'* H. piceus. *Il colore delle parti superiori è in complesso un po' più chiaro e più verdastro che non nell'* H. piceus. *Le parti inferiori e le zampe sono come nell'* H. piceus *per quanto riguarda il colore. Le antenne e i palpi sono di color giallo bruno chiaro.*

I *maschi* hanno il 5° articolo dei tarsi anteriori dilatato e coperto di peli ventose, la dilatazione è un po' diversa da quella dei maschi dell'*H. piceus*, poichè è più appuntita ed è leggermente rivoltata verso l'esterno all'estremità.

Le *femmine* presentano anche in questa specie, come nella precedente due forme principali, vale a dire una col margine laterale delle elitri liscie e l'altra col margine laterale fortemente carenato nel terzo superiore.

Per quanto riguarda la punteggiatura dell'epistoma, del capo, e del protorace le cose vanno come nell'*H. piceus*.

La forma dello scudetto è un po' diversa da quella dell'*H. piceus*. Esso è nell'*H. pistaceus;* meno appuntito (fig. 9ª) e non presenta quelle due piccole sinuosità presso all'angolo inferiore che si trovano, e talvolta spiccatissime nella prima specie (fig. 8ª).

Il mesosterno è come nell'*H. piceus*, la differenza fra l'incavatura nei due sessi è un po' minore. La spina metasternale e un po' più corta e più diritta; essa non presenta quella leggera curvatura in basso che si osserva nella specie precedente.

*Dimensioni massime e minime.*

| | Lunghezza | Larghezza |
|---|---|---|
| ♂ | m. 0,038 | m. 0,029 |
| » | » 0,037 | » 0,027 |
| ♀ | » 0,040 | » 0,022 |
| » | » 0,033 | » 0,018 . |

Questa specie mi è sembrata meno variabile nella punteggiatura e nella colorazione della specie precedente.

Le femmine di questa specie presentano come quelle dell'*H. piceus* il fatto notevole del polimorfismo sessuale.

## **Hydrophilus aterrimus**, Eschsch.

*Hydrophilus aterrimus*, Eschsch. Entomogr. 1, p. 128. Erichs. Käf. Mark. 1, p. 206. — Letzner. Jahrb. Schles. Ges. 2, pag. 211, f. 31-33. — Fairmaire et Laboulbéne, Faun. Ent. Franc., pag. 226. — Mulsant, Palpicornes, pag. 110. — Bertolini, Catal. Coleott. Italiani, pag. 41 (Trent. ?, *non* Liguria).

La forma generale dell'animale è un po' diversa da quella dell'*H. piceus*, essa è meno ristretta posteriormente ed è più convessa: il contorno del corpo è un ovale meno ristretto.

La spina posteriore suturale delle elitre è appena accennata. Le strie e le serie di punti del capo, del protorace e delle elitre sono come nell'*H. piceus*, esse si presentano tuttavia un po'più spiccate, soprattutto per quanto riguarda le strie longitudinali.

L'addome è inferiormente convesso: ma non ha ripiegatura careniforme, mediana, longitudinale, salvo sull'ultimo segmento.

Il colore delle parti superiori è nero intenso e lucente con riflessi rosso cuprei o violetti. Nel rimanente la colorazione è come nell'*H. piceus.*

I maschi hanno il 5° articolo dei tarsi anteriori dilatato e con peli-ventose; la dilatazione è meno sviluppata che nell'*H. piceus* e quindi anche notevolmente meno di quella dell'*H. pistaceus.*

Non ho osservato nelle femmine di questa specie il polimorfismo sessuale come nelle specie precedenti: ma è probabile che esaminando molti esemplari vi si trovi. Le femmine hanno l'addome spiccatamente più convesso dei maschi.

Lo scudetto si avvicina nella forma a quello dell'*H. pistaceus.* L'incavatura del mesosterno è appena accennata nei maschi, nelle femmine è spiccata, ma non molto profonda. La spina metasternale è corta e leggermente risvoltata in basso.

*Dimensioni.*

| | Lunghezza | | Larghezza | |
|---|---|---|---|---|
| ♂ | m. | 0,036 | m. | 0,020 |
| ♀ | » | 0,038 | » | 0,021 . |

## Gen. **Hydrochares** (1)

Latreille. Fam. nat. p. 366 - 1825.

Oltre ai caratteri già menzionati nella tavola dei generi, il genere *Hydrobius* ha il settimo e l'ottavo articolo delle antenne sprovvisto di ciglia; le mandibole sono arcate e terminate da un dente bifido. Il prosterno è fatto a carena e si termina in punta posteriormente, il metasterno termina in una spina corta e piccola, la quale oltrepassa appena la base dei trocanterî delle zampe posteriori.

Il corpo è più largo nella parte posteriore che non nella anteriore.

Nei maschi le unghie terminali dei tarsi anteriori sono un po' più sviluppate di quelle delle femmine e sono ripiegate quasi ad angolo retto, mentre nelle femmine sono semplicemente incurvate.

PROSTERNO
- in forma di carena spiccata e colla punta posteriore prolungata a mo' di spina ..... *H. caraboides*
- rialzato in forma di carena più sviluppata anteriormente che posteriormente ; il prosterno non si prolunga posteriormente in una spina ..... *H. flavipes.*

## **Hydrochares caraboides** (Linn.).

*Dytiscus caraboides*, Linn. Faun. suec., 214. 765. Syst. nat., I, 664-2.

*Dytiscus scarabaeoides* - Schrank. Enum. ins. 198, 371.- Faun. bor. I, 449, 448.

*Hydrophilus nigricornis.* De Geer., Mem. 4, 376, 2.

---

(1) ὕδωρ, acqua ; χαίρω, gaudeo.

*Hydrophilus caraboides.* Fab. Syst., 228, 2. — Rossi. Faun. Etr. 1, 195, 482. — Mantis. I, p. 65, 158. — Oliv. Ent., vol. 3, 39, p. 11, 2, tav. 2, fig. 8. — Payk. Faun. Suec. 1, 179, 2. — Illig. Kaef. 1, 247, 7. — Herbst. natur, v. 7, 299, 5, tav. 113, fig. 9. — Panz. Faun. yer. 67, 10. — Lath. Hist. nat., 10, 62, tav. 81, fig. 7. — Duf. Faun. austr. 1, 238, 2. — Gyll. Ins. suec. 4114, 2. — Leach. Miscel. 3, 94. — Curtis. British. ent. 159. — Sturm. Deut. Faun. 9, 111. — Heer. Faun. helv. 1, 483, 3.

*Hydrous caraboides.* Brullé, hist. nat., 5 *bis*, 276, tav. 11, fig. 2. — Casteln. Hist. nat., 2, 52. — Mulsant. Palpicornes, pag. 112. — Fairm. et Laboulb. Faun. Franc., p. 226. — Bertolini, Cat. Coleott. Ital., pag. 41. — Bargagli, Catal. Colett. Sard., Boll. Soc. Ent., 3, 50.

*Hydrochares caraboides.* Gem. Harold. Cat. Coleopt., 2, p. 478. — Catal. Collez. Inset. Ital. del Museo di Firenze, p. 35. — Heyden. Reitter. Weise. Cat. Coleopt. Europae, 3ª ediz. 1883, pag. 34.

*Il corpo è ovale, oblungo più largo, posteriormente che non anteriormente. Le elitre sono arrotondate posteriormente e percorse longitudinalmente da strie e da serie di punti: le prime sono generalmente poco spiccate: le seconde sono ben evidenti. Le parti superiori sono di color nero lucente, con talvolta riflessi cuprei: le parti inferiori sono nere: le estremità sono nere o talvolta più o meno bruniccie o rossastro chiare.*

*Dimensioni.*

| Lunghezza totale | | | Larghezza | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ♂ | m. | 0,018 | m. | 0,009 | Sardegna |
| ♀ | » | 0,018 | » | 0,010 | Sardegna |
| ♀ | » | 0,015 | » | 0,009 | Piemonte |
| ♀ | » | 0,018 | » | 0,009 | Piemonte |
| ♀ | » | 0,017 | » | 0,010 | Sardegna var. *intermedia.* |

Questa specie è variabile per la forma del corpo e pel colore delle estremità ed anche per le striature e le punteggiature.

In Italia ho trovato due varietà principali per quanto riguarda la forma generale: una nella quale l'allargamento poste-

riore è relativamente poco spiccato (fig 9) e l'altra nella quale esso è spiccatissimo (fig. 8). Quest'ultima forma è più rara della prima. Rispetto alla punteggiatura e alla striatura delle elitre si incontrano varietà riguardanti la loro intensità: le strie sono sempre poco visibili. In qualche individuo di Sardegna di mole relativamente grandi sono un po' più spiccate.

Rispetto al colore due sono le varietà essenziali.

Var. *A* - *tipica* - parti inferiori nere: zampe intieramente nere. Comune.

Var. *B* - *intermedia*. Mulsant. (Palpic. pag. 113) nella quale le parti inferiori sono meno scure e le zampe anteriori hanno le coscie e le zampe di color rosso-bruno più o meno spiccato. Qualche volta anche il secondo ed il terzo paio di zampe sono di color rossiccio. Questa varietà è più rara della precedente, e l'ho osservata di Piemonte, dove si trova insieme alla var. *tipica*, e di Sardegna.

Non ho trovato nessun individuo che corrisponda alla var. *scrobiculata*, Panz., la quale ha le elitre rugose e ondulate; il Bertolini la menziona di Lombardia.

## **Hydrochares flavipes** (Steven.).

*Hydrophilus flavipes*, Steven. in Schönherr Syn. Ins. vol. 2 pag. 3.

*Hydrous flavipes*. Mulsant. Palpic. p. 114. — Fairm. et Laboulb. Faun. Entomol. Franc. p. 226. — Bertolini, Cat. Coleot. Ital., pag. 41. — Bargagli, Cat. Coleot. Sard. Boll. Soc. Ent. Ital., 3, 50.

*Hydrochares flavipes*. Catal. Coll. Ital. del Mus. di Firenze, pag. 35. — Gem. e Harold. Cat. Coleopt., pag. 478, 2. Heyden, Weise e Reitter. Cat. Coleopt. Europ., pag. 34.

*Hydrophilus scrobiculatus* Déjan. (nome di collezione secondo, il Mulsant. Palpic., pag. 115).

*Il corpo è ovale, oblungo, un po' più largo posteriormente, nero tuttavia che non nell'* H. caraboides, *la forma generale rassomiglia di più alla specie del genere* Hydrophilus. *La striatura*

*e la punteggiatura è a un dipresso come nell'* H. caraboides. *Lo scudetto è in forma di triangolo ad angoli più acuti che non nella specie precedente. Il prosterno non si prolunga posteriormente in una spina. Le parti superiori sono di color lucente con tendenza all'olivastro. Le parti inferiori sono nere, le zampe sono di color giallo-chiaro o bruno-chiaro, salvo la base e l'apice dei femori e il margine interno delle tibie che sono neri, le spine e i tarsi talvolta sono neri.*

*Dimensioni.*

| | Lunghezza | | Larghezza | |
|---|---|---|---|---|
| ♂ | m. | 0,014 | m. | 0,008 |
| » | » | 0,015 | » | 0,008 |
| ♀ | » | 0,016 | » | 0,008 |
| » | » | 0,015 | » | 0,009 . |

Questa specie è meno variabile della precedente nella forma, nella punteggiatura ed anche nella colorazione. Varia il colore delle zampe, le quali possono essere di un giallo-chiaro o di un bruno-scuro quasi nero. Il carattere del prosterno varrà sempre a far distinguere facilmente questa specie dalla precedente.

L'*H. caraboides* e l'*H. flavipes* si trovano frequentemente insieme e pare abbiano eguali costumi.

L'*H. flavipes* è tuttavia forma più meridionale dell'*H. caraboides.*

☛ La Tavola VII va unita alla Memoria del Professore L. Camerano: *Monografia degli Idrofilini italiani*, pagg. 270-287, pubblicata nella dispensa 2ª degli *Atti* (Gennaio 1884).

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1, 2, 3. *Hydrophilus piceus.* — Fig. 1 ♀, colla carena laterale sul terzo anteriore delle elitre. — Fig. 2 ♀, seconda forma di femmina senza carena laterale. — Fig. 3 ♂.

» 4, 6. *Hydrophilus pistaceus,* — Fig. 4 ♂ - Fig. 6 ♀.

» 7. *Id. aterrimus* ♂.

» 5. *Id. piceus* ♀ della prima forma (Fig. 1) per mostrare la carena laterale delle elitre (*a*) e la punteggiatura.

» 8. *Hydrophilus piceus* per mostrare la punteggiatura del protorace e la forma dello scudetto (*a*).

» 11. *Hydrophilus pistaceus* - (*a*) scudetto.

» 12. Estremità posteriori dell'elitre di *Hydrophilus piceus* - (*a*) spina suturale.

» 12 *bis.* Estremità posteriore dell'elitre di *Hydrophilus pistaceus.*

» 13. Antenna di *Hydrophilus piceus.*

» 14. Tarso delle zampe anteriori del ♂ di *Hydrophilus aterrimus.*

» 15. Id. di *Hydrophilus piceus.*

» 16. Id. di *Hydrophilus pistaceus.*

» 17. Id. *Hydrochares caraboides*, per mostrare la punteggiatura.

» 9, 10. *Hydrochares caraboides.*

» 20. *Hydrochares flavipes.*

» 18. Prosterno dell'*Hydrochares caraboides.*

» 19. Prosterno dell'*Hydrochares flavipes.*

Il Socio Cav. Prof. G. Basso presenta il seguente suo lavoro

# SOPRA UN MODO

## DI MISURARE

# L'INTENSITÀ DELLE CORRENTI ELETTRICHE.

Nell'Adunanza del 14 Maggio 1882 io ebbi l'onore di presentare all'Accademia un mio strumento, che chiamo *apparato reometrico a deviazione massima*, destinato alla misura dell'intensità delle correnti elettriche. Siccome da quel tempo in poi ho sottoposto questo apparato a nuovi esami, collo scopo di riconoscere viemeglio le condizioni in cui se ne possono ottenere migliori risultati, così mi permetto adesso di tenerne ancora parola, incominciando a ricordare il principio teorico su cui esso si fonda e le parti principali che lo costituiscono.

Al disopra del piano orizzontale in cui può muoversi l'ago calamitato d'una bussola ordinaria è disposto un conduttore filiforme giacente nel meridiano magnetico. Esso è principalmente formato di una porzione rettilinea orizzontale, pel punto medio della quale passa l'asse di rotazione dell'ago; questa stessa porzione si prolunga da una parte e dall'altra in due rami verticali che discendono fino al piano orizzontale dell'ago e pescano ciascuno in un vasetto metallico contenente mercurio e comunicante con un serrafilo. Tale filo conduttore si può, mediante una dentiera ed un rocchetto, alzare od abbassare a volontà, in modo da portare la sua porzione orizzontale più o meno vicina all'ago.

Quando una corrente elettrica d'intensità costante $I$ attraversa il conduttore, l'ago devìa dal meridiano magnetico. Applicando i principii della teoria elettrodinamica di Ampère io dimostrai che

esiste, per l'angolo di deviazione, un valore $\alpha$ *massimo* corrispondente ad una certa distanza fra la porzione orizzontale della corrente e l'ago. Ho anzi trovata a questo riguardo la relazione:

$$I = p \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \alpha + q \operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{tang} \alpha \qquad \ldots\ldots (a)$$

nella quale $p$ e $q$ sono due *costanti* dello strumento facili a determinarsi mediante due esperienze preliminari.

Quindi, semplicissimo è il modo di procedere alla misura dell'intensità di una data corrente elettrica. Si inserisca nel circuito di quest'ultima il conduttore dell'apparato, già disposto preventivamente nel meridiano magnetico; tale conduttore essendo un filo di rame il cui diametro è di circa 3 millimetri e la cui lunghezza è all'incirca di mezzo metro, la sua introduzione nel circuito non modifica sensibilmente l'intensità della corrente che si studia. Poscia s'innalzi o si abbassi lentamente il conduttore, tenendo d'occhio l'ago, fino a che questo abbia raggiunta la sua massima deviazione, la quale si potrà leggere subito sopra un cerchio graduato sottostante: la formola ($a$) ci permetterà immediatamente di calcolare l'intensità della corrente.

Era necessario che, prima di proporre l'uso dell'apparato reometrico a massima deviazione, io mi assicurassi della concordanza fra la legge teorica su cui esso si fonda e la esperienza, facendo agire sull'apparato stesso correnti d'intensità preventivamente conosciute. Ciò venne fatto, ed i risultati ottenuti già esposi in un precedente lavoro; qui ricordo soltanto che dalle numerose prove eseguite risultò potersi lo strumento adoperare comodamente e con sufficiente precisione quando le intensità di corrente da misurarsi sono comprese fra la metà di un ampère e dieci ampère circa.

Più tardi mi accinsi a nuove verificazioni sperimentali anche più estese delle precedenti: esse furono eseguite nel Laboratorio di fisica del Regio Museo Industriale, colla gentile annuenza del Prof. Galileo Ferraris e colla cooperazione del suo assistente Dottor Paolo Morra. In ciascuna esperienza si inserivano in uno stesso circuito: 1° Una pila di elementi Bunsen, il cui numero poteva variare da 2 a 40; 2° Un voltametro ad acqua acidulata, in cui l'effetto elettrolitico, misurato colle dovute precauzioni, faceva conoscere l'intensità della corrente; 3° l'apparato reometrico a massima deviazione; 4° un altro stromento misuratore di correnti che in molti casi fu l'elettrodinamometro di Werner Siemens ed

in alcuni altri fu il galvanometro a spina di pesce, di Marcel Deprez. Quest'ultimo apparato è destinato alla valutazione di correnti molto intense, anzi così intense che per esse non sarebbe più adatto il mio reometro; perciò non ho potuto fare a questo riguardo numerosi e decisivi confronti. Ma ogniqualvolta mi occorse di far agire una medesima corrente sul mio reometro e sull'elettrodinamometro Siemens (a filo sottile), ottenni risultati, dai quali l'accordo fra le indicazioni dei due strumenti appariva abbastanza soddisfacente.

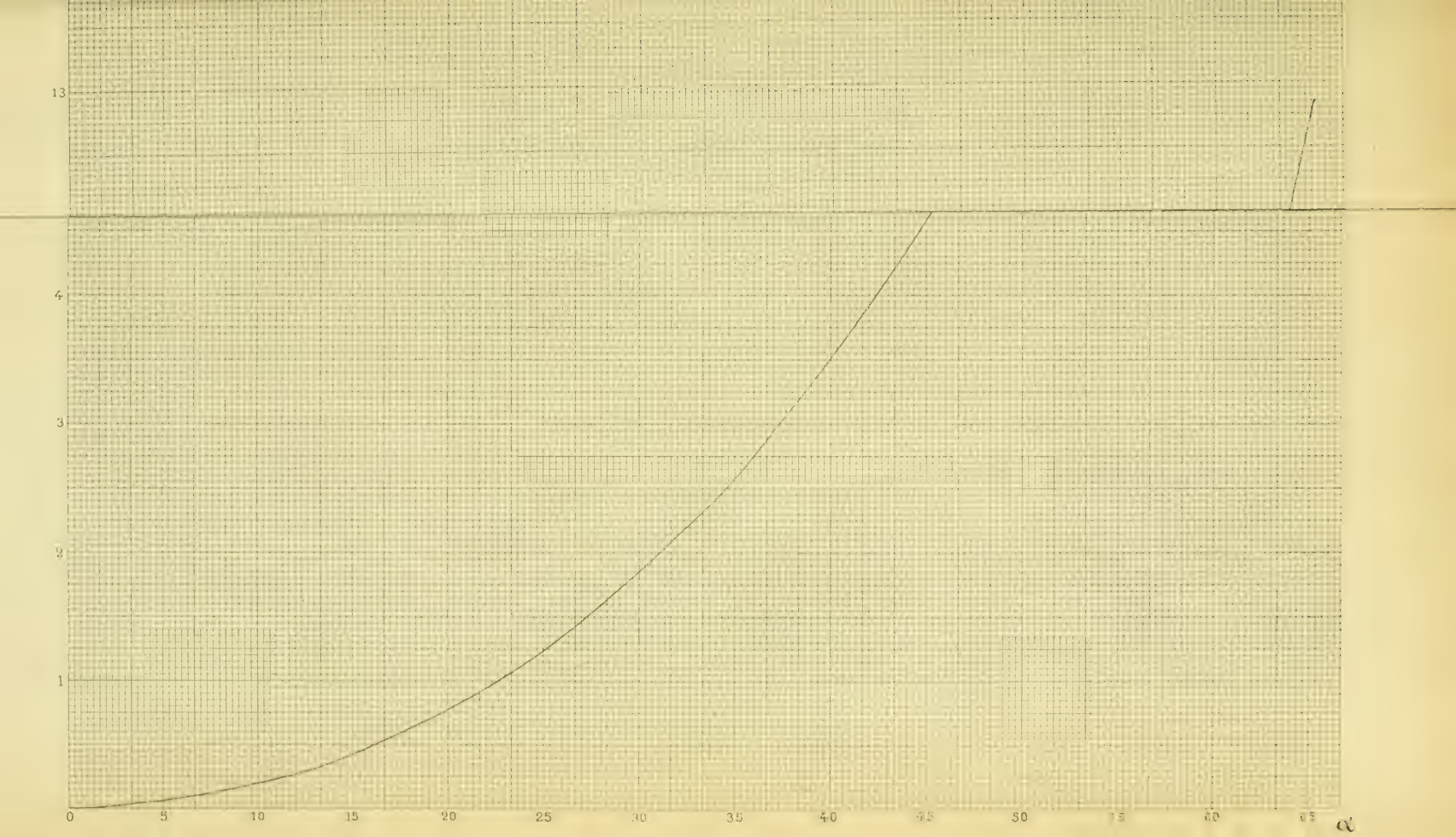
Un altro scopo avevano questi miei nuovi studi. Nella formola ($a$) il termine $q \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tang} \alpha$ nasce dalla considerazione dell'azione esercitata sull'ago dalle due porzioni verticali di corrente. Quest'azione è assai debole a fronte di quella dovuta alla porzione orizzontale. Era però utile il ricercare se, dando a quest'ultima una lunghezza notevole (nel mio apparato essa è di m. 0,52), non si possa addirittura del tutto trascurare quel termine, in modo che le costanti nello strumento si riducano alla sola $p$ e così siano ridotti alla massima semplicità i calcoli numerici che si debbono eseguire: cosicchè, posto nella formola per $\alpha$ il valore della derivazione massima fornito dallo strumento, se ne ricavi subito l'intensità $I$ della corrente.

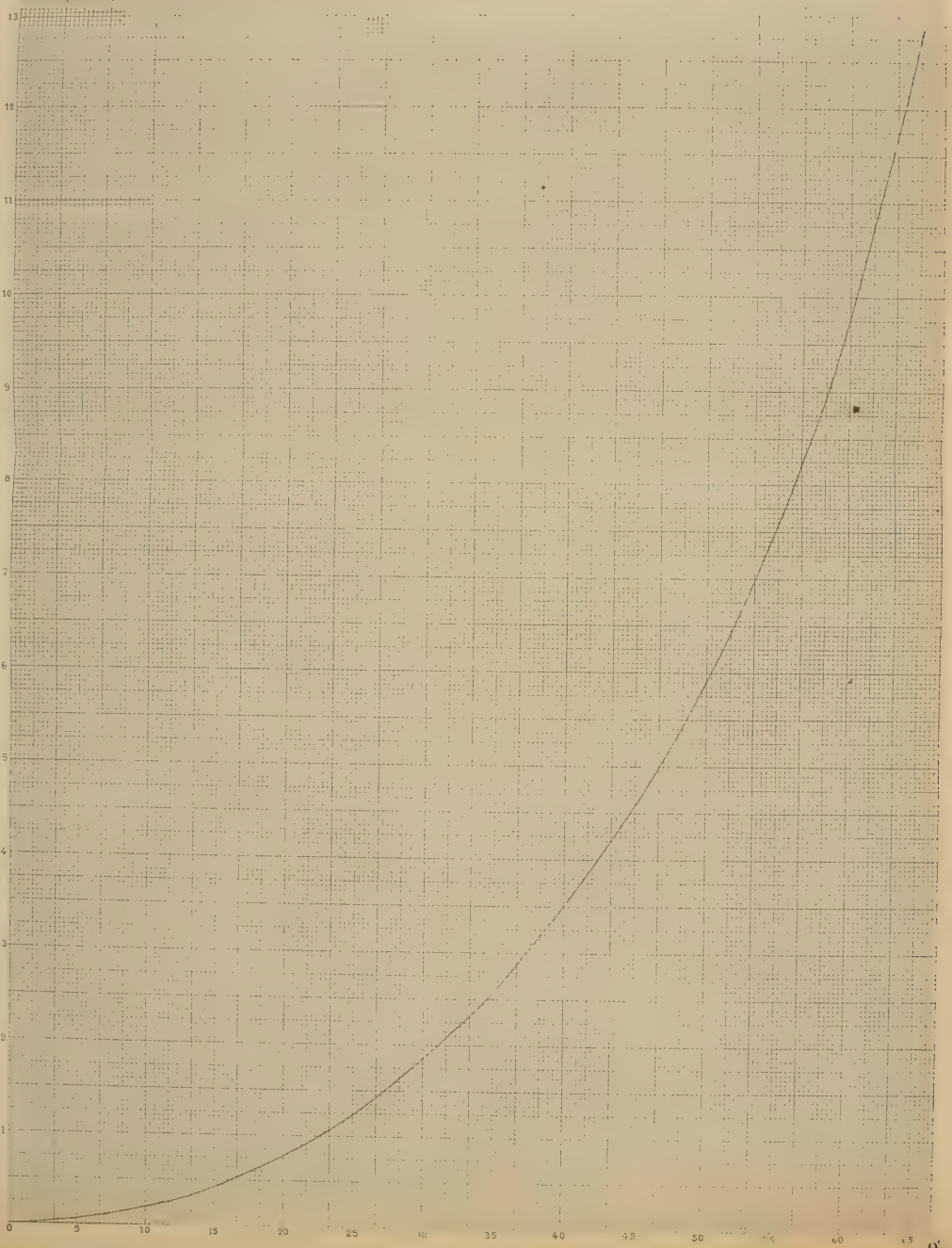
Dal complesso delle mie nuove ricerche risultò appunto che questa semplificazione è legittima; la formola può dunque essere scritta:

$$I = p \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \alpha \qquad \ldots\ldots (b),$$

nella quale, pel mio apparato, ho trovato per la costante $p$ il valore 6,5.

L'unita tavola grafica mi dispensa dal presentare, raccolti in quadri numerici, i risultati delle mie numerose esperienze. Di più la stessa tavola ha il vantaggio di fornire direttamente, per lo strumento a cui essa si riferisce, l'intensità di una corrente qualunque che corrisponde ad un dato angolo di massima deviazione. Basterà avvertire che le ordinate della curva (parallele alla $OI$) rappresentano le intensità di corrente, equivalendo l'ampère alla lunghezza del doppio centimetro; le ascisse (parallele alla $O\alpha$) sono le deviazioni massime fornite dall'apparato reometrico ed ogni grado di deviazione vi è rappresentato dalla lunghezza di tre millimetri.


13
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
α


13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
40
35
40
45
50
60
α

Il Socio Cav. Prof. Alessandro Dorna, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia, affinchè vengano annesse agli *Atti*, in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni barografiche* dal 1° Aprile al 31 Dicembre 1883, state ricavate, col registratore automatico dell'Osservatorio, dall'Assistente Prof. Donato Levi.

Questi lavori vedranno la luce nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia.

---

Il lavoro del sig. Dott. Corrado Segre « *Sulla Geometria della retta e delle sue serie quadratiche* » intorno a cui venne letta Relazione favorevole nell'adunanza del 30 Dicembre p. p., dopo essere stato letto alla Classe, fu con regolare votazione approvato per la stampa nei volumi delle *Memorie*.

# SOMMARIO

## Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.


NACCARI G[illegible]LIELMO — Sul riscaldamento degli elettrodi prodotto dalla [illegible]alla d'induzione nell'aria molto rarefatta . . . . . *Pag.* 209

CURION[illegible] [illegible]azione sulla Memoria del sig. Ing. Prof. GUIDI « *Sugli a[illegible]ici* » . . . . . » 216

D[illegible] [illegible]tori dell'Osservatorio astronomico di Torino . . . . . » 218

BIZZOZERO — Presentazione di un lavoro manoscritto del Dottore L. GRIFFINI, intitolato « *Contribuzione alla Patologia del tessuto epiteliare cilindrico* » . . . . . » 219

CAMERANO — Monografia degli idrofilini italiani . . . . . » 220

BASS[illegible] S[illegible]a un modo di misurare l'intensità delle correnti elet- . . . . . » 238

DO[illegible] I[illegible] dell'Osservatorio astronomico di Torino . . . . . » 241

S[illegible] [illegible]azione della Memoria « *Sulla Geometria della retta* [illegible]*rie quadratiche* » nei volumi delle *Memorie* . . . » 241

[illegible]municazione di una lettera dell'Avvocato Filippo . . . . . » 242

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XIX; DISP. 3ª (*Febbraio* 1884)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

**Febbraio**

1884.

# CLASSE

## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza del 10 Febbraio 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Cav. Prof. L. Bellardi presenta e legge il seguente lavoro del sig. Federico Sacco, Studente in Scienze naturali, Assistente al Museo di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università di Torino:

## NUOVE SPECIE FOSSILI

DI

# MOLLUSCHI LACUSTRI E TERRESTRI

## IN PIEMONTE.

Chi intraprende lo studio dei Molluschi fossili terziarii del Piemonte, è naturalmente indotto ad osservare che, mentre si annoverano in quantità veramente straordinaria i fossili marini, scarsissimo invece è il numero di quelli terrestri o d'acqua dolce. Ciò dipende principalmente dal fatto che nell'êra terziaria il mare, eccetto poche interruzioni, sovente locali, ebbe il predominio su quasi tutto il Piemonte; ma la scarsità sovraccennata è pure in parte cagionata dal cattivissimo stato di conservazione in cui trovansi generalmente i fossili terrestri o lacustri, il che ne rende oltremodo difficile lo studio.

Un altro fatto assai importante da notare si è che le principali formazioni d'acqua dolce che trovansi nei terreni terziarii del Piemonte sono generalmente formazioni di passaggio tra l'uno e l'altro dei tre periodi in cui i geologi Piemontesi usarono fi-

nora suddividere l'êra terziaria (1); ciò che indicherebbe che, sul finire di ciascuno di questi periodi, il moto di sollevamento si faceva sentire con maggiore intensità, facendo arretrare il mare e sostituendovi per sempre, o solo per un tempo più o meno lungo, il regime terrestre o lacustre.

Infatti noi vediamo che quasi sul principio del periodo miocenico si formarono in diverse località depositi fluvio-lacustri e terrestri talora assai potenti, i quali, oltre a *Planorbis*, *Unio*, *Anodonta* ed altri Molluschi d'acqua dolce, racchiudono anche Cheloni, Sauri, Rinoceronti, Antracoteri, nonchè una flora molto ricca e molto importante in commercio, potendo talora essere utilizzata per l'estrazione della lignite, come a Bagnasco e Nuceto nella valle del Tanaro.

Nei terreni di transizione tra il miocene ed il pliocene riscontriamo nuovi depositi lacustri e d'acqua salmastra, cioè la notissima formazione gessifera racchiudente impronte di vegetali, di Insetti e Molluschi lacustri, fluviatili e specialmente d'acqua salmastra, come a Guarene, Agliano ecc.; inoltre, poco al disopra di questo orizzonte, e veramente alla base del Pliocene, sonvi talora altri depositi lacustri, come ad esempio quelli che si riscontrano sullá riva sinistra del Tanaro tra Cherasco e Carrù, e che racchiudono *Melanopsis*, *Melania*, *Neritina*, *Paludina* ecc.

Infine sul termine dell'êra terziaria, nei terreni di passaggio tra il periodo pliocenico e l'êra quaternaria, possiamo ancora osservare formazioni fluvio-lacustri costituite da una congerie di marne, sabbie e conglomerati disposti in lenti irregolarmente alternate, talora estesissime e di varia potenza, ricoprenti il pliocene marino, e che contengono una fauna assai ricca in Mastodonti, Elefanti, Rinoceronti, Ippopotami ecc., e talora anche conchiglie fluvio-lacustri; il sopraccennato complesso di strati ricevette dal Marchese L. Pareto l'appellativo di *Villafranchiano* (2), perchè riscontrato dapprima nei contorni di

(1) Probabilmente la parte inferiore del miocene, quale venne finora considerato in Piemonte, si dovrà in avvenire scindere dal miocene ed ascrivere all'oligocene, che altrove venne già inserito nella serie dei terreni tra l'eocene ed il miocene.

(2) M. L. Pareto, *Note sur les subdivisions que l'on pourrait établir dans les terrains tertiaires de l'Apennin septentrional.* Bulletin de la Soc. Géol. de France, 1865.

Villafranca d'Asti, e dal Prof. B. Gastaldi quello, assai più usitato dai geologi, di *Alluvioni plioceniche*, essendo alluvioni che ricoprono il pliocene marino; bisogna però ben distinguere questa formazione da quella più recente che racchiude resti fossili di Mammouth, di Buoi, di Cervi ecc., ed alla quale il Pareto diede il nome di *Arcneano*.

Siccome è alle alluvioni plioceniche che appartengono i Molluschi fossili che formano l'oggetto della presente Memoria, così credo opportuno di dare alcuni brevi cenni intorno alla loro estensione e costituzione nel Piemonte in generale e particolarmente nella valle della Stura di Cuneo dove i suddetti fossili si rinvengono piuttosto abbondanti.

Finora resti fossili attribuibili alle alluvioni plioceniche non s'erano ancor trovati al Sud del paesello di Sommariva del Bosco, mentre di lì andando verso il Nord non sono rari tali incontri, perchè questa formazione costituisce quasi la superficie della pianura padana ad Est di Carmagnola, estendendosi sin presso Andezeno, come pure il culmine di quasi tutte le colline d'erosione dell'Astigiana, le quali, nell'epoca appunto in cui vivevano i Mastodonti, formavano un'ampia distesa pianeggiante da Poirino ad Alessandria, sicchè gli strati ed i fossili in discorso incontransi ancora a Mazzo, a Felizzano ecc.

È notevole che quantunque queste alluvioni plioceniche constino di molti sedimenti marnosi d'origine lacustre, raramente si fa accenno di Molluschi d'acqua dolce rinvenuti in tale piano, mentre piuttosto comunemente vi si trovano resti di grossi Mammiferi; però il Prof. E. Sismonda, in una sua Memoria (1) sopra un Mastodonte angustidente rinvenuto presso Villafranca, nota quattro Molluschi d'acqua dolce, fra cui una specie nuova, alla quale diede il nome di *Clausilia mastodonphila*.

Da uno scritto del Marchese L. Pareto (2) rilevo che nella località di Villafranca e di S. Paolo, dove specialmente si ritrovarono resti di Mastodonti, la costituzione del suolo è all'incirca quella che qui riproduco, per poterla poi confrontare con quella

---

(1) E. Sismonda, *Osteografia di un Mastodonte angustidente*. Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie II, tomo XIII, 1851

(2) M. L Pareto, *Coupes à travers l'Apennin, des bords de la Méditerranée à la vallée du Pô, depuis Livourne jusqu'à Nice*. Bulletin de la Soc. Géol. de France, 1861.

che si osserva nella valle della Stura di Cuneo presso Fossano; anzi a questo scopo distinguo i varii terreni con numeri romani che corrisponderanno ad altrettanti numeri romani nella sezione che indicherò per Fossano.

(VII) Terreno marnoso argilloso rossastro con ciottolini specialmente di Quarzo.

(VI) Marne grigio-gialle, argille, marne sabbiose, sabbie.

(V) Soventi volte vi è uno strato di sabbie limonitiche. *Mastodon* ecc.

(IV) Marne argillose spesso rossastre. *Mastodon* ecc.

Il complesso degli strati VI, V e IV ha lo spessore di circa 10 m.

(III) Marne gialle o grigie, talora un po' verdastre, con concrezioni calcaree biancastre friabili e piccoli banchi e lenti di calcare grigio marnoso e compatto. *Clausilia mastodonphila* ecc.

(II) Banco potente di sabbie disaggregate quarzose, bianche e grigie, con straterelli irregolari ocracei giallastri.

(I) Sabbie e marne del Pliocene marino.

Venendo ora particolarmente alla valle della Stura di Cuneo, debbo notare che il Pareto ed il Gastaldi, i quali accennarono di passaggio alla sua costituzione geologica, vi distinsero solo il terreno pliocenico marino ed il terreno diluviale, che già comincierebbe a mostrarsi potentissimo presso Fossano, mentre quivi in massima parte si tratta certamente di alluvioni plioceniche ben distinte sia paleontologicamente, sia litologicamente. Debbo però aggiungere che il Prof. L. Bellardi, il quale, oltre a 20 anni or sono, in compagnia del Prof. A. Sismonda, percorse tutta la valle della Stura sino alle sorgenti, aveva già notato, sulla sponda sinistra di questo fiume, nel territorio di Fossano, alcuni Molluschi fossili d'acqua dolce, e l'anno scorso, sapendo che io intraprendeva lo studio geologico di detta regione, mi esortò a ricercare quei fossili e determinarne la giacitura e l'età relativa, ciò che io potei compiere con un successo molto superiore all'aspettativa, giacchè, studiando i Molluschi che ho potuto rintracciare, conobbi trattarsi di una fauna quasi completamente nuova ed abbastanza ricca, il che mi spinse a scrivere la presente Memoria.

Rimontando attentamente la valle della Stura di Cuneo dal suo sbocco nel Tanaro e sempre tenendoci lungo la corrente del fiume, dopo aver percorsi oltre a 15 chilometri, osserviamo che, dapprima sulla sponda sinistra, 1 chilometro circa a monte del rio S. Giacomo, e poco dopo anche sulla sponda destra, i terreni incisi dal fiume cangiano molto di natura, giacchè alle marne ed alle sabbie del pliocene marino si sostituiscono per sovrapposizione conglomerati, sabbie e marne di natura assai differenti dalle prime, cioè un complesso di strati che, per il loro carattere litologico e pei fossili che contengono, debbonsi indubbiamente ascrivere alla formazione delle cosidette alluvioni plioceniche. Tale cangiamento dipende dal fatto semplicissimo che, sollevandosi verso monte poco a poco il letto della Stura per il natural pendìo, gli strati marini pliocenici che non si innalzano debbono necessariamente insinuarsi sotto il letto stesso del fiume, scomparendo così allo sguardo dell'osservatore, succedendovi invece le sovrapposte alluvioni plioceniche. Ma se dal livello della Stura ci innalzassimo sulle terrazze laterali, potremmo osservare assai bene in diversi punti, e specialmente nei rii di S. Giacomo, della Tagliata e nel torrente Veglia, il reciproco rapporto tra queste diverse formazioni geologiche, il diminuire in potenza di queste alluvioni verso Nord, e vedere che il cangiamento sovraccennato si compie sempre più a valle del punto sopraindicato man mano che saliamo sulle terrazze più elevate. Proseguendo invece a rimontare la corrente della Stura vediamo che le alluvioni plioceniche assumono la straordinaria potenza di 70, 80 metri e più, formando quasi intieramente il promontorio collinoso su cui siede la città di Fossano; le possiamo così seguitare verso monte per 10 e più chilometri sempre ben sviluppate su ambe le sponde della Stura, finchè anch'esse scompaiono poco a poco sotto il letto del fiume, venendo a loro volta sostituite dal *diluvium* sovrastante che si è fatto man mano più potente, senza che però si possa osservare bene il rapporto tra queste due formazioni geologiche a causa degli scarsi spaccati naturali esistenti in quella regione.

Ora per convincerci che il terreno in discorso si deve ascrivere veramente alle *Alluvioni plioceniche* e non già al *diluvium*, e per prenderci un'idea un po' esatta della loro costituzione nella valle della Stura, possiamo esaminare alquanto minutamente una località, dove ampi spaccati naturali mettano chiaramente in

vista i varii terreni componenti la formazione geologica in discorso. Ciò si verifica appunto sulla sponda sinistra del fiume, un chilometro circa a N. E. della città di Fossano, giacchè quivi si osservano alcuni enormi tagli quasi perpendicolari, da cui si può ricavare la seguente costituzione geologica:

(VII) { *Humus* (1 metro di spessore) - 370 m. sul livello del mare.
Ciottoli e terra gialla del *diluvium* (16 m. circa).

(VI) { Marna giallo-grigiastra alquanto sabbiosa (4 m.).
Conglomerati e sabbie (4 m.).
Marna gialla (5 m.).

(V) { Sabbie e conglomerati alternati e commisti (10 m.).
Sabbia marnosa - Marne calcaree argillose biancastre - Zanne di Proboscidati (8 m.).

(IV) { Sabbie fine e grossolane spesso di color giallo ocra - Sabbie argillose giallastre (8 m.).
Conglomerati con ciottoli improntati e screpolati; lenti sabbiose, legno limonitizzato (5. m.).

(III) - Marne gialle o grigie, spesso un po' sabbiose, talora di colore verdastro ed anche calcaree e dure. *Clausilia mastodonphila* ecc. (20 m.).

(II) - Banco potente di marne, sabbie, conglomerati, in strati alternati spesso giallastri (24 m.).

(I) - Porzione superiore del Pliocene marino rappresentato da sabbie e marne. 275 m. circa sul livello del mare.

La parte inferiore di questa sezione, quella cioè al disotto di 280 m. sul livello del mare, non si può osservare nelle località qui indicate, giacchè appunto a tale altezza quivi si trova il livello del fiume; ma fu invece dedotta da ciò che si vede più a valle, per completare la sezione. Debbo ora subito aggiungere che, se il rapporto tra le diverse formazioni componenti questo spaccato è in complesso abbastanza costante anche in località lontane fra di loro, questa costanza scompare quando noi vogliamo fare dei riscontri più minuti, giacchè si osservano

mutazioni abbastanza grandi sia nella composizione che nella potenza delle alluvioni plioceniche da una località all'altra, nella stessa valle della Stura; ciò dipende dal fatto che qui non si tratta di veri strati, ma bensì di un'alternanza irregolare di lenti più o meno allungate, costituite di marne, di sabbie o di conglomerati, che ci indicano depositi ora tranquilli ed ora torrenziali, a seconda delle variazioni nella caduta delle pioggie e delle nevi e specialmente per l'irregolare e frequente spostarsi delle correnti acquee sulla pianura padana in quell'epoca.

Però, se confrontiamo l'ultimo spaccato con quello sopradescritto per la regione di Villafranca d'Asti, possiamo osservare che la corrispondenza è abbastanza manifesta; anzi io ho creduto di poter segnare con cifre romane eguali gli strati o complessi di strati che mi paiono corrispondenti nelle due località; non già ch'io creda che tale correlazione sia dovunque perfetta, ma almeno molto prossima al vero nel maggior numero dei casi. Infatti alle marne e sabbie del pliocene marino (I) vediamo sovrapporsi, in ambedue le regioni, un banco assai potente (II) generalmente giallastro, costituito però di elementi, in complesso, più grossolani a Fossano che non a Villafranca; l'orizzonte (III) è molto ben caratterizzato dalle marne verdastre e dalle marne calcaree, ma soprattutto paleontologicamente da una bellissima specie di Mollusco d'acqua dolce, cioè dalla *Clausilia mastodonphila* E. Sismd., nonchè da *Helix*, ecc.; la correlazione degli strati (IV) e (V) è pure provata paleontologicamente dai resti di Proboscidati, ai quali vanno talora uniti resti di Cheloni, come io potei verificare nelle alluvioni plioceniche di Fossano, avendovi rinvenuta una piastra marginale di *Emys* spec., già menzionata dal Dottor A. Portis (1); il complesso di banchi segnati col numero (VI) può naturalmente ritenersi come abbastanza concordante nelle due località; infine l'orizzonte (VII), che non ha più nulla che fare colle alluvioni plioceniche, si deve indubbiamente attribuire al quaternario, sia a Villafranca che a Fossano.

Nel complesso poi si può notare che nel territorio di Fossano le alluvioni plioceniche sono generalmente più potenti e costi-

---

(1) A. Portis, *Nuovi Cheloni fossili del Piemonte.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie II, tomo XXXV, 1883.

tuite di materiali più grossolani che non altrove in Piemonte, il che si comprende facilmente, essendo questa regione circondata, molto da vicino, da elevate catene montuose, per cui le masse acquee alluviali dovevano quivi possedere ancora tale forza da trasportare spesso materiali assai grossolani ed in grande quantità, ciò che non si verificava nella valle padana in Piemonte in regioni poste più al Nord di questa e nelle quali osservinsi le alluvioni plioceniche.

Fatta così una rapida descrizione delle alluvioni plioceniche in Piemonte e particolarmente nella valle della Stura di Cuneo, possiamo passare all'esame dei Mollùschi che vi si rinvengono, avvertendo che essi si trovano quasi esclusivamente nel piano (III) e soltanto negli strati marnosi, giacchè, là soltanto dove si formavano depositi tranquilli di lago o di palude, potevano vivere e moltiplicarsi i Molluschi lacustri, oppure esservi trasportati in buon stato di conservazione i Molluschi terrestri.

Quantunque tutti i Molluschi da me rinvenuti appartengano alle alluvioni plioceniche di Fossano, ho creduto tuttavia di menzionare eziandio le quattro specie trovate dal Sismonda a S. Paolo presso Villafranca d'Asti, sia per completare il quadro dei Molluschi terrestri e lacustri finora conosciuti in Piemonte in questa formazione geologica, sia perchè due di queste specie sono nuove e non ancora descritte come tali.

Debbo ora per debito di riconoscenza rendere i dovuti ringraziamenti al gentilissimo signor Carlo Pollonera, il quale, per le sue profonde cognizioni Malacologiche, mi fu di validissimo aiuto nello studio e nella descrizione dei sopradetti Molluschi fossili (1).

---

(1) Questi Molluschi si trovano ora nella collezione del R. Museo Geologico di Torino, al quale ne ho fatto dono.

## LAMELLIBRANCHIATA (1).

ASIPHONIDA.

### Unio ?

L'unico Mollusco bivalve che siasi finora rinvenuto nelle alluvioni plioceniche del Piemonte, è questa forma trovata nella località di S. Paolo insieme col Mastodonte angustidente. Essa fu riferita dal Prof. E. Sismonda all'*Unio pictorum Lk.* provvisoriamente, ed è figurata nella Memoria sovraccennata (2); siccome di questo fossile si possiede finora un solo esemplare monco e piuttosto in cattivo stato, non possiamo tentare di aprirne le valve per osservarne la cardinatura, temendo di distruggere tutto il fossile, dobbiamo perciò aspettare che si trovi almeno un altro esemplare di ricambio. È però molto probabile che questa non sia l'*U. pictorum*, ma una specie nuova fossile, come in generale la fauna che l'accompagna, tanto più che la sua forma molto depressa ed altri caratteri esterni la avvicinerebbero piuttosto ad una *Microcondylaea (Leguminaia)* di cui esistono tuttora due specie in Piemonte.

Si trova in terreno sabbioso giallastro.

## GLOSSOPHORA.

GASTEROPODA.

### Vivipara Pollonerae Sacc.

(F. 1).

*Testa ventrosa subglobosa, longitudinaliter striata; striae minutae et uniformes; anfractus quinque vel sex, valde convexi, inde suturae profundae; anfractus ultimus, prope aperturam, dimidia longitudine brevior. Apertura angusta, valde*

---

(1) Ho seguito la classificazione adottata dal Prof. Karl A. Zittel nel suo recente *Handbuch der Palaeontologie.*

(2) E. Sism., *Osteografia di un Mastodonte angustidente.* V. *ante.*

*obliqua, ovalis, subangulosa superne. Umbilicus angustus; peristoma continuum, gracile, ad basim tantum revolutum; margo columellaris liberus. Alt.* 25 *millim. Lat.* 16 *millim.*

Di questa specie si posseggono finora due soli esemplari trovati a S. Paolo, e furono attribuiti dal Prof. E. Sismonda alla *Paludina lenta Brand.*, da cui però diversifica per moltissimi caratteri, come si può vedere nell'opera classica del Prof. Sandbergher (1); la forma a cui meglio si avvicina, è la *V. contecta Millet* ora vivente in Europa.

Dedico questa specie al gentile quanto valente malacologo Carlo Pollonera.

## **Cyclostoma fossanense** Sacc.

(F. 2 *a*, *b*).

*Testa parva, turgida, umbilicata; anfractus quinque, valde convexi, longitudinaliter et transversim costulati, excepto nucleo embrionali laevi; costulae longitudinales inaequales, maiores inter se valde distantes, minores, duo vel tres, maioribus interpositae; costulae transversae inaequales, maior et minor alternatae. Alt.* 10-12 *millim. Lat.* 8 *millim.*

Questa specie nella forma generale si avvicina al *C. elegans Müll.* vivente tuttora in Europa, ma se ne distingue per la mole minore e per l'essere meno slanciata, ma soprattutto per il diversissimo modo di costulatura.

È il fossile più comune nelle alluvioni plioceniche di Fossano, sia nelle marne argillose che in quelle sabbiose.

## **Pomatias** spec.

Nelle alluvioni plioceniche di Fossano trovai una forma di Mollusco riferibile a questo genere, senza che lo abbia potuto specificare a causa dei pochi esemplari guasti che posseggo. È di dimensioni piccole, ed ha molta somiglianza, specialmente alla base, col *P. septemspiralis Raz*, vivente nelle regioni circummediterranee, non in Piemonte, eccetto alcuni individui trovati presso Serravalle Scrivia dal Prof. A. Issel.

---

(1) D. Fridolin Sandberger, *Die Land-und Süsswasser-Conchylien der Vorwelt*, 1870-75.

## **Limnaeus plicatus** Sacc.

(F. 3 *a*, *b*).

*Testa maxima in parte laevis, ad suturam supernam minute et crebre longitudinaliter plicata; anfractus quinque, ultimus* $^2/_3$ *totius longitudinis subaequans. Alt.* 13 *millim. Lat.* 5 *millim.*

Questa specie è alquanto simile nella forma al *L. pereger Drap.*; che vive in tutta l'Europa. È rarissimo, e si trovò solo nel territorio di Fossano sinora.

## **Planorbis anceps** Sacc.

(F. 4 *a*, *b*).

*Testa parum depressa; anfractus quatuor vel quinque, submedio carinati; carina acuta, non producta, ad basim proximata. Lat.* 16-18 *millim.*

Differisce dal *P. Ungheri Reuss* per la mole minore, e per essere meno schiacciato. Non è raro nel territorio di Fossano; finora non trovato altrove. Appartiene al gruppo dei *Tropidiscus*. Siccome questa specie non è ancora ben conosciuta in tutte le sue parti, avendosi solo campioni incompleti, le diedi il nome specifico di *anceps*.

## **Planorbis** spec.

Ho pure ritrovato nelle alluvioni plioceniche di Fossano un'altra specie di *Planorbis*, che pare abbia la carena approssimata all'apice e non alla base come nella specie sopradescritta, ma possedendone un solo esemplare incompleto non posso peritarmi a specificarlo.

## **Glandina pseudoalgira** Sacc.

(F. 5).

*Distinguunt hanc speciem a* G. algira Beck *sequentes notae: Apertura longior et superne angustior, anfractus magis complanati. Alt.* 40 *millim. circiter. Lat.* 15 *millim.*

Inoltre da quanto si può giudicare dagli ultimi due anfratti, la spira si va svolgendo più lentamente che nella *G. algira*. Non è rara presso Fossano. Siccome la *G. algira* trovasi nella Dalmazia, nell'Italia meridionale, nella Sicilia, nella Grecia, nell'Algeria ecc., cioè nelle regioni circum-Mediterranee, ma non in Piemonte, così noi possiamo giustamente supporre che questa specie fossile, molto simile alla *G. algira*, richiedesse pel suo sviluppo un clima simile a quello che ora esiste nelle regioni circum-Mediterranee, e che quindi tale clima esistesse in Piemonte, non essendo ancora tutta la valle Padana sgombra dalle acque marine, quando si depositavano le marne che racchiudono i fossili in discorso.

## **Hyalina Faustinae** Sacc.

(F. 6 *a*, *b*, *c*).

*Testa minuta, nitida, subdepressa; anfractus quinque, regulariter involuti, superne vix convexi, laeves; ultimus ad basim satis convexus et minutissime radiatim striatus; apertura semilunata; umbilicus angustissimus. Alt.* 1 $^1/_2$ *millim. Lat.* 3 *millim.*

Questa specie è alquanto simile alla *H. diaphana Studer* per l'aspetto generale, ma ne differisce per molti caratteri, come: forame umbilicale ben visibile quantunque piccolissimo, dimensioni minori, forma generale più depressa, quantunque abbia la spira più conica, più fortemente striata, ed infine per avere solo 5 anfratti, mentre la *H. diaphana* ne ha 5 $^1/_2$ o 6.

Ha pure qualche somiglianza nell'aspetto generale colla *H. narbonensis Cless.*, anche nel modo di svolgersi della spira, ma se ne distingue pel suo forame strettissimo e per la bocca meno serrata. Appartiene al gruppo della *Vitrea*.

È piuttosto rara, finora ne rinvenni solo due esemplari, ma in perfetto stato di conservazione, nelle alluvioni plioceniche di Fossano.

Dedico questa specie a mia madre.

## **Hyalina** spec.

Rinvenni pure presso Fossano un'altra specie di *Hyalinia*, molto differente dalla specie sopradescritta, specialmente per le

dimensioni maggiori, avendo questa un diametro di oltre 14 millim. Si avvicina alquanto alla *H. glabra Studer* tuttora vivente, specialmente per l'ombelico strettissimo, ma però è molto più depressa della *H. glabra*.

Siccome finora non posseggo che campioni incompleti di questa specie, mi limito ad accennarla soltanto, senza tentare di determinarla.

## **Helix depressissima** Sacc.

(F. 7 *a, b, c*).

*Testa depressissima, acute carinata; carina ad aperturam evanescens; latissime et perspective umbilicata; anfractus* 5 $^1/_4$, *celeriter involuti, transversim minutissime striati; apertura depressa, lata, edentula. Peristoma simplex, non deflexum, interruptum. Alt.* 7 *millim. Lat.* 22 *millim.*

Non rara nelle alluvioni plioceniche di Fossano. Probabilmente vi esiste pure un'altra specie di *Helix* molto somigliante a questa, ma non carenata: in mancanza di individui completi debbo per ora astenermi dallo specificarla.

## **Helix Bottinii** Sacc.

(F. 8).

*Testa globoso-depressa, striata; anfractus quinque, regulariter involuti, subcarinati; ultimus prope aperturam valde convexus, non carinatus; apertura parum obliqua; peristoma interruptum, reflexum; umbilicus subtectus. Alt.* 27 *millim. Lat.* 40 *millim.*

Questa specie appartiene al gruppo della *H. vermicularia Bon.* (1), ma si distingue facilmente per la mancanza delle increspature e rugosità del guscio, che in essa è regolarmente e finamente striato; inoltre l'*H. vermicularia* ha dimensioni più piccole, bocca più obliqua e portata molto più al disotto dell'ultimo anfratto, che giunto in prossimità di essa si piega for-

(1) Michelotti, *Rivista di alcune specie fossili della famiglia dei Gasteropodi.* Annali delle Scienze del R. Lombardo-Veneto, 1840.

temente in basso. Nè si potrà confondere colla specie trovata dal Prof. Issel nelle caverne ossifere della Liguria e da lui attribuita all'*H. vermicularia Bon.* (1), giacchè la sua figura rappresenta una specie assai grande a labbro poco risvoltato infuori, senza traccia di carena e munita delle caratteristiche rugosità, mancanti nella *Helix* in discorso.

A maggior schiarimento delle mie osservazioni, credo utile dare la figura della *H. vermicularia Bon.* (F. 9 *a*, *b*), sia perchè non ancora pubblicata, sia come termine di confronto, notando però che questa specie non appartiene per nulla alla formazione geologica delle alluvioni plioceniche, ma bensì al pliocene superiore marino, essendosi trovata nella valle Andona, assieme a fossili marini.

L'*H. Bottinii* è una specie abbastanza comune nelle alluvioni plioceniche di Fossano. Tra i diversi campioni che ho potuto raccogliere, ebbi occasione di osservare alcune differenze specialmente nel peristoma, ma credo che si possano considerare come semplici varietà e non come differenze specifiche. Inoltre noi possiamo spesso osservare in queste *Helix*, come pure in generale nelle altre forme di questo orizzonte presso Fossano, grandi deformazioni per schiacciamento, sì che talora una stessa specie prende forme diversissime e molto curiose che potrebbero trarre in errore; ciò è dovuto alla fortissima compressione che esercitano i settanta e più metri di terreni sovrastanti a queste marne argillose fossilifere.

Dedico questa specie al Dott. E. Bottini che colla sua scienza mi salvò la vita.

### **Helix magnilabiata** Sacc.

(F. 10 *a*, *b*).

*Testa globosa, obtuse carinata, striato-vermiculata; anfractus quinque, ultimus rotundatus; apertura subovata; peristoma latum, revolutum, interruptum; umbilicus obtectus. Alt.* 23 *millim. Lat.* 35 *millim.*

Anche questa ha somiglianza colla *H. vermicularia Bon.*; ma ne differisce per le sue dimensioni maggiori, pel guscio molto

(1) Il signor Nevill negò l'identità di questa forma coll'*Helix vermicularia* Bon. e le diede il nome di *H. mentonica.*

meno increspato e più finamente striato, per l'apertura più larga e meno obliqua, ed infine per il labbro esterno molto più protratto in avanti al disopra dell'apertura, cosicchè di profilo il suo contorno resta molto più obliquo ed alquanto sinuoso. Somiglia pure alquanto all'*H. Bottinii Sacc.*, ma ne differisce in ciò che l'*H. Bottinii* è più grande, senza increspature sul guscio, con forma in generale più depressa, con dimensioni maggiori, ed inoltre ha il labbro columellare rigonfio (mentre nella *H. magnilabiata* il labbro è incavato) che non ricopre interamente l'ombelico lasciando aperta una piccola fessura.

È poi ancora meno rassomigliante all'*H. lactea Müll.* a cui fu riferita dal Prof. E. Sismonda.

Trovata finora soltanto a S. Paolo.

## **Helix** spec.

Rinvenni nelle alluvioni plioceniche di Fossano un'altra specie di *Helix* del gruppo della *H. nautiliformis Porro*, tuttora vivente in Piemonte e Lombardia; ma non è possibile specificarla, per il cattivo stato di conservazione in cui trovansi i campioni finora ritrovati; solo possiamo dire che essa appartiene al sottogenere *Anchistoma* ed alla sezione dei *Drepanostoma*.

## **Cionella** spec.

Sempre nella stessa località trovai un Mollusco riferibile al genere *Cionella*, del gruppo della *C. lubrica Müll.* vivente in tutta l'Europa; per le dimensioni si avvicina molto alla *C. exigua Menk.*, ma avendo solo campioni incompleti non posso darne la descrizione.

## **Caecilianella** spec.

L'unico esemplare di questo genere finora trovato presso Fossano, si frantumò mentre si tentava di liberarlo dalla marna che lo avvolgeva, quindi non possiamo dir nulla di preciso intorno ad esso; pare tuttavia che si avvicini alla *C. acicula Müll.*

**Clausilia** *(Triptychia)* **mastodonphila** E. Sismd.

(F. 11 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*).

*Testa sinistrorsa, subfusiformi, postice ventricosa, in longitudinem striata, striis confertis, rectis, interstitia subaequantibus; anfractus* 15, *planiusculis, subscalariformibus; sutura canaliculata; apertura angusta, ovato-pyriformi, fere ringenti; columella triplicata, plica postica oblique-sinuosa, ceterisve maiori; peristomate continuo, soluto, reflexiusculo, postice in canalem producto.*

È questa la descrizione data dal Prof. E. Sismonda, nella sua già citata Memoria, per la specie trovata a S. Paolo; si può aggiungere che la specie di S. Paolo ha le seguenti dimensioni: Alt. 35 millim. Lat. 10 millim. (F. *a*, C).

Quantunque già descritta dal Prof. E. Sismonda io ho creduto dovere qui accennare questa forma specialmente perchè l'ho ritrovata eziandio abbondantissima nelle alluvioni plioceniche di Fossano, dove raggiunge dimensioni anche maggiori (F. 11, *b*, *e*, *d*) di quelle che ha la specie di S. Paolo, ed inoltre perchè in tutti gli individui che ho esaminato non rinvenni mai il clausilio, per cui questa specie, anche per altri caratteri, si deve riferire al sottogenere *Triptychia*, istituito dal Sandberger nel 1870 (1). Differisce per molti rispetti sia dalla *Clausilia (Triptychia) Terveri Michaud*, sia dalla *Clausilia (Triptychia) grandis Klein*.

Questa bella specie rinvenuta a S. Paolo e comunissima a Fossano, serve molto bene ad indicarci l'equivalenza geologica di terreni situati in località abbastanza distanti.

Probabilmente nelle alluvioni plioceniche di Fossano esiste pure un'altra specie di *Clausilia*, di dimensioni più piccole molto di quelle della sopradescritta, ma dubitando che si tratti di una forma giovanile della *C. mastodonphila E. Sismond.*, debbo per ora tralasciare di specificarla.

---

(1) Questo sottogenere fu dal Bourguignat, nel 1877, appellato anche *Milne Edwarsia*.

## **Pupa Bellardii** Sacc.

(F. 12 *a*, *b*, *c*, *d*).

*Testa dolioliformis, spira ad apicem subobtusa; anfractus octo, longitudinaliter costulati: costulae tenues subuniformes, obliquae; anfractus ultimus in tertia parte, aperturae contigua, transversim unisulcatus; suturae axi testae vix obliquae. Apertura subtriangularis; labium dexterum sinuosum, submedio externe concavum, interne convexum subdentatum. Columella edentula, regio parietalis unidentata: dens compressus, longus: sinulus profundus. Alt.* 4 *mill. Lat.* 2 $^1/_2$ *millim.*

In questa specie al posto dell' ombelico vi è un solco profondo, attorno al quale si aggira l'ultimo anfratto ottusamente carenato nella sua porzione inferiore.

Si trova rarissima nelle alluvioni plioceniche di Fossano; l'ho dedicata al Prof. L. Bellardi, sapiente quanto paziente illustratore della fauna malacologica fossile del Piemonte, e mio amorevole maestro in questi studi paleontologici.

---

Sono queste le specie di Molluschi finora ritrovate nelle alluvioni plioceniche in Piemonte. Naturalmente questa lista è ben lungi dall'essere completa, giacchè per renderla tale per quanto è possibile, si dovranno fare ulteriori studi ovunque si può osservare questa formazione geologica. Da parte mia continuerò diligentemente le ricerche in proposito, ed in modo speciale nelle alluvioni plioceniche di Fossano che diedero già un tributo così abbondante su questo riguardo.

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

**Vivipara Pollonerae** Sacc. (F. 1).

**Cyclostoma fossanense** Sacc. (F. 2 *a*, *b*).

**Limnaeus plicatus** Sacc. (F. 3 *a*, *b*).

**Planorbis anceps** Sacc. (F. 4 *a*, *b*).

**Glandina pseudoalgira** Sacc. (F. 5).

**Hyalina Faustinae** Sacc. (F. 6 *a*, *b*, *c*).

**Helix depressissima** Sacc. (F. 7 *a*, *b*, *c*).

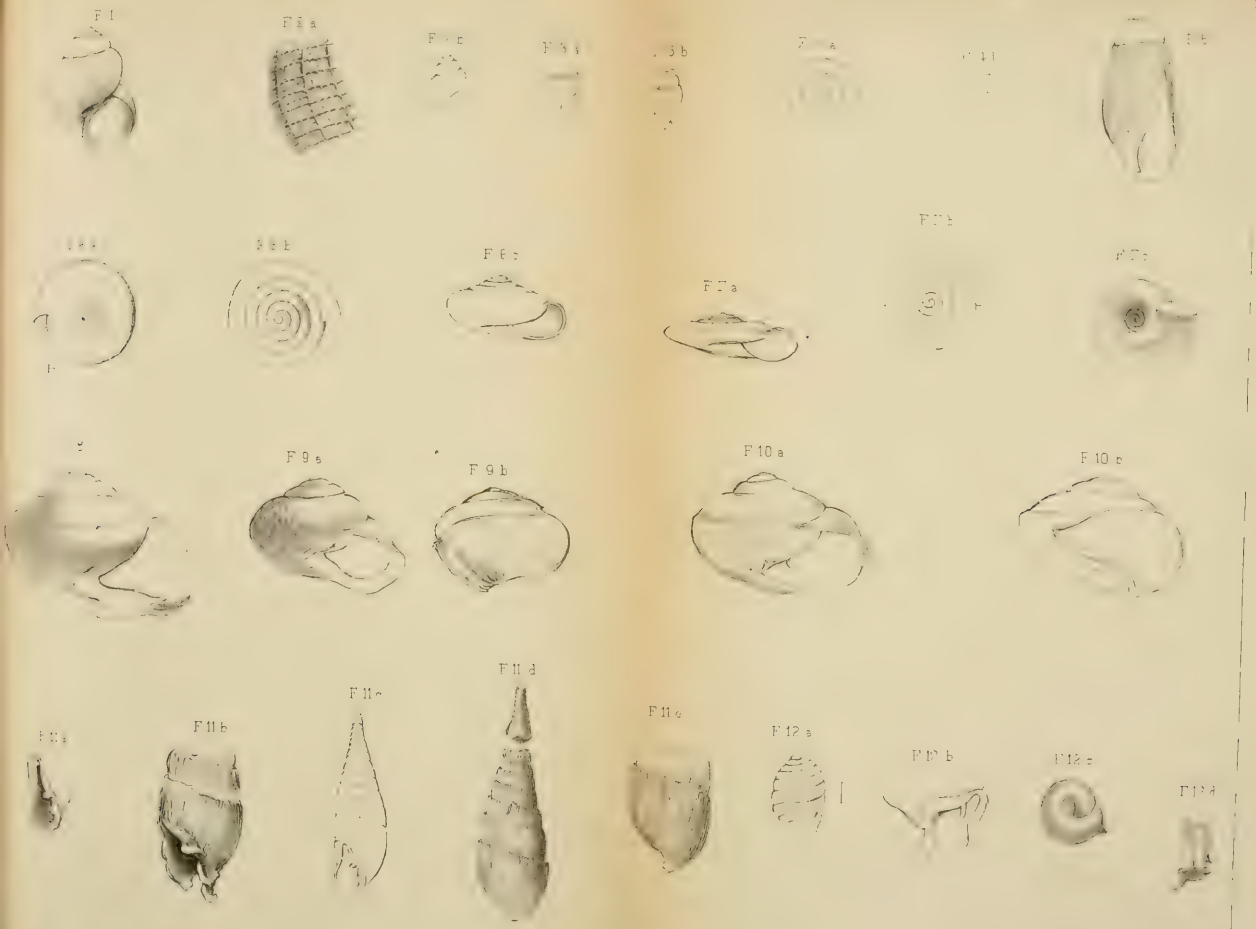
**Helix Bottinii** Sacc. (F. 8 *a*, *b*).

**Helix vermicularia** Bon. (F. 9 *a*, *b*).

**Helix magnilabiata** Sacc. (F. 10 *a*, *b*).

**Clausilia** (*Triptychia*) **mastodonphila** E. Sismd. (F 11 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*).

**Pupa Bellardii** Sacc. (F. 12 *a*, *b*, *c*, *d*).


F 1
F 9 a
F 9 b
F 10 a
F 10 b
F 11 b
F 11 d
F 11 e
F 12 a
F 12 c

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. Corrado Segre, Assistente alla Cattedra di Algebra complementare nella R. Università di Torino,

SULLE

# RIGATE RAZIONALI

## IN UNO SPAZIO LINEARE QUALUNQUE.

In alcune ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, i cui risultati esporrò prossimamente, mi fu necessario studiare le superficie rigate a 2 dimensioni d'ordine $n$ dello spazio ad $n+1$ dimensioni. Tali rigate sono sempre razionali e possono esser generate come luogo delle rette d'intersezione degli $S_n$ (spazi lineari ad $n$ dimensioni) corrispondenti di $n$ fasci proiettivi, e da tal punto di vista esse furono già studiate dal Veronese nel § 4 della 5ª parte di un suo importante lavoro (*). Però pel mio scopo occorreva risolvere quest'altra questione: quante specie di tali rigate vi siano dal punto di vista proiettivo, vale a dire quando è che due tali rigate si possono trasformare proiettivamente l'una nell'altra. Il Veronese dalla generazione accennata dedusse che tutte quelle rigate sono tra loro proiettivamente identiche (**) e perciò diede ad esse il nome di rigate *normali:* invece, prendendo un altro modo di generazione delle rigate stesse, mi riuscì facile lo scorgere che quella conclusione non era rigorosa, poichè al contrario (escludendo il gruppo dei coni) vi sono $\frac{n-1}{2}$ oppure $\frac{n}{2}$ gruppi di tali rigate (secondo che $n$ è impari o pari) in modo che due rigate si possono

(*) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Mathematische Annalen, Bd. XIX, p. 161-234.

(**) Loc. cit., p. 228: *Daher müssen alle eigentlichen* $R_1 - F_2^{n-1}$ *des* $R_n$ *projectivisch gleichberechtigt sein.*

trasformare proiettivamente l'una nell'altra solo quando appartengono allo stesso gruppo. Di questi vari gruppi di rigate poi trovai diverse proprietà, la cui esposizione costituisce l'oggetto di questa nota.

Le rigate razionali d'ordine $n$ degli spazi lineari di numero di dimensioni minore di $n+1$ si possono ottenere mediante proiezioni da quelle considerate appartenenti allo spazio ad $n+1$ dimensioni. Perciò anche in quegli spazi le rigate razionali formeranno vari gruppi, le cui proprietà si dedurranno da quelle dei gruppi di rigate di cui sono le proiezioni. In particolare si ottengono così delle proprietà delle rigate razionali dello spazio ordinario, rigate che vennero specialmente studiate dal Clebsch (*), il quale ne diede una distinzione in gruppi, coincidente affatto con quella che io qui ne trovo. Il Clebsch si era occupato specialmente della rappresentazione di quelle rigate su un piano: pensai che questa rappresentazione si potesse pure ottenere proiettando le rigate dello spazio ad $n+1$ dimensioni su un piano ed infatti, resa univoca con un semplice artifizio la proiezione di quelle rigate su un piano, ottenni con quei mezzi semplicissimi, che costituiscono appunto il metodo del proiettare, tutte le rappresentazioni piane date dal Clebsch insieme colle loro varie proprietà. Il confronto tra il metodo analitico tenuto dal Clebsch per giungere ai suoi risultati e quello geometrico semplicissimo qui usato è assai interessante e potrà servire a provare sempre più al lettore l'utilità dell'uso della geometria degli spazi a quante si vogliano dimensioni per lo studio dello spazio ordinario.

Per non allungare troppo questa nota ho omesso di approfondire ulteriormente la teoria delle rigate razionali ed altre teorie affini a questa; le mie ricerche su questo argômento potranno formare oggetto di altri lavori.

## I.

## *Proprietà generali delle $F_2^n$ rigate in un $S_{n+1}$.*

1. Consideriamo in uno spazio lineare ad $n+1$ dimensioni una superficie rigata a 2 dimensioni d'ordine $n$, $F_2^n$, la quale supporremo non sia contenuta in uno spazio lineare di meno che $n+1$ di-

(*) *Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte* p = o. Math. Ann. V, p. 1-26.

mensioni e che inoltre non si scinda in superficie d'ordine inferiore. Da queste ipotesi segue che un $S_n$ qualunque taglierà in generale $F_2^n$ secondo una curva d'ordine $n$ non degenere e non contenuta in ispazi lineari a numero di dimensioni minore di $n$, cioè secondo una curva razionale *normale* per un $S_n$ (*). Quindi la nostra rigata, avendo le sue generatrici corrispondenti univocamente ai punti in cui tagliano una tal curva, sarà anch'essa razionale.

Nel caso in cui tutte le generatrici passassero per un punto, la rigata sarebbe un *cono* razionale d'ordine $n$: noi escluderemo d'or innanzi questo caso, poichè le proprietà di questi coni si trovano immediatamente considerandoli come provenienti dal proiettare una curva normale d'ordine $n$ dello spazio ad $n$ dimensioni da un punto posto fuori di questo.

**2.** Ogni $S_n$ taglia la $F_2^n$ in una curva normale d'ordine $n$, oppure in una curva d'ordine $k < n$ incontrata da tutte le generatrici ed in $n-k$ generatrici; ma non può la curva d'intersezione scindersi in due o più curve propriamente dette, altrimenti la rigata si scinderebbe in altre rigate, le cui generatrici taglierebbero rispettivamente quelle varie curve. Possiamo aggiungere che ogni curva di ordine $m \leqq n$ contenuta nella superficie è una curva normale dello spazio ad $m$ dimensioni, vale a dire, non sta in uno spazio di minor numero $\mu$ di dimensioni: infatti se stesse in un tale spazio, siccome tutte le generatrici dovrebbero tagliare quella curva si potrebbe per lo spazio stesso e per $n-\mu$ punti della superficie posti fuori di esso e su generatrici diverse far passare un $S_n$, il quale conterrebbe le $n-\mu$ generatrici passanti per quei punti ed inoltre la curva d'ordine $m$ e quindi taglierebbe la superficie in una curva composta d'ordine $n+m-\mu > n$, il che non può essere se quell' $S_n$ non contiene tutta la superficie. — La stessa dimostrazione prova che anche quando la curva d'ordine $m$ si scinde in più generatrici ed una curva semplice *direttrice*, essa non può appartenere ad uno spazio di meno che $m$ dimensioni.

Come applicazione di quest'ultima proposizione abbiamo che ogni curva semplice d'ordine $\leqq n$ contenuta nella superficie, taglia ciascuna generatrice in un punto solo.

---

(*) V. Clifford, *On the classification of Loci* (Philosoph. Trans., 1873, p. 663-681, od anche Mathematical Papers, p. 305-329), e Veronese, Loc. cit., n. 35 e seg.

**3.** Imaginiamo condotto un $S_n$ per un certo numero di generatrici della $F_2^n$: esso taglierà ancora questa superficie in una curva, la quale potrà decomporsi in altre generatrici ed una curva d'ordine inferiore, ma certamente conterrà sempre una curva semplice *direttrice*, vale a dire incontrata da tutte le generatrici della rigata, perocchè ciascuna generatrice incontra quell' $S_n$. Siccome per un $S_n$ la condizione di passare per una data generatrice equivale alle due condizioni di passare per due punti di questa, così possiamo assoggettare un $S_n$ alla condizione di passare per $\frac{n+1}{2}$ generatrici, se $n$ è impari, e per $\frac{n}{2}$ generatrici se $n$ è pari. Allora l'intersezione di quell' $S_n$ colla nostra rigata conterrà oltre ad un certo numero di generatrici una curva semplice normale, il cui ordine sarà al più uguale ad $\frac{n-1}{2}$, ovvero ad $\frac{n}{2}$. Concludiamo dunque che: *Ogni $F_2^n$ rigata dello spazio lineare ad $n+1$ dimensioni contiene almeno una curva normale, il cui ordine non supera $\frac{n-1}{2}$ ovvero $\frac{n}{2}$ secondochè $n$ è dispari o pari.*

## II.

## *Distinzione delle rigate considerate in gruppi.*

**4.** Al risultato ora ottenuto aggiungiamo che la $F_2^n$ non può contenere due curve semplici direttrici, i cui ordini $m'$, $m''$ siano tali che $m'+m''<n$, poichè altrimenti ogni generatrice dovendo incontrarle entrambe, la rigata sarebbe contenuta in un $S_{m'+m''+1}$ condotto per gli $S_{m'}$, $S_{m''}$ contenenti quelle curve. Di qui segue che se una $F_2^n$ contiene una direttrice il cui ordine $m$ sia $\leqq \frac{n-1}{2}$ se $n$ è impari, ovvero $< \frac{n}{2}$ se $n$ è pari, essa non contiene altra direttrice semplice il cui ordine sia inferiore ad $n-m$ e quindi in particolare nessun' altra direttrice il cui ordine sia pure $\leqq \frac{n-1}{2}$, ovvero $< \frac{n}{2}$. Se poi, per $n$ pari, la $F_2^n$ contiene una direttrice il cui or-

dine sia $=\frac{n}{2}$, essa non conterrà alcuna curva direttrice d'ordine inferiore, ma potrà però contenere (e contiene effettivamente, come vedremo) altre curve dello stesso ordine. Queste osservazioni ci mostrano dunque che: *in ogni spazio ad $n+1$ dimensioni, le rigate di ordine $n$ sono di diverse specie, ben distinte tra loro, a seconda dell'ordine della direttrice minima* (vale a dire d'ordine minimo) *che esse contengono, quest'ordine potendo variare da* 1 *ad* $\frac{n-1}{2}$ *ovvero ad* $\frac{n}{2}$.

Chiameremo una rigata dell' $m$ esimo *gruppo* quando la sua direttrice minima è dell'ordine $m$. Quindi le rigate del 1° gruppo hanno per direttrice minima una retta, quelle del 2° gruppo una conica, quelle del 3° gruppo una cubica e così via. Nello spazio a numero pari di dimensioni, cioè per $n$ impari, vi sono $\frac{n-1}{2}$ gruppi: l'ultimo ha per direttrice minima una curva normale d'ordine $\frac{n-1}{2}$. Nello spazio a numero impari di dimensioni vi sono $\frac{n}{2}$ gruppi: il gruppo $\left(\frac{n}{2}\right)$esimo ha per direttrici minime delle curve d'ordine $\frac{n}{2}$.

A questi gruppi di rigate si potrebbe aggiungere il gruppo dei coni, che noi abbiamo escluso dai nostri ragionamenti e pel quale l'ordine della curva minima è 0, poichè tutte le generatrici passano per un punto.

5. Consideriamo una $F_2^n$ del gruppo $m^{esimo}$ e diciamone $\gamma^m$ la direttrice minima, d'ordine $m$. Se si conduce un $S_n$ per un numero di sue generatrici superiore ad $m$, esso taglierà $\gamma^m$ in più di $m$ punti e quindi conterrà quella curva e non potrà perciò tagliare la superficie che in altre generatrici: ciò s'accorda col fatto già dimostrato che la $F_2^n$ non può contenere curve semplici (direttrici) d'ordine inferiore ad $n-m$ all'infuori di $\gamma^m$. Ma se invece si conduce un $S_n$ per sole $m$ generatrici, allora la parte rimanente della sua intersezione colla rigata non si decomporrà più in generale: si può assoggettare quell' $S_n$ a passare oltre che per quelle generatrici per $(n-2m+1)$ punti della rigata posti su altrettante nuove generatrici e fuori della $\gamma^m$, ed allora si sarà certi che l'intersezione non si decomporrà più ulterior-

mente, perchè se si decomponesse dovrebbe contenere ancora $\gamma^m$ e le $m + (n - 2m + 1)$ generatrici, cioè un insieme d'ordine $n+1$, il che non può essere. Dunque l'intersezione dell' $S_n$ così determinato colla rigata comprende oltre alle $m$ generatrici una curva semplice d'ordine $n-m$ passante per gli $(n-2m+1)$ punti scelti ad arbitrio sulla rigata. D'altronde tenendo fisse quelle $m$ generatrici e facendo variare quegli $(n-2m+1)$ punti, vale a dire quell' $S_n$ passante per le $m$ generatrici stesse, si otterranno come residui delle intersezioni della rigata con tali $S_n$ *tutte* le $C^{n-m}$ (curve normali d'ordine $n-m$) contenute nella superficie; perocchè ogni $C^{n-m}$ di questa tagliando ciascuna delle $m$ generatrici considerate starà sempre in un $S_n$ con esse. Quindi la proposizione dimostrata che la $F_2{}^n$ rigata del gruppo $m^{esimo}$ non contiene curve d'ordine inferiore ad $n-m$ viene completata aggiungendo che: *ogni rigata del gruppo $m^{esimo}$ contiene però $\infty^{n-2m+1}$ curve d'ordine $n-m$, una qualunque delle quali è individuata dalla condizione di passare per $(n-2m+1)$ punti arbitrari della superficie.* Due qualunque di tali curve d'ordine $n-m$ si tagliano in $n-2m$ punti, poichè con lucendo per l'una di esse un $S_n$, questo taglierà ancora la rigata in $m$ generatrici e taglierà l'altra curva in $n-m$ punti, dei quali $m$ staranno rispettivamente su queste e gli altri $n-2m$ in conseguenza sulla prima curva (*).

In particolare per $n$ pari ed $m = \frac{n}{2}$ noi vediamo che su una rigata d'ordine pari e del gruppo $\left(\frac{n}{2}\right)$ esimo vi sono, non una sola, ma $\infty^1$ direttrici (minime) d'ordine $\frac{n}{2}$, come già avevamo asserito: per ogni punto della superficie ne passa una sola, e due qualunque di tali curve non hanno alcun punto comune. Esse si possono tutte ottenere come intersezione della rigata con un fascio di $S_n$, il cui sostegno è un $S_{n-1}$ condotto per $\frac{n}{2}$ generatrici arbitrarie.

(*) Cogli stessi ragionamenti si dimostrano le seguenti proposizioni: *Su ogni rigata d'ordine $n$ del gruppo $m$esimo esistono, per $0 \leqq k \leqq m$, $\infty^{n-2k+1}$ direttrici d'ordine $n-k$ in modo che per $(n-2k+1)$ punti arbitrari della superficie ne passa una determinata: tutte queste curve si possono ottenere come residuo dell' intersezione della rigata cogli $S_n$ passanti per $k$ sue generatrici fissate ad arbitrio. — Due direttrici degli ordini $n-k'$, $n-k''$ della superficie si tagliano in $n-k'-k''$ punti.* — Queste proposizioni possono servire di fondamento per una geometria sulla superficie.

## III.

### *Costruzione delle rigate e loro equazioni canoniche.*

**6.** Ora siamo in grado di provare l'esistenza effettiva delle superficie dei vari gruppi, ossia di costruirle. Considerando in fatti la $F_2^n$ del gruppo $m$esimo, si vede che l'$S_{n-m}$ contenente una qualunque delle sue $C^{n-m}$ non può avere una posizione particolare rispetto all'$S_m$ contenente la direttrice minima $\gamma^m$, vale a dire non può avere punti comuni con esso, perocchè altrimenti per quel $S_{n-m}$ e questo $S_m$ si potrebbe far passare uno spazio ad un numero di dimensioni $< n+1$ il quale conterrebbe necessariamente la superficie, il che non è, per ipotesi. Inoltre osserviamo che due curve semplici qualunque d'ordine $\leqq n$ della superficie, ed in particolare la direttrice minima d'ordine $m$ e ciascuna delle direttrici d'ordine $n-m$, sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici, perocchè per ciascun punto di ogni curva passa sempre, come vedremo tra poco (v. alla fine del n. 9) una sola generatrice, ed ogni generatrice taglia in un punto solo ciascuna curva (come osservammo alla fine del n° 2). Inversamente abbiansi su due spazi lineari ad $m$ ed $n-m$ dimensioni indipendenti tra loro, cioè non aventi punti comuni, due curve normali $C^m$, $C^{n-m}$ punteggiate proiettivamente: le congiungenti dei punti corrispondenti avranno per luogo, com'è facile vedere, una rigata d'ordine $n$ (*). E se $m \leqq n-m$, sarà la $C^m$ la (od una) curva minima di quella rigata, laonde questa sarà una $F_2^n$ rigata, non contenuta in ispazi di meno che $n+1$ dimensioni, e del gruppo $m$esimo.

---

(*) In fatti nello spazio ad $n+1$ dimensioni che congiunge quell'$S_m$ e quell'$S_{n-m}$ per avere i punti d'intersezione di un suo $S_{n-1}$ con quella rigata si può procedere come segue: ad un punto $P$ della $C^m$ corrisponde un punto della $C^{n-m}$ il quale è congiunto all'$S_{n-1}$ da un $S_n$ tagliante la $C^m$ in $m$ punti $P'$; e ciascuno di questi punti $P'$ è congiunto all'$S_{n-1}$ da un $S_n$ tagliante la $C^{n-m}$ in $n-m$ punti, a cui corrispondono altrettanti punti $P$ della $C^m$; sicchè tra i punti $P$, $P'$ di questa vi è una corrispondenza $(m, n-m)$ i cui $m+(n-m)=n$ punti uniti sono quelli pei quali partono generatrici della rigata secanti l'$S_{n-1}$, sicchè $n$ saranno quelle generatrici, ossia quella rigata è realmente d'ordine $n$.

In questo modo noi vediamo come si possano costruire le rigate d'ordine $n$ dei vari gruppi dello spazio ad $n+1$ dimensioni. Inoltre se si tien conto del fatto che le $C^m$ (e le $C^{n-m}$) normali si possono tutte trasformare proiettivamente tra loro, risulta quasi immediatamente da quella costruzione che *tutte le rigate di uno stesso gruppo sono proiettivamente identiche tra loro*, vale a dire che *date in due spazi ad $n+1$ dimensioni due rigate d'ordine $n$ appartenenti allo stesso gruppo, si può* (in infiniti modi) *determinare un'omografia tra quegli spazi nella quale quelle rigate si corrispondano.*

7. Possiamo anche trovare una rappresentazione *canonica* e caratteristica di ciascun gruppo di superficie mediante equazioni. Siano $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n+1}$ le coordinate di un punto nello spazio ad $n+1$ dimensioni considerato; potremo evidentemente supporre che la direttrice minima $\gamma^m$ di una superficie del gruppo $m$ esimo sia rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \lambda, \quad x_2 = \lambda^2, \quad \ldots, \quad x_m = \lambda^m,$$
$$x_{m+1} = 0, \quad x_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = 0,$$

e che una $C^{n-m}$ sia rappresentata da:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad \ldots, \quad x_m = 0,$$
$$x_{m+1} = 1, \quad x_{m+2} = \lambda, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = \lambda^{n-m};$$

inoltre possiamo supporre che la corrispondenza proiettiva tra i punti delle due curve sia espressa dall'avere il parametro $\lambda$ lo stesso valore per due punti corrispondenti di queste curve. Allora le coordinate di un punto qualunque della rigata, cioè di un punto posto su una congiungente di due punti corrispondenti saranno:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \lambda, \quad x_2 = \lambda^2, \quad \ldots, \quad x_m = \lambda^m,$$
$$x_{m+1} = \mu, \quad x_{m+2} = \lambda\mu, \quad x_{m+3} = \lambda^2\mu, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = \lambda^{n-m}\mu.$$

Tenendo fisso $\lambda$ in queste formule e facendo variare $\mu$ si hanno tutti i punti di una generatrice, e variando anche $\lambda$ si hanno tutti i punti della superficie. Dalle formule stesse poi si traggono

le $n-1$ equazioni della superficie eliminando $\lambda$ e $\mu$: queste equazioni si possono scrivere come segue:

$$\frac{x_0}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{m-1}}{x_m}=\frac{x_{m+1}}{x_{m+2}}=\frac{x_{m+2}}{x_{m+3}}=\ldots=\frac{x_n}{x_{n+1}},$$

od anche:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdot & x_{m-2} & x_{m-1} & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdot & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & x_{m-1} & x_m & x_{m+2} & x_{m+3} & \cdot & x_{n+1} \end{vmatrix}=0.$$

Questo sistema di equazioni si può riguardare come caratteristico per le superficie rigate $F_2^n$ del gruppo $m$ esimo; esso ci mostra immediatamente ciò che avevamo già concluso dalla generazione geometrica, cioè che tutte queste superficie sono proiettivamente identiche fra loro.

## IV.

## *Proprietà diverse.*

8. Una $C^n$ la quale sia secata da un $S_r$ $(r<n)$ in più di $r+1$ punti o appartiene ad uno spazio a meno di $n$ dimensioni, oppure si scinde in curve d'ordine inferiore; poichè per quell' $S_r$ e per altri $n-r-1$ punti della $C^n$ posti fuori di esso si può in tal caso far passare un $S_{n-1}$, il quale taglia questa in più di $(r+1)+(n-r-1)=n$ punti e quindi la contiene o totalmente od in parte (*). Se ne deduce facilmente che se un $S_r$ $(r<n)$ seca una rigata $F_2^n$ dello spazio ad $n+1$ dimensioni in più di $r+1$ punti, esso la taglierà in una curva, perocchè un $S_n$ passante per esso taglierà la superficie in una $C^n$ avente comuni col $S_r$ più di $r+1$ punti.

Consideriamo l'intersezione di un $S_{n-1}$ colla rigata $F_2^n$ del gruppo $m$ esimo. In generale quest'intersezione si compone di $n$ punti. Ma possiamo anche far passare l' $S_{n-1}$ per $k$ generatrici, se $2k \leqq n$. Allora a seconda che $k$ supera o no il numero $m$, ordine della direttrice minima, si avranno due casi ben distinti. Se $k>m$, allora l' $S_{n-1}$ contiene più di $m$ punti della direttrice minima $\gamma^m$

(*) V. Veronese, Loc. cit., n. 49.

(cioè i punti di questa posti sulle $k$ generatrici considerate) e quindi contiene questa stessa curva e per conseguenza non seca più la rigata in punti isolati, ma potrà secarla in altre generatrici. Se invece $k \leqq m$, allora l' $S_{n-1}$ non conterrà in generale $\gamma^m$: ma un $S_n$ passante per esso conterrà oltre alle $k$ generatrici considerate una curva d'ordine $n-k$ della rigata e questa curva taglierà quell' $S_{n-1}$ in $n-k$ punti di cui $k$ posti su quelle stesse generatrici ed $n-2k$ fuori di esse. Dunque per $k \leqq m$ possiamo dire che ogni $S_{n-1}$ contenente $k$ generatrici della rigata la taglia ancora in $n-2k$ punti.

**9**. Di qui si può anche dedurre una proposizione più generale. Posto $r \leqq n-1$ si può sempre per $k$ generatrici ed $r-2k+1$ punti della rigata far passare un $S_r$: orbene se $k \leqq m$ non esiste un $S_r$ il quale contenga oltre a $k$ generatrici della rigata più di $r-2k+1$ punti di essa posti fuori di queste (a meno che esso contenga inoltre una curva passante per questi punti). In fatti se esistesse un tale $S_r$ si potrebbe far passare per esso e per altri $n-r-1$ punti della rigata un $S_{n-1}$ il quale verrebbe così a contenere, oltre alle $k$ generatrici, più di $(r-2k+1)+(n-r-1) = n-2k$ punti, il che vedemmo non poter accadere. — Se poi fosse $k > m$ si vedrebbe come per gli $S_{n-1}$ che un $S_r$ passante per $k$ generatrici conterrebbe necessariamente $\gamma^m$ e quindi non potrebbe più tagliare la rigata che in altre generatrici. Si può assoggettare un $S_r$ passante per $\gamma^m$ a contenere altri $r-m$ punti della rigata e quindi a tagliarla ancora nelle $r-m$ generatrici passanti per questi punti. Ed $r-m$ è anche il numero massimo delle generatrici contenute in un $S_r$ passante per $\gamma^m$, poichè un $S_r$ non può (n° 1) tagliare la rigata in una curva (semplice o composta) d'ordine superiore ad $r$.

Dunque indicando ancora con $r$ il numero delle dimensioni di uno spazio lineare contenente $k$ generatrici, noi vediamo che per $k > m$ si ha $r \geqq k+m$, sicchè $k$ generatrici in tal caso stanno in un $S_{k+m}$. Ora $k$ rette stanno sempre in un $S_{2k-1}$; quindi noi vediamo che, se $k > m+1$, $k$ generatrici qualunque della rigata sono legate tra loro giacendo in uno stesso $S_{k+m}$; ma per $k = m+1$ (e per ogni valor di $k$ minore di questo) esse sono indipendenti tra di loro.

In particolare: 2 generatrici qualunque non stanno mai in un piano e quindi non passano mai per uno stesso punto (proposi-

zione di cui già dovemmo far uso al n° 6); 3 generatrici stanno in un $S_4$ per le rigate del 1° gruppo (cioè per $m=1$) ma sono tra loro indipendenti per le rigate degli altri gruppi; 4 generatrici stanno in un $S_5$ per le rigate del 1° gruppo, in un $S_6$ per quelle del 2° gruppo, e sono indipendenti tra loro per quelle degli altri gruppi; e così via.

## V.

## *Rigate razionali in ispazi qualunque e loro diverse rappresentazioni piane.*

**10.** Ogni $F_2^n$ rigata dello spazio ad $n+1$ dimensioni si può proiettare univocamente da un punto su un $S_n$, da un $S_1$ su un $S_{n-1}$, in generale da un $S_r$ su un $S_{n-r}$ (essendo $r<n-2$). Se questo $S_r$ di proiezione non ha posizione particolare rispetto alla $F_2^n$ si ottiene per proiezione una nuova rigata razionale a 2 dimensioni d'ordine $n$, ma appartenente ad un $S_{n-r}$, ed è chiaro che viceversa ogni tal rigata dell' $S_{n-r}$ si può considerare come proiezione di una $F_2^n$ rigata dell' $S_{n+1}$. Tutte queste rigate degli $S_{n-r}$ formano così vari gruppi, come quelle dello spazio ad $n+1$ dimensioni, a seconda dell'ordine della direttrice *semplice* minima che esse posseggono, e le loro proprietà si possono ottenere appunto mediante queste proiezioni dalle proprietà viste di quelle rigate di cui sono le proiezioni. Ad esempio dei teoremi dimostrati al n° 5 abbiamo che su ogni rigata razionale d'ordine $n$ in uno spazio qualunque, la quale abbia per direttrice semplice minima una curva d'ordine $m$, si può per $k \leqq m$ far passare per $n-2k+1$ punti arbitrari della superficie una determinata curva razionale d'ordine $n-k$; se $k'$ e $k''$ non superano $m$, due curve razionali degli ordini $n-k'$, $n-k''$ della superficie si tagliano in $n-k'-k''$ punti.

In particolare se le $F_2^n$ rigate dello spazio ad $n+1$ dimensioni si proiettano da un $S_{n-3}$ su un $S_3$, cioè sullo spazio ordinario, si avranno le rigate razionali ordinarie, di cui con questa proiezione si potranno studiare tutte le proprietà. Così una gran parte delle proposizioni viste finora per quelle $F_2^n$ si applicheranno immediatamente alle rigate razionali ordinarie (*).

(*) La distinzione che così si ottiene delle rigate razionali dello spazio

**11**. Oltre alle proiezioni così considerate delle $F_2^n$, le quali sono tutte univoche, possiamo considerare le proiezioni delle $F_2^n$ da un $S_{n-2}$ su un $S_2$, cioè su un piano: una tale proiezione in generale non è più univoca poichè ogni $S_{n-1}$ proiettante taglia la $F_2^n$ in $n$ punti e quel piano invece in un punto solo. Tuttavia si può rendere la proiezione generalmente univoca facendo passare l'$S_{n-2}$ di proiezione per un numero conveniente di punti e di generatrici della $F_2^n$, e noi otterremo in questo modo la rappresentazione univoca piana non solo della $F_2^n$, ma anche delle sue proiezioni dianzi considerate, vale a dire di tutte le rigate razionali d'ordine $n$ dei vari spazi e particolarmente di quelle dello spazio ordinario.

Ricordando (n° 8) che un $S_{n-1}$ contiene $k$ generatrici ed $n-2k$ punti di $F_2^n$, se $k$ non supera l'ordine $m$ della direttrice minima, cioè se $0 \leqq k \leqq m$, noi vediamo che il modo più generale per rendere univoca la proiezione su un piano consiste nel prendere l'$S_{n-2}$ di proiezione in modo che passi per $k$ generatrici $g_r$ ed $n-2k-1$ punti $P_i$ della superficie, il che si può sempre fare, scegliendo anzi queste generatrici e questi punti completamente ad arbitrio. Allora ogni $S_{n-1}$ passante per l'$S_{n-2}$ così fissato conterrà in generale ancora 1 punto della superficie, vale a dire questa verrà proiettata univocamente.

**12**. Un $S_n$ proiettante, cioè passante per l'$S_{n-2}$ di proiezione, taglierà la $F_2^n$ nelle $k$ generatrici $g_r$ fisse di quel $S_{n-2}$ e quindi

---

ordinario in vari gruppi a seconda dell'ordine della direttrice minima è dovuta al Clebsch (memoria citata). Questi fa poi ancora un'altra distinzione la quale corrisponde a questa per dualità: i vari sottogruppi che così si vengono ad avere entro ciascun gruppo si potranno ottenere col nostro metodo dando all'$S^{n-3}$ di proiezione le varie posizioni notevoli che esso può avere rispetto alla $F_2^n$. Osserviamo ancora che questa posizione può esser tale che una direttrice della $F_2^n$ venga proiettata secondo una retta (basta perciò che quella curva stia in un'$S_{n-1}$ passante per quell'$S_{n-3}$), la quale verrà così ad essere direttrice della rigata proiezione, ma direttrice *multipla*, sicchè non bisognerà considerarla come la direttrice minima (*semplice*). Questo esempio, il quale spiega la causa della restrizione posta nel testo coll'aggettivo *semplice* per la direttrice minima, può anche servire di illustrazione all'osservazione fatta dal Clebsch (loc. cit., p. 9) che una direttrice semplice di un certo ordine può degenerare in una direttrice multipla d'ordine inferiore, senza che perciò si debba porre la rigata in un gruppo d'ordine inferiore.

ancora in una curva normale d'ordine $n-k$ passante pegli $n-2k-1$ punti $P_i$; tali curve normali della $F_2^n$ corrispondono dunque alle rette del piano. Un $S_n$ qualunque taglia la $F_2^n$ in una $C^n$ incontrata in $n-k$ punti da ciascuna di quelle curve. Dunque: *La rappresentazione piana che così si ottiene delle rigate razionali d'ordine n dei vari spazi e in particolare dello spazio ordinario è dell'ordine $n-k$ e quindi se $m$ è l'ordine della direttrice semplice minima di una tal rigata, la rappresentazione dell'ordine più basso che così se ne ottenga è dell'ordine $n-m$.*

Ricordando le proprietà viste (V. la nota al n° 5) per $k \leqq m$ delle $C^{n-k}$ contenute nella $F_2^n$, noi vediamo che la rappresentazione piana considerata si può intendere ottenuta in quest'altro modo: per $n-2k-1$ punti fissi $P_i$ della rigata passano $\infty^2$ $C^{n-k}$ sì che una qualunque è individuata dandone altri due punti e due qualunque di tali curve si tagliano in un punto. Facendo dunque corrispondere univocamente quelle $\infty^2$ curve alle rette di un piano (il che si può fare scegliendo ad arbitrio le 4 curve corrispondenti a 4 rette date del piano, con che la corrispondenza viene determinata) si faranno anche corrispondere univocamente i punti della superficie e del piano.

**13.** Vediamo come si rappresentano sul piano le generatrici della $F_2^n$ (e quindi delle sue diverse proiezioni). La $C^{n-k}$ passante pegli $n-2k-1$ punti fissi $P_i$ e per 2 punti posti su una stessa generatrice dovrà tagliare questa in quei 2 punti e quindi (n° 2) si scinderà nella generatrice stessa e nella $C^{n-k-1}$ passante per gli $n-2k-1$ punti $P_i$. Come vedemmo (n° 5) se questi punti si sono presi nel modo più generale, esiste una $C^{n-k-1}$ passante per essi e la quale non si scinde (purchè però sia $k$ diverso da $m$). Tale curva sta in un $S_{n-k-1}$ avente comuni coll'$S_{n-2}$ di proiezione quegli $n-2k-1$ punti $P_i$ e inoltre altri $k$ punti delle $k$ generatrici $g_r$ e quindi $n-k-1$ punti indipendenti tra loro; sicchè quei due spazi staranno entrambi in un $S_{n-1}$, vale a dire si potrà condurre pell' $S_{n-2}$ un $S_{n-1}$ (proiettante) il quale conterrà la $C^{n-k-1}$. E come tutte le generatrici della $F_2^n$ secano questa curva, così tutti gli $S_n$ che le proiettano passeranno per l' $S_{n-1}$, cioè formeranno un fascio. Dunque: *Le generatrici delle rigate considerate saranno rappresentate sul piano dalle rette di un fascio il cui centro $\zeta$ corrisponde a tutti i punti di una*

*curva razionale d'ordine* $n-k-1$ *di quelle rigate.* Questa curva insieme colle varie generatrici forma il sistema delle curve razionali d'ordine $n-k$ che corrispondono alle rette del fascio $\zeta$.

14. Diremo per brevità *sezioni piane* di una superficie in uno spazio lineare ad un numero qualunque $d$ di dimensioni quelle fatte in esse con degli spazi lineari a $d-1$ dimensioni contenuti in questo: allora nel proiettare la $F_2^n$ da un $S_r$ su un $S_{n-r}$ si ottiene in questo una nuova rigata, le cui sezioni piane sono le proiezioni di un sistema lineare ad $n-r$ dimensioni di sezioni piane della $F_2^n$. Osservando che ogni sezione piana della $F_2^n$ incontra ciascuna generatrice in un punto solo e taglia la $C^{n-k-1}$ considerata in $n-k-1$ punti, pei quali passano altrettante generatrici (le quali non secano altrove la sezione stessa) avremo: *Le curve d'ordine* $n-k$ *rappresentanti nel piano le sezioni piane delle rigate considerate hanno tutte un punto* $(n-k-1)$ *uplo in* $\zeta$ *(in generale con* $n-k-1$ *tangenti distinte mobili). Se la rigata d'ordine* $n$ *che si considera è nello spazio ad* $n-r$ *dimensioni, quelle curve del piano le quali corrispondono alle sue sezioni piane sono inoltre soggette alla condizione di formare un sistema lineare ad* $n-r$ *dimensioni.*

15. Oltre al punto $\zeta$, che così si vede essere un punto fondamentale $(n-k-1)$ uplo nella rappresentazione piana considerata, vi sono in generale anche dei punti fondamentali semplici. Notiamo in fatti che per gli $n-2k-1$ punti fissi $P_i$ della $F_2^n$ posti sull' $S_{n-2}$ di proiezione passano altrettante generatrici, le quali saranno evidentemente proiettate da quell' $S_{n-2}$ mediante degli $S_{n-1}$, cioè in altrettanti punti $p_i$ del piano, in guisa che a tutti i punti di una tal generatrice corrisponde nel piano uno stesso punto $p_i$, eccetto che al punto $P_i$ della generatrice stessa al quale corrisponde sul piano un punto indeterminato della retta che è proiezione dell'$S_2$ tangente nel punto stesso $P_i$ alla $F_2^n$: e siccome questo punto sta sulla $C^{n-k-1}$ a cui corrisponde $\zeta$, così gli corrisponderanno tutti i punti della retta $\zeta p_i$. Ora le sezioni piane della $F_2^n$ tagliano le $n-2k-1$ generatrici considerate. Dunque le loro imagini passano per gli $n-2k-1$ punti $p_i$, sicchè *sul piano rappresentativo vi è un punto fondamentale* $(n-k-1)$ *uplo ed* $n-2k-1$ *punti fondamentali semplici.* Inoltre se la rigata razionale si considera in uno spazio ad $n-r$ dimensioni, le curve imagini delle sezioni piane

sono ancora soggette, come già osservammo, ad altre condizioni lineari in modo da formare solo più un sistema ad $n-r$ dimensioni (*).

È poi chiaro che in questa rappresentazione piana non vi sono altri punti fondamentali, sicchè solo gli $n-2k-1$ punti fissi $P_i$ della rigata dànno luogo a punti fondamentali del piano in quanto che alla $C^{n-k-1}$ passante per essi corrisponde il punto $(n-k-1)$ uplo $\zeta$ ed alle $n-2k-1$ generatrici passanti risp. per essi corrispondono i punti semplici $p_i$. Le $k$ generatrici $g_r$ della rigata giacenti nell' $S_{n-2}$ di proiezione non producono singolarità nella rappresentazione piana, poichè le loro generatrici infinitamente vicine hanno proiezioni ben definite, sicchè ad esse corrispondono $k$ rette ben definite passanti per $\zeta$. Ciò concorda con quanto dicemmo alla fine del n° 12 sulla possibilità di concepire questa rappresentazione piana all'infuori della proiezione come una corrispondenza tra le rette del piano e le $C^{n-k}$ della $F_2{}^n$ passanti pegli $n-2k-1$ punti $P_i$: così facendo non compaiono più quelle $k$ generatrici $g_r$.

Al n° 7 abbiamo incontrato una rappresentazione dei punti della rigata $F_2{}^n$ mediante parametri, la quale si può considerare come caso particolare delle rappresentazioni piane ora ottenute geometricamente. Basta in fatti porre $\lambda=\frac{\zeta}{\xi}$, $\mu=\frac{\eta}{\xi}$ e allora le formule ivi incontrate ci dànno la rappresentazione dei punti della

(*) In questo modo si hanno per ogni rigata razionale d'ordine $n$ e la cui direttrice minima sia d'ordine $m$ rappresentazioni piane degli ordini $n, n-1, \ldots, n-m$, le quali coincidono perfettamente per le rigate razionali dello spazio ordinario con quelle che il Clebsch nella memoria citata deduceva successivamente l' una dall' altra mediante una serie di trasformazioni quadratiche del piano rappresentativo. Però quell' illustre scienziato cominciava col dare una rappresentazione piana d' ordine $n+1$ di quelle rigate: ora anche questa rappresentazione si può ottenere mediante la proiezione considerando la rigata razionale d'ordine $n$ (dello spazio ordinario) come la proiezione su un tale spazio della rigata d'ordine $n+1$ dello spazio ad $n+2$ dimensioni fatta con uno spazio di proiezione (ad $n-2$ dimensioni) passante per un punto di questa rigata. Allora è chiaro che da questo punto e dalla generatrice passante per esso nascerà nella rappresentazione piana d'ordine $n+1$ della rigata d'ordine $n$ un nuovo punto fondamentale semplice diverso dagli $n$ che già si avevano. Anche la rappresentazione così ottenuta coincide dunque con quella data dal Clebsch. Essa fu pure accennata dal Veronese (loc. cit., n. 55).

rigata nei punti $(\xi, \eta, \zeta)$ del piano: si vede così che questa rappresentazione è dell'ordine $n-m+1$ con un punto fondamentale $(n-m)$ uplo in $\xi=0$, $\eta=0$ e con $n-2m+1$ punti fondamentali semplici posti sulla retta $\zeta=0$ ed infinitamente vicini al punto d'intersezione di questa retta colla $\xi=0$. Questa rappresentazione è dunque un caso particolare di quella tra le nostre rappresentazioni che corrisponde all'assumere $k=m-1$.

## VI.

## *Rappresentazioni piane d'ordine minimo.*

**16.** Occupiamoci ora più specialmente della rappresentazione piana d'ordine minimo delle nostre rigate, rappresentazione che si ottiene, come notammo, prendendo $k=m$ ordine della direttrice minima (salvo quando, $n$ essendo pari, si ha $m=\frac{n}{2}$, caso che considereremo tra poco), e che è quindi d'ordine $n-m$. In tal caso vi è qualche modificazione da fare alle cose esposte, poichè la curva $C^{n-k-1}$ d'ordine $n-k-1$ determinata dagli $n-2k-1$ punti $P_i$ della $F_2^n$ si decomporrà per $k=m$ nelle $n-2m-1$ generatrici passanti per gli $n-2m-1$ punti $P_i$ e nella direttrice minima $\gamma^m$ d'ordine $m$. Questa curva starà in un $S_{n-1}$ coll' $S_{n-2}$ di proiezione, poichè lo taglia in $m$ punti (sulle $m$ generatrici $g_r$ contenute in quell' $S_{n-2}$), e in quell' $S_{n-1}$ staranno pure quelle altre $n-2m-1$ generatrici, poichè esse tagliano sia l'$S_{n-2}$ sia $\gamma^m$. Quindi sarà ancor vero che le generatrici della rigata saranno proiettate nelle rette del piano passanti per un punto $\zeta$, ma questo sarà ora l'imagine della direttrice minima $\gamma^m$ e nello stesso tempo di quelle $n-2m-1$ generatrici. Però al punto $P_i$ di una di queste posto sull' $S_{n-2}$ di proiezione corrisponde sul piano un punto indeterminato su una retta passante per $\zeta$. — La sezione della $F_2^n$ fatta con un $S_n$ qualunque taglia $\gamma^m$ in $m$ punti pei quali passano generatrici mobili e taglia pure le $n-2m-1$ generatrici fisse. Dunque: *Le imagini delle sezioni piane delle rigate sono curve d'ordine $n-m$ aventi in $\zeta$ un punto $(n-m-1)$uplo in cui solo $m$ tangenti sono mobili, mentre le altre $n-2m-1$ sono fisse e sono le rette che corrispondono ai punti $P_i$ delle $n-2m-1$*

*generatrici considerate* (*). — I punti $p_i$ del piano i quali nelle rappresentazioni prima considerate corrispondevano alle generatrici passanti pei punti $P_i$ vengono ad essere in questa rappresentazione minima infinitamente vicini al punto fondamentale $\zeta$ su direzioni determinate.

**17.** Abbiamo escluso il caso in cui, $n$ essendo pari, si ha $m = \frac{n}{2}$, e quindi, come vedemmo (n° 5) vi sono sulla superficie $\infty^1$ curve d'ordine $\frac{n}{2}$ e niuna curva d'ordine inferiore. In tal caso si vede che le varie proiezioni della $F_2^n$ su un piano si possono ancora fare *purchè* però $k$ si prenda minore di $m$, cioè di $\frac{n}{2}$. Quindi il massimo valor di $k$, cioè quello per cui la rappresentazione piana è d'ordine minimo si ottiene prendendo, non più come negli altri casi $k = m$, ma bensì $k = m - 1$, cioè $k = \frac{n-2}{2}$. Allora applicando le cose viste ai n$^i$ 14 e 15 per $k$ qualunque noi vediamo che alle sezioni piane della superficie corrispondono curve piane d'ordine $\frac{n+2}{2}$ aventi in $\zeta$ un punto $\frac{n}{2}$ uplo fisso (senza tangenti fisse) ed aventi inoltre un punto semplice fisso diverso da $\zeta$. In questo caso l'$S_{n-2}$ di proiezione contiene $\frac{n-2}{2}$ generatrici della rigata ed un punto $P$ di questa fuori di esse: per questo punto passa una generatrice proiettata da quell' $S_{n-2}$ mediante un $S_{n-1}$ in quel punto fondamentale semplice $p$; questo $S_{n-1}$ contenendo $\frac{n}{2}$ generatrici è sostegno di un fascio di $S_n$ i quali tagliano la $F_2^n$ oltre

(*) Per lo spazio ordinario questa rappresentazione d'ordine minimo delle rigate razionali è appunto quella che fu studiata più accuratamente dal Clebsch e che lo condusse alla distinzione di quelle rigate in gruppi. È bello il vedere come i risultati da esso ottenuti con procedimento analitico vengano illuminati dal metodo da noi tenuto della proiezione: veggasi per esempio l'interpretazione dei punti fondamentali data dal Clebsch nel § 4 del suo lavoro (dove per confrontare coi nostri risultati basterà porre $m = \alpha - 1$).

che in quelle generatrici nelle $\infty^1$ curve d'ordine $\frac{n}{2}$ che essa contiene. Dunque queste curve sono rappresentate sul piano dalle rette passanti pel punto fondamentale semplice $p$. Ma quella tra queste curve la quale passa pel punto $P$ della $F_2^n$ starà in un $S_{n-1}$ proiettante ed avrà per imagine il punto fondamentale $\frac{n}{2}$ uplo $\zeta$ (*).

Torino, 31 Gennaio 1884.

(*) Anche per questo gruppo eccezionale di rigate razionali d'ordine pari i risultati da noi ottenuti qui e al n. 5 coincidono per lo spazio ordinario con quelli trovati dal CLEBSCH (loc. cit., p. 9 e 11).

Lo stesso Socio D'Ovidio presenta ancora e legge la seguente Nota del sig. Ingegnere Camillo Guidi:

# DELL'AZIONE DEL VENTO

CONTRO

# GLI ARCHI DELLE TETTOIE.

Nello studio della stabilità degli archi metallici impiegati a sostegno delle tettoie non ha poco interesse la ricerca degli sforzi prodotti dalla pressione del vento, i quali in alcuni casi, come è noto, possono raggiungere valori considerevoli. Scopo di questo scritto è di mostrare un metodo grafico per eseguire questa ricerca (*).

La pressione del vento, al pari del carico, viene trasmessa all'arco nei punti d'attacco degli arcarecci ed agisce in direzione normale all'asse dell'arco. Decomponiamo queste pressioni in componenti verticali ed in componenti orizzontali: le prime possono considerarsi come carichi e per gli sforzi da esse prodotti nell'arco rimandiamo il lettore ad altro nostro lavoro (**): ci occuperemo qui invece degli sforzi prodotti dalle componenti orizzontali.

Analogamente al caso in cui l'arco sia sollecitato da forze verticali, anche nel caso presente il problema è risoluto quando si sappia costruire il poligono funicolare connettente le forze orizzontali, che ha per lati estremi le linee d'azione delle reazioni degli appoggi. Se l'arco presenta tre articolazioni, il problema

(*) Il lettore potrà consultare una soluzione analitica di questo problema nel *Greene-Trusses and Arches*, part. III. New York, 1879.

(**) *Sugli archi elastici;* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, vol. XXXVI.

si risolve molto facilmente coi soli principî della statica, costruendo quel poligono funicolare che passa per le tre articolazioni. Non ci fermeremo quindi su questo caso e considereremo invece il caso di un arco articolato a cerniera alle estremità e quello di un arco di un sol pezzo incastrato alle estremità.

Sia $b_{10}\ a\ b'_{10}$ (fig. 1) l'asse di un arco metallico con cerniere alle estremità, destinato a sostenere una copertura. Siano $a_1$, $a_2, \ldots, a_9$ i punti medî di altrettanti elementi $\Delta s$ dell'arco tutti eguali fra loro. Riteniamo concentrata la pressione del vento nei punti $a_2$, $a_4$, $a_6$, $a_8$ (punti di attacco degli arcarecci). Supponiamo che il vento spiri nella direzione $uv$ ed il segmento $uv$ rappresenti la pressione contro una superficie piana normale alla direzione del vento e della stessa ampiezza di una delle falde della copertura che si proiettano in $a_9 a_7$, $a_7 a_5$, $a_5 a_3$, $a_3 a_1$ e la cui lunghezza è la distanza fra due successivi degli archi da cui la copertura è sorretta; falde che considereremo come piane. Ciò posto indicando con $\alpha_1$ l'inclinazione della prima falda alla direzione del vento, la pressione che viene trasmessa sul punto $a_8$ viene data come è noto da $uv \operatorname{sen}^2 \alpha_1$ che si può costruire graficamente nel modo seguente: sopra $uv$ come diametro si descriva una semicirconferenza, da $u$ si conduca la normale ad $uv$, da $v$ la $vw_1$ inclinata di $\alpha_1$ ad $uv$ e finalmente da $w_1$ la parallela ad $uv$; risulta $w_1 z_1 = uv \operatorname{sen}^2 \alpha_1$. Costruite in questo modo in grandezza le pressioni del vento, portiamole in $c_1 a_8$, $c_2 a_6$, $c_3 a_4$, $c_4 a_2$ in direzione normale all'asse dell'arco nei punti $a_8$, $a_6$, $a_4$, $a_2$ e quindi decomponiamole in componenti verticali ed in componenti orizzontali e prendiamo a studiare l'effetto di quest'ultime cioè delle forze $c_1 a_8$, $c_2 a_6$, $c_3 a_4$, $c_4 a_2$ che indicheremo rispettivamente con $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ mentre chiameremo $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ le loro distanze dalla corda dell'arco.

Indichiamo con $V_1$, $V_2$ le componenti verticali delle reazioni degli appoggi di sinistra e di destra, con $Q_1$, $Q_2$ le componenti orizzontali delle stesse reazioni, con $2a$ la corda dell'arco: dovendo le reazioni degli appoggi passare per le cerniere, si avrà per l'equilibrio del sistema

$$(1) \ldots\ldots \qquad Q_1 + Q_2 = \Sigma S\ ;$$

$$(2) \ldots\ldots \qquad V_1 + V_2 = 0\ ;$$

$$(3) \ldots\ldots \qquad V_1\, 2a = \Sigma S h\ .$$

La (2) esprime che le reazioni verticali sono eguali e di senso opposto, costituiscono cioè una coppia il cui momento secondo la (3) è eguale alla somma dei momenti delle forze orizzontali dalle quali è sollecitato l'arco, rispetto un punto qualunque della corda. Andiamo ora a determinare $Q_1$. Indichiamo con $Q'_1$ e $Q'_2$ le reazioni orizzontali di sinistra e di destra prodotte dalla forza $S_1$ ed immaginiamo applicata all'arco dalla parte opposta una forza eguale e di senso opposto alla $S_1$ ed agente secondo la stessa linea: quest'ultima produrrà evidentemente nell'appoggio di sinistra una reazione orizzontale eguale a $-Q'_2$ e nell'appoggio di destra una reazione orizzontale eguale a $-Q'_1$: le reazioni verticali dovute al sistema di queste due forze evidentemente si annullano. Ora, indicando con $M$ il momento flettente in un punto dell'asse dell'arco distante di $y$ dalla corda, con $E$ il modulo di elasticità del materiale di cui è formato l'arco, con $I$ il momento d'inerzia della sezione trasversale in quel punto, con $\Delta s$ l'elemento dell'arco, in causa dell'invariabilità della lunghezza della corda e se si trascurano le deformazioni prodotte dagli sforzi diretti secondo l'asse dell'arco rispetto a quelle prodotte dal momento flettente (*) si deve avere, come è noto,

$$(4)\ldots\ldots \qquad \sum \frac{M\Delta s}{EI}\, y = 0$$

in cui la sommatoria s'intende estesa a tutto l'arco. Se supponiamo il momento d'inerzia $I$ costante e consideriamo i momenti $M$ dei punti medi di altrettanti elementi $\Delta s$ tutti eguali fra loro, la (4) si ridurrà a

$$(5)\ldots\ldots \qquad \Sigma M y = 0 \ .$$

Nel nostro caso la (5) fornisce

$$(Q'_1 - Q'_2)\,\Sigma y^2 = S_1\,\Sigma\,(y - h_1)\,y \ ,$$

nella quale la sommatoria del primo membro deve essere estesa a tutto l'arco e quella del secondo membro dal punto di applicazione della $S_1$ al punto simmetrico.

---

(*) Si possono legittimamente trascurare in questo caso di sollecitazione le deformazioni prodotte dagli sforzi diretti secondo l'asse dell'arco, sia per la piccolezza degli sforzi suddetti, sia perchè non sono dello stesso senso per tutti gli elementi dell'arco.

Lo stesso va ripetuto per ciascuna delle altre forze orizzontali $S$, di guisa che si avrà da ultimo

$$(6) \ldots \qquad Q_1 - Q_2 = \frac{S_1 \Sigma (y - h_1) y + \ldots\ldots + S_4 \Sigma (y - h_4) y}{\Sigma y^2} .$$

Nella fig. 1 per mezzo di poligoni di moltiplicazione furono costruite graficamente le sommatorie contenute nella (6). Così per esempio per costruire la sommatoria $\Sigma (y - h_1) y$ si prese sulla tangente al vertice dell'arco e verso sinistra $a 1_1 = \frac{1}{2} a_1 a'_1$, $1_1 2_1 = \frac{1}{2} a_2 a'_2$, ..... $6_1 7_1 = \frac{1}{2} a_7 a'_7$ e assunto $b$ come polo si costruì il poligono di moltiplicazione $a g_1$, risulta

$$b g_1 \,.\, 4 a b = \Sigma (y - h_1) y .$$

Nello stesso modo si ottennero i segmenti $b g_2$, $b g_3$, $b g_4$ proporzionali alle altre sommatorie dovute alle forze $S_2$, $S_3$, $S_4$. Per costruire la sommatoria $\Sigma y^2$ si prese sulla stessa tangente al vertice dell'arco e verso destra $a 1 = \frac{1}{4} a_1 b_1$, $12 = \frac{1}{4} a_2 b_2$, ..., $89 = \frac{1}{4} a_9 b_9$ e la distanza polare $a b_0 = \frac{1}{2} a b$ e quindi si costruì il poligono di moltiplicazione $a f$, si ebbe così il segmento $b f$ proporzionale a $\Sigma y^2$. Ciò fatto, sulla verticale per $f$ si prese $f k_1 = S_1$. $k_1 k_2 = S_2$. $k_2 k_3 = S_3$. $k_3 k_4 = S_4$ e assumendo per polo il punto $b$ si costruì l'altro poligono di moltiplicazione $g_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ : si ottenne $b d_5 = Q_1 - Q_2$ e quindi in virtù della (1) si ricava

$$Q_1 = \frac{b d_5 + f k_4}{2} .$$

Determinato $Q_1$ si costruì nella fig. 2 la retta delle forze prendendo $b k_0 = Q_1$, $k_0 k_1 = S_1$, $k_1 k_2 = S_2$, $k_2 k_3 = S_3$, $k_3 k_4 = S_4$ e assunto un polo $o_0$ ad arbitrio sulla verticale per $b$, si tracciò il poligono funicolare $b_1 c_1 c_2 c_3 c_4$ facendo passare il primo lato per la cerniera $b_1$. L'ultimo lato non passando per l'altra cerniera $b_4'$, lo si prolungò fino ad intersecare in $m$ la verticale per

$b_1$, congiunto $m$ con $b'_1$ si ottenne l'ultimo lato del poligono funicolare che risolve il problema: condotto dal punto $k_4$ il raggio parallelo si determinò il polo corrispondente $o$ e dopo ciò si potè costruire il poligono funicolare risolvente $b_1 e_1 e_2 e_3 e_4 b_1'$.

Costruito questo poligono funicolare si hanno, come è noto, tutti gli elementi per determinare gli sforzi interni in una sezione qualunque dell'arco. Il momento flettente in un punto qualunque dell'asse dell'arco viene dato dalla corda orizzontale intercetta fra quel punto ed il poligono funicolare, moltiplicata per $o\,b$ ossia per la reazione verticale degli appoggi, cosicchè la figura racchiusa fra l'asse dell'arco ed il poligono funicolare rappresenta colle sue corde orizzontali il diagramma del momento flettente. Questo risultato è del tutto analogo a quello che si ottiene per un arco sollecitato da forze verticali, pel quale il momento flettente vien dato dall'ordinata verticale intercetta fra il dato punto dell'asse dell'arco e la curva delle pressioni, moltiplicata per la spinta orizzontale, di modo che la figura racchiusa fra l'asse dell'arco e la curva delle pressioni rappresenta colle sue ordinate verticali il diagramma del momento flettente.

Supponiamo ora che l'arco sia incastrato alle estremità: in tal caso le linee delle reazioni degli appoggi ossia i lati estremi del poligono funicolare che si deve costruire non passano più per i punti $b_1 b'_1$ (fig. 4). Il diagramma del momento flettente in causa dell'invariabilità della lunghezza della corda e della posizione degli elementi estremi dell'arco, oltre all'equazione (4) deve notoriamente soddisfare anche alle altre due

$$(7)\ldots\quad \sum \frac{M\,\Delta s}{EI} = 0 \qquad \sum \frac{M\,\Delta s}{EI}\,x = 0\ ,$$

indicando con $x$ la distanza del centro dell'elemento $\Delta s$ dalla verticale di uno degli appoggi e intendendo le sommatorie estese a tutto l'arco. Supposto ancora il momento d'inerzia $I$ costante e considerando i momenti $M$ dei punti medî di altrettanti elementi $\Delta s$ tutti eguali, le (7) si riducono a

$$(8)\ldots\quad \Sigma M = 0 \qquad \Sigma M x = 0\ .$$

Supponiamo già costruito il poligono funicolare $e_{10} e_8 e_6 e_4 e_2 e'_{10}$ (fig. 4) che risolve il problema. Il momento flettente per il

punto $a_i$ qualunque dell'asse dell'arco è positivo ed è misurato dalla corda $a_i e_i = a_i a_i'' + a_i'' e_i$ ed il momento pel punto simmetrico $a_i'$ è ancora positivo e misurato da $a_i' e_i' = a_i' a'' + a_i'' e_i'$. Ora essendo evidentemente

$$\Sigma a_i a_i'' + \Sigma a_i' a_i'' = 0$$

si dovrà anche avere per la prima delle (8)

$$\Sigma a_i'' e_i + \Sigma a_i'' e_i' = 0 \quad ;$$

ciò vuol dire che se dell'ultimo lato del poligono funicolare si prende la retta simmetrica rispetto alla $b\,a$, la somma algebrica delle corde intercette fra questa retta ed il poligono funicolare e passanti per i punti medî dei vari $\Delta s$, deve risultare nulla. Di qui ricaviamo la costruzione di una figura affine a quella racchiusa fra il poligono funicolare risolvente e la verticale $b\,a$. Determinata, come si è detto per l'arco con cerniere alle estremità, la reazione orizzontale $Q_1$ dell'appoggio di sinistra, costruiamo la retta delle forze $k_0 k_1 \ldots k_4$ (fig. 2) e assunto un polo $o_0$ sulla verticale per $b$ costruiamo il poligono funicolare $e_{10} e_9 \ldots, e'_{10}$ (fig. 3). In seguito, condotta una verticale $b' a'$ di tentativo e tracciata la retta $c' c'$ simmetrica dell'ultimo lato del poligono funicolare rispetto alla $b' a'$ facciamo la somma algebrica delle corde che passano pei punti medî dei varî elementi $\Delta s$ tutti eguali in cui è stato diviso l'arco ed intercette fra la $c' c'$ ed il poligono funicolare: portiamo tale somma in $b' m$; dipoi condotta un'altra verticale di tentativo $b'' a''$ ripetiamo la stessa operazione e portiamo in $b'' n$ la somma algebrica delle corde, al disotto perchè risulta di senso opposto alla $b' m$. La curva di errore di cui fanno parte i punti $m$, $n$ può essere sostituita senza errore sensibile, fra i detti punti della retta $m\,n$, la quale interseca la $e_{10} e'_{10}$ nel punto $b_0$ e la verticale $b_0\, a_0$ soddisfa al problema, ossia è tale che la figura racchiusa fra essa ed il poligono funicolare, figura che indicheremo colla lettera $D'$ è affine alla figura $D$ racchiusa fra la verticale $b\,a$ ed il poligono funicolare nella fig. 4.

Rimane ora a risolvere l'ultima parte del problema, cioè determinare per quale rapporto devono moltiplicarsi le corde della figura $D'$ per ottenere quelle della figura $D$. A ciò serve la

seconda delle equazioni (8), essa fornisce (secondo le indicazioni della fig. 4)

$$\Sigma a_i a_i'' x + \Sigma a_i'' e_i x + \Sigma a_i' a_i'' x + \Sigma a_i'' e_i' x = 0$$

od anche

$$(9) \ldots \quad \Sigma a_i a_i''.x + \Sigma a_i' a_i''.x = \Sigma e_i a_i''.x + \Sigma e_i' a_i''.x \ .$$

Intendendo per $x$ le distanze dei varî punti medî degli elementi $\Delta s$ dalla verticale dell'appoggio di destra (fig. 3), prendiamo sulla verticale per $b$, $b\,1 = \frac{1}{4} a_9 a_9''$, $12 = \frac{1}{4} a_8 a_8''$, ..., $89 = \frac{1}{4} a_1 a_1''$ e assumendo il polo in $b_1$ costruiamo il poligono di moltiplicazione $b_1 f$. Siccome poi $98 = \frac{1}{4} a_1' a_1''$, $87 = \frac{1}{4} a_2' a_2''$, ..., $1\,b = \frac{1}{4} a_9' a_9''$, proseguendo il poligono di moltiplicazione si otterrebbe sulla verticale per $b_1'$ un'ordinata doppia di $b f$ di modo che si avrà:

$$2\,b f = \frac{\Sigma a_i a_i''.x + \Sigma a_i' a_i''.x}{4\,b\,b_1}$$

ovvero

$$4\,b f = \frac{\Sigma a_i a_i''.x + \Sigma a_i' a_i''.x}{b_1 b_1'} \ .$$

In seguito, sulla verticale per $b_1'$ si porti $b_1'\,1 = e_9 e_9''$, $12 = e_8 e_8''$, $23 = e_7 e_7''$ e poi in senso inverso $34 = e_6 e_6''$, $45 = e_5 e_5''$ e poi di nuovo verso l'alto $56 = e_4 e_4''$, $67 = e_3 e_3''$, $78 = e_2 e_2''$, $89 = e_1 e_1''$, $9\,10 = e_1 e_1''$, $10\,11 = e_2 e_2''$, $11\,12 = e_3' e_3''$, $12\,13 = e_4' e_4''$, e poi verso il basso $13\,14 = e_5' e_5''$, ..... $17\,b_1' = e_9' e_9''$; e assunto il punto $b_1$ come polo, si costruisca il poligono di moltiplicazione $b_1 g$, risulta

$$b_1' g = \frac{\Sigma e_i e_i''.x + \Sigma e_i' e_i''.x}{b_1 b_1'} \ .$$

Se la figura $D'$ fosse eguale a $D$ dovrebbe risultare in grazia della (9) $4\,b f = b_1' g$: ciò non essendo si dedurrà la figura $D$ dalla $D'$ moltiplicando le corde di quest'ultima pel rapporto

$$\frac{4\,b f}{b_1' g} \ .$$

Nella fig. 4 si è rappresentato il poligono funicolare così dedotto: come pure la retta delle forze ed il polo $o$ di proiezione. La figura racchiusa fra l'asse dell'arco ed il poligono funicolare così costruito rappresenta il diagramma del momento flettente. Per un punto qualunque $a_i$ il momento flettente è dato da $ob \cdot a_i c_i$ dove $ob$ rappresenta ancora la reazione verticale degli appoggi.

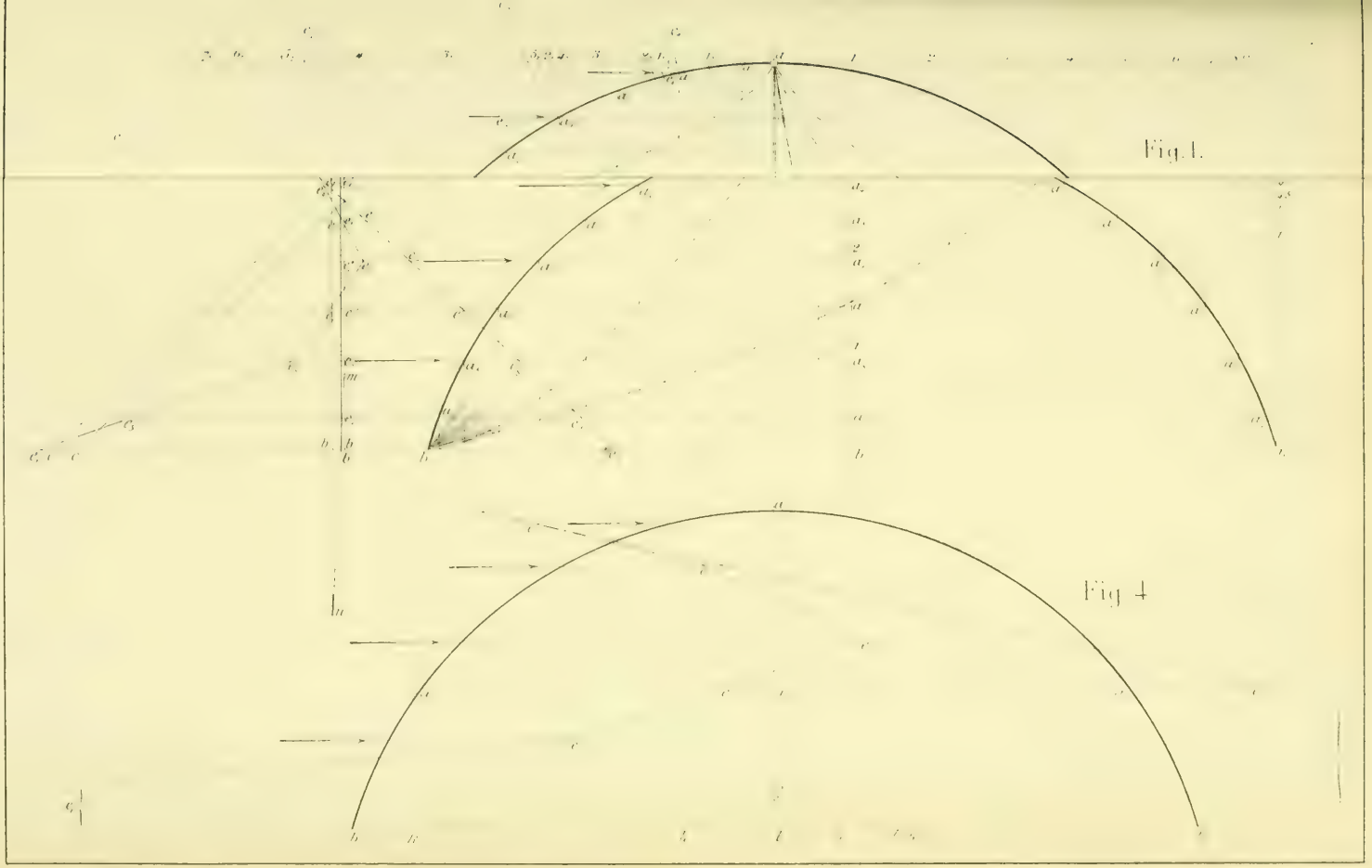


Fig. 1.
Fig 4

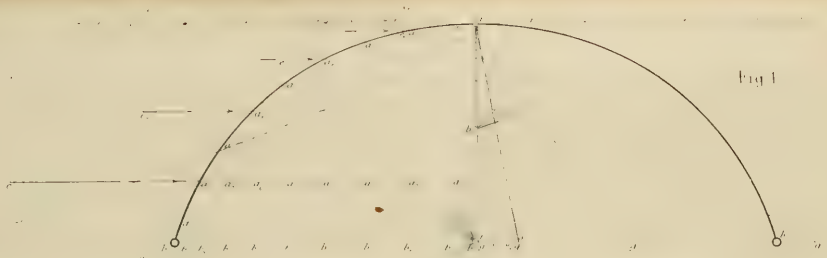


Fig 1

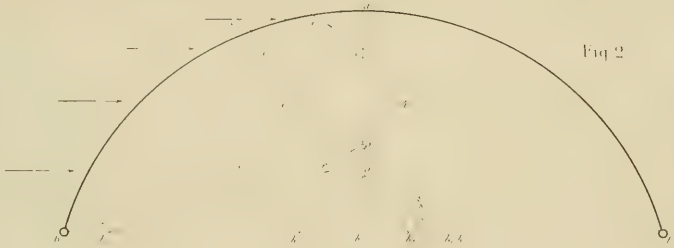


Fig 2

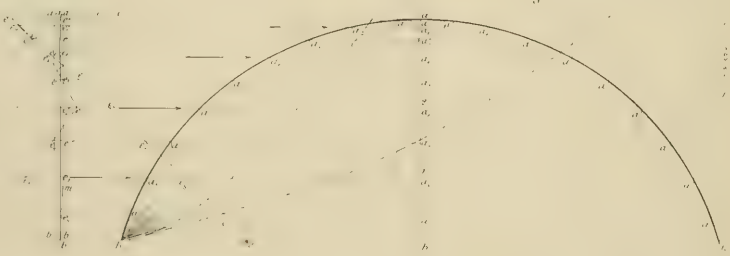


Fig 3.

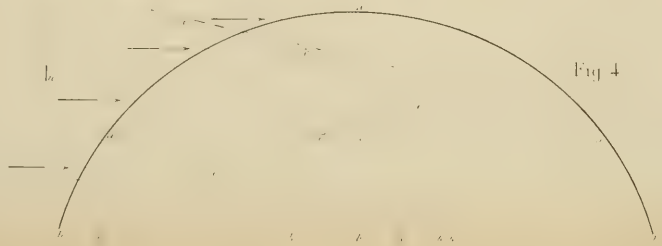


Fig 4

Il Socio Cav. Prof. Giulio Bizzozero, condeputato col Socio Cav. Prof. Angelo Mosso ad esaminare un lavoro del sig. Prof. L. Griffini, dell'Università di Messina, intitolato « *Contribuzione alla Patologia dell'epitelio cilindrico* » legge la seguente

# RELAZIONE.

Il lavoro del Prof. Griffini è frutto di lunghe e pazienti ricerche, e di numerosi esperimenti. Esso si può dividere in due parti: nell'una si considera la *riproduzione* dell'epitelio, nell'altra la sua *infiammazione*. — In un argomento di tanto interesse per la patologia, l'autore riuscì a scoprire buon numero di fatti nuovi; dei quali citeremo, come esempio, l'iniziarsi della riproduzione dell'epitelio vibratile colla produzione di cellule epiteliche pavimentose, l'origine delle cosidette sfere cigliate, il rapporto fra l'intensità dell'irritazione e la natura catarrale o cruposa degli essudati, e così via. Per ciò crediamo sia utile che il lavoro del Prof. Griffini sia portato a conoscenza del pubblico; e a questo scopo proponiamo che, a norma dei regolamenti, se ne dia lettura all'Accademia.

Bizzozero, *Relatore*.
A. Mosso.

La Classe accoglie la proposta della Commissione, e, udita la lettura del lavoro del Professore Griffini, ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. Luigi Brugnatelli,

# SULLA COMPOSIZIONE

DI UNA

# ROCCIA PIROSSENICA

## DEI DINTORNI DI RIETI.

La roccia che forma argomento di questa mia breve comunicazione, appartiene ad una piccola massa che affiora in fondo ad un torrente, essendo tutta all'ingiro ricoperta da conglomerati quaternarii. Essa trovasi verso il lembo orientale del bacino di Rieti, in prossimità del villaggio di Coppaeli di Sotto (frazione di S.ª Rufina, circondario di Città Ducale), e viene scavata e trasportata a Rieti, dove è adoperata come materiale di costruzione.

Diversi campioni di questa roccia, furono verso la fine dell'anno 1882, inviati dall'Ingegnere Zesi, Segretario del Comitato Geologico Italiano, al Professore A. Cossa, il quale me ne affidò lo studio.

Questa roccia però, che ha le apparenze di una lava, venne per la prima volta scoperta nell'interno del Subapennino, e precisamente nella sinclinale reatina presso Coppaeli, nell'anno 1879, dal Capitano Antonio Verri, il quale dopo averne fatto breve cenno alla Società di Scienze Naturali di Milano, nella sua pregevolissima Memoria che ha per titolo: *Studi Geologici sulle Conche di Terni e di Rieti* (1), ne descrisse le condizioni

(1) Memoria presentata alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 6 Maggio 1883.

di giacitura con queste parole: « La lava non ha correnti nè scorie; apparisce come un masso isolato nel recinto della Conca, alla quota di 722 metri; tende a decomporsi con clivaggio sferoidale. Il detrito del monte impedisce di vederne il piano di contatto colle formazioni mesozoiche; dalla parte dove è a contatto coi sedimenti vallini pliocenici, non appare in questi segno di metamorfismo.

È probabile che questa roccia appartenga ad un periodo vulcanico intermedio tra l'eocene ed il miocene, al pari dei basalti delle Alpi Venete e del Trentino ».

Per quanto concerne la composizione mineralogica di questa roccia, il Capitano Verri, nella stessa memoria ora citata, riferisce che il Professore d'Acchiardi, che ne aveva mandato un campione da esaminare all'illustre Professore Zirkel, n'ebbe per risposta che essa risultava formata da melilite, pirosseno e perowskite. A questo riguardo devo però avvertire che già verso la fine del 1882, prima che fossero noti i risultati dell'osservazione del petrografo di Lipsia, il Professore Cossa, mi aveva già insegnato a distinguere nelle sezioni sottili di questa lava, il pirosseno, la melilite e la perowskite, e che questa diagnosi venne riconosciuta esatta dal Professore Rosenbusch.

Quantunque la composizione mineralogica di tale roccia molto interessante, sia già stata riconosciuta da diversi petrografi, tuttavia non ne fu ancora studiata la composizione chimica, e pertanto ho accolto di buon grado la proposta fattami dal Professore Cossa di farne l'analisi.

Alla relazione dei risultati delle ricerche chimiche faccio precedere quella dell'osservazione microscopica che ho eseguito sotto la direzione del Professore Cossa, al quale mi è grato di presentare i miei più vivi ringraziamenti, per il valido aiuto prestatomi in questo mio primo lavoro di chimica mineralogica.

La roccia pirossenica dei dintorni di Rieti ha un colore grigio verdognolo; solamente in alcuni campioni l'uniformità di questa tinta è interrotta da piccole chiazze bianche formate da zeoliti. Essa è molto compatta, presenta una frattura scagliosa a superficie irregolare, e contiene in numero scarsissimo delle piccolissime cavità di forme varie ed irregolari, tappezzate da un minerale bianco cristallino costituito da una zeolite, la quale presenta le reazioni caratteristiche del mesotipo. Osservando con una lente la superficie di frattura della roccia, si rileva che essa non ha

una composizione omogenea, ma vi si notano disseminati in una pasta apparentemente afanitica, dei minuti cristalli prismatici, dotati di lucentezza vetrosa e che vennero poi riconosciuti per pirosseno.

L'osservazione microscopica, eseguita sopra le sezioni sottili, diede i risultati seguenti. — La roccia appare formata da una massa microcristallina di colore verde giallognolo, in cui sono disseminati porfiricamente dei cristalli relativamente molto grandi di pirosseno. Il pirosseno è in cristalli di prima consolidazione a contorni ben distinti; esso è affatto incoloro, e non presenta traccie sensibili di pleocroismo e d'assorbimento. I suoi cristalli sono prevalentemente allungati secondo l'asse del prisma, e sono quasi sempre geminati. Anzi alcuni cristalli di pirosseno si presentano attraversati da due ed anche da più laminette emitropiche. Nei cristalli di pirosseno non ho potuto notare ben distinte inclusioni, all'infuori di scarse e minutissime granulazioni vetrose.

La massa microcristallina della roccia, nella quale trovansi racchiusi i cristalli di pirosseno, è per la massima parte formata da melilite. Questo minerale si trova in cristalli allungati secondo l'asse principale, a sezioni quadrate o rettangolari e non sono modellati sugli altri componenti della roccia come si verifica a cagion d'esempio nella lava leucitica di Capo di Bove. Ha un colore giallo verdognolo molto sbiadito; è dotato d'una doppia rifrazione assai debole, e coi nicol incrociati si presenta colorata in azzurro chiaro che è quasi uguale per intensità di tinta a quello che ordinariamente si osserva nel serpentino. L'estinzione però avviene sempre completamente nelle direzioni parallele agli spigoli dei piccoli cristalli. In molti cristallini di melilite ed in una direzione quasi normale a quella del loro maggiore sviluppo si osservano delle striature finissime, non continue e che si interrompono per lo più verso la parte mediana della sezione dei cristalli. Alcuni cristalli di melilite, offrono traccie di avanzata decomposizione, che si rende manifesta specialmente quando si esaminano le sezioni della roccia coi nicol ad angolo retto. Sparse fra i cristallini di melilite, si notano delle granulazioni cristalline, che hanno un colore di feccia di vino; sono affatto isotrope, e presentano qualche volta ben distinte le forme dell'ottaedro. Questi caratteri fanno supporre che queste granulazioni siano formate da perowskite, minerale che si trova frequentemente associato alla melilite. Per accertarmene ho decomposto

una certa quantità della roccia ridotta in polvere, con dell'acido cloridrico; trattando prima con acqua e poi con soluzione di carbonato sodico la roccia decomposta, ho eliminata la massima parte dei componenti intaccati dall'acido. Nella polvere residua poi, ho potuto, con ripetute levigazioni, concentrare in pochissima quantità di materia le granulazioni in discorso, le quali cimentate al cannello, e trattate anche col bisolfato di potassio, diedero ben distinte le reazioni del titanio.

Oltre alla melilite ed alla perowskite, nella massa fondamentale della roccia, trovansi delle granulazioni amorfe, che sembrano costituite da particelle di materia fusa.

Come minerale accidentale poi, nelle sezioni sottili, si osservano degli agglomeramenti sferoidolitici di zeoliti, formati da sottilissimi cristalli spismatici addossati intorno ad un centro comune. Queste zeoliti, che, come ho già accennato, si manifestano anche coll'esame macroscopico della roccia, derivano molto probabilmente dalla alterazione della melilite.

Per lo studio della composizione della roccia di Rieti, scelsi tra i campioni inviati dall'Ingegnere Zesi, quello che presentava la maggiore omogeneità di composizione e che dall'esame macroscopico risultava contenere minor quantità di zeoliti.

La determinazione del peso specifico, eseguita col pienometro con quantità differenti di roccia, diede i risultati seguenti:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | 2 , 64 | a + 14° c. |
| 2° | 2 , 67 | » » |
| Media | 2 , 65 . | |

La roccia in schegge sottili si fonde facilmente, formando un vetro di colore verde bottiglia a superficie liscia, non attirabile dalla calamita.

La roccia polverizzata e trattata con acido cloridrico si decompone quasi totalmente (eccettuati il pirosseno e la perowskite) colla massima facilità con separazione di silice gelatinosa.

La polvere della roccia, inumidita e messa in contatto con una carta rossa di tornasole, manifesta una reazione alcalina ben distinta.

Coll'analisi qualitativa ho riscontrato nella roccia le seguenti sostanze: acqua, anidride silicica con piccolissime quantità di

anidride titanica, traccie minime di anidride fosforica, allumina, ferro per la massima parte allo stato di sesquiossido, calce, magnesia, soda e potassa.

Coll'analisi spettrale, mi fu dato di riscontrare indizio sicuro della presenza nella roccia di piccolissime quantità di litina.

Da più analisi, che mi diedero risultati sufficientemente concordi, si deduce, che la roccia di Rieti nel campione esaminato, ha la composizione centesimale seguente:

| | |
|---|---|
| Acqua . . . . . | 6,66 |
| Anidride silicica con piccolissime quantità di anidride titanica . . . . | 43,36 |
| Anidride fosforica . . . . . | traccie |
| Allumina . . . . . | 9,37 |
| Ossido ferrico . . . . . | 8,88 |
| Calce . . . . . | 15,38 |
| Magnesia . . . . . | 10,42 |
| Ossido di potassio. . . . . | 3,21 |
| Ossido di sodio. . . . . | 1,49 |
| | 98,77 . |

Torino — Laboratorio Chimico della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, 1884.

Il Socio Cav. Prof. A. NACCARI presenta e legge la seguente Nota del sig. Angelo BATTELLI,

SUI

# SISTEMI CATOTTRICI

## CENTRATI.

Ci proponiamo in questa nota di dare la teoria completa della riflessione sopra un numero qualunque di superficie sferiche nell'ipotesi che queste abbiano i loro centri sopra una stessa linea retta e che gli angoli che i raggi incidenti formano con questa retta siano piccolissimi. Questa trattazione è una conseguenza della teoria degli istrumenti diottrici fondata rigorosamente da GAUSS e perfezionata successivamente da LISTING e da altri.

Il MARTIN ne ha fatto un cenno nella sua Memoria: *Interprétation géométrique et continuation de la théorie de lentilles de* GAUSS (*); e il CROULLEBOIS, con metodo geometrico, ha studiata la riflessione sopra due specchi sferici, ma non in modo completo (**). Noi, per avere risultati applicabili ad ogni caso particolare, abbiam ricorso al metodo analitico, giudicandolo il più conveniente.

## I.

Diremo sistema centrato di mezzi riflettenti, o *sistema catottrico centrato* una serie di superficie sferiche riflettenti, che hanno tutte il centro sulla medesima retta, chiamata asse centrale, o semplicemente asse del sistema.

(*) N. MARTIN, *Annales de Chim. et de Phys.*, 4ª S., T. X.
(**) CROULLEBOIS, *Annales de Chim. et de Phys.*, 5ª S., T. XIX.

Sceglieremo l'asse medesimo del sistema per asse delle $x$, e conteremo le ascisse positive nel senso in cui si propaga la luce.

Diremo *prima* superficie riflettente, quella che prima viene incontrata dal raggio incidente; *ultima* superficie, quella da cui esce l'ultimo raggio riflesso.

Chiameremo *vertici* le intersezioni delle superficie coll'asse. Ciò posto, sappiamo dalla teoria di Gauss, che nel caso di soli due mezzi, i cui indici assoluti di rifrazione siano $n$ ed $n'$, se la retta d'incidenza è rappresentata da

$$y = \frac{\beta}{n}(x - N) + b$$

$$z = \frac{\gamma}{n}(x - N) + c$$

essendo $N$ l'ascissa del vertice della superficie dividente i due mezzi, il raggio rifratto sarà dato da

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - N) + b' ,$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - N) + c' ,$$

dove

$$b' = b \; ; \qquad c' = c$$

$$\beta' = \beta + \frac{n - n'}{r} \; ; \qquad \gamma' = \gamma + \frac{n - n'}{r} c \; .$$

Nel caso della riflessione si ha un solo mezzo, e però la retta emergente di cui sopra abbiam dato le equazioni, ci rappresenterà il raggio riflesso, quando si faccia $n' = -n$; e ponendo per semplicità $n = 1$, si avrà per la retta incidente

$$\left.\begin{aligned} y &= \beta(x - N) + b \\ z &= \gamma(x - N) + c \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(1).$$

E per la retta di riflessione

$$\left.\begin{aligned} y &= -\beta'(x - N) + b' \\ z &= -\gamma'(x - N) + c' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(1') ;$$

dove si ha, per ciò che è detto innanzi,

$$\left.\begin{array}{ll} b'=b\ ; & c'=c \\ \beta'=\beta+\dfrac{2}{r}b\ ; & \gamma'=\gamma+\dfrac{2}{r}c \end{array}\right\}(*) \quad \ldots\ldots(2).$$

*Caso d'un sistema catottrico qualunque.* — Siano $\mu$ superficie riflettenti, e si chiamino

$N^0 \quad N' \quad N'' \ldots\ldots\ldots N^*$ i vertici

$M^0 \quad M' \quad M'' \ldots\ldots\ldots M^*$ i centri

delle medesime.

Gli indici di riflessione saranno alternativamente $\underline{1}$ e $\underline{-1}$.

Le equazioni del raggio riflesso potranno scriversi:

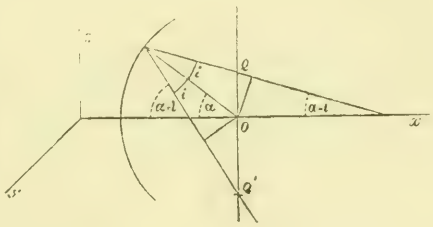
$$y=-\beta'(x-N')+b^0-\beta'(N'-N^0)$$
$$z=-\gamma'(x-N')+c^0-\gamma'(N'-N^0)$$

e posto

$$b'=b^0-\beta'(N'-N^0)$$
$$c'=c^0-\gamma'(N'-N^0)$$

---

(*) Queste eguaglianze si possono anche dimostrare direttamente. Si conduca da $\underline{O}$ (centro della superficie) un piano normale all'asse del sistema, che incontri il raggio incidente in $\underline{Q}$ e il riflesso in $\underline{Q'}$; e da $\underline{O}$ si tirino le perpendicolari ai due raggi stessi. Si ha




$$\frac{OQ'}{OQ}=\frac{\cos(\alpha-i)}{\cos(\alpha+i)}\ .$$

Ora nei punti $\underline{Q}$ e $\underline{Q'}$ le coordinate $\underline{y}$ e $\underline{z}$ debbono stare nel rapporto di $\underline{OQ}$ ad $\underline{OQ'}$; e inoltre nel punto $\underline{Q}$ si ha

$$y=\beta r+b\ ; \qquad z=\gamma r+c$$

e nel punto $\underline{Q'}$ $\qquad y'=-\beta' r+b'\ ; \qquad z'=-\gamma' r+c'\ .$

Onde si avrà

$$b'-\beta' r=-\frac{\cos(\alpha-i)}{\cos(\alpha+i)}(b+\beta r)$$

$$c'-\gamma' r=-\frac{\cos(\alpha-i)}{\cos(\alpha+i)}(c+\gamma r)$$

e sviluppando i coseni in serie, e trascurando infinitesimi di 3° ordine, si ottiene

$$\beta'=\beta+\frac{2}{r}b\ ; \qquad \gamma'=\gamma+\frac{2}{r}c\ .$$

saranno
$$\left.\begin{aligned} y &= -\beta'(x-N') + b' \\ z &= -\gamma'(x-N') + c' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(3).$$

Dopo una seconda riflessione diventeranno

$$\begin{aligned} y &= \beta''(x-N'') + b'' \\ z &= \gamma''(x-N'') + c'' \ . \end{aligned}$$

E dopo $\mu$ riflessioni

$$\begin{aligned} y &= \pm\beta^*(x-N^*) + b^* \\ z &= \pm\gamma^*(x-N^*) + c^* \ . \end{aligned}$$

Evidentemente si dovrà ritenere il segno $(+)$ o il segno $(-)$, secondochè il numero delle superficie è pari o dispari.

Ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned} &u^\circ = \frac{2}{r^\circ}, \qquad u' = -\frac{2}{r'}, \qquad u'' = \frac{2}{r''} \ldots u^* = \pm\frac{2}{r^\mu} \\ &t' = -(N'-N^\circ),\ t'' = N''-N') \ldots\ldots\ldots\ldots t^* = \pm(N^\mu - N^{\mu-1}) \end{aligned}\right\} (4),$$

si avrà
$$\left.\begin{aligned} \beta' &= \beta^\circ + u^\circ b^\circ \\ b' &= b^\circ + t'\beta' \\ \beta'' &= \beta' + u' b' \\ b'' &= b' + t''\beta'' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots(5); \qquad \left.\begin{aligned} \gamma' &= \gamma^\circ + u^\circ b^\circ \\ c' &= c^\circ + t'\gamma' \\ \gamma'' &= \gamma' + u' c' \\ c'' &= c' + t''\gamma'' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots(5').$$
ecc.

Per esprimere $\beta^*$ e $b^*$ in funzione di $\beta^\circ$ e $b^\circ$, basta risolvere il sistema delle equazioni (5), di cui le incognite sono $\beta'$, $b'$; $\beta''$, $b''$.....

Allora, se si pone

$$k = \begin{vmatrix} u^\circ & -1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & u' & -1 \ldots\ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots t^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 & u^* \end{vmatrix}$$

e di più

$$l=\frac{dk}{du^\circ}, \quad g=\frac{dk}{du^*}, \quad h=\frac{dl}{du^*}=\frac{dg}{du^\circ}=\frac{d^2k}{du^\circ\, du^*},$$

si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \beta^* &= k\,b^\circ + l\,\beta^\circ \\ b^* &= g\,b^\circ + h\,\beta^\circ. \\ \text{E allo stesso modo si avrebbe} & \\ \gamma^* &= k\,c^\circ + l\,\gamma^\circ \\ c^* &= g\,c^\circ + h\,\gamma^\circ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(6).$$

E inversamente, poichè tra un determinante della forma del determinante $k$, e i suoi *derivati* $l$, $g$, $h$ (*) sussiste la relazione

$$g\,l - h\,k = 1 \qquad \ldots\ldots(a)\ (^{**})$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} -\beta^\circ &= k\,b^* - g\,\beta^* \\ b^\circ &= l\,b^* - h\,\beta^* \\ -\gamma^\circ &= k\,c^* - g\,\gamma^* \\ c^\circ &= l\,c^* - h\,\gamma^* \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(6').$$

La condizione $(a)$ insieme a quella che i determinanti non si alterano invertendo le orizzontali con le verticali, mostrano che un raggio di luce che abbia fatto un determinato cammino nelle successive riflessioni, percorrerebbe la medesima via se l'ultima retta di riflessione diventasse retta d'incidenza.

## II.

### *Punti coniugati.*

Nella teoria della rifrazione si ha che ad un punto $P$ di coordinate $\xi$, $\eta$, $\zeta$, corrisponde dopo la rifrazione un altro

---

(*) I determinanti $l$, $g$, $h$, che si ottengono da $k$ con una semplice differenziazione, sono stati chiamati *derivati* di $k$ dal Prof. N. Jadanza.

(**) Vedi la Nota di N. Jadanza, *Sopra un determinante gobbo* ecc.; Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XVII.

punto $P^*$ di coordinate

$$\xi^* = N^* - \frac{n^\circ h - g(\xi - N^\circ)}{n^\circ l - k(\xi - N^\circ)} n^*$$

$$\eta^* = \frac{n^\circ \eta}{n^\circ l - k(\xi - N^\circ)} \qquad \zeta^* = \frac{n^\circ \zeta}{n^\circ l - k(\xi - N^\circ)}$$

le quali, nel caso della riflessione, diventano

$$\left.\begin{aligned} \xi^* &= N^* \mp \frac{h - g(\xi - N^\circ)}{l - k(\xi - N^\circ)} \\ \eta^* &= \frac{\eta}{l - k(\xi - N^\circ)} \qquad \zeta^* = \frac{\zeta}{l - k(\xi - N^\circ)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7).$$

Siccome $\xi^*$, $\eta^*$, $\zeta^*$, dipendono solo da $\xi$, $\eta$, $\zeta$, ne viene che $P^*$ rimarrà lo stesso per tutte le rette passanti per $P$, ossia $P^*$ sarà comune a tutte le rette di riflessione che corrispondono alle rette passanti per $P$.

E siccome i rapporti $\frac{\eta^*}{\eta}$, $\frac{\zeta^*}{\zeta}$ sono costanti, i punti $P$ e $P^*$ saranno nell'istesso piano coll'asse del sistema: e di più a un sistema di punti $P$ giacenti su di un piano perpendicolare all'asse, corrisponde un sistema di punti $P^*$ situati pure in un piano perpendicolare all'asse.

I due punti $P$ e $P^*$ sono detti *coniugati*.

## III.

### *Punti cardinali.*

Se si riferiscono i due raggi estremi, anzichè ai vertici $N^\circ$ ed $N^*$, a due punti arbitrari $E$ ed $E^*$ pure situati sull'asse delle $x$, e si determinano poi $E$ ed $E^*$ in guisa che l'intero sistema agisca come nel caso d'una sola superficie, si è trovato nel caso della rifrazione

$$E = N^\circ - n^\circ \frac{1 - l}{k}$$

$$E^* = N^* + n^* \frac{1 - g}{k},$$

le quali per la riflessione diventano

$$\left.\begin{aligned} E &= N^{\circ} - \frac{1-l}{k} \\ E^{*} &= N^{*} + \frac{1-g}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8).$$

Ponendo $x = E$, $x = E^{*}$ rispettivamente nella retta d'incidenza e di riflessione, si ottengono gli stessi valori $y$ e $z$: quindi il punto d'intersezione del raggio incidente col piano $x = E$; e del raggio emergente con $x = E^{*}$, giacciono su d'una retta parallela all'asse del sistema: di più questi due piani sono evidentemente coniugati, onde le due immagini che su essi si formano sono uguali. I punti $E$ ed $E^{*}$ li diremo *punti principali* del sistema; ed i piani $x = E$, $x = E^{*}$ *piani principali*.

Se poi si vogliono riferire i due raggi estremi a due punti $F$ ed $F^{*}$ tali, che alle rette d'incidenza parallele all'asse delle $x$ corrispondano rette di riflessione passanti per $F^{*}$, e a rette incidenti passanti per $F$ corrispondano rette di riflessione parallele all'asse delle $x$, ricordiamo che nel caso analogo per la rifrazione si è ottenuto

$$F = N^{\circ} + \frac{n^{\circ}}{k} l \,, \qquad F^{*} = N^{*} - \frac{n^{*}}{k} g \,,$$

onde nel nostro caso si avrà

$$\left.\begin{aligned} F &= N^{\circ} + \frac{l}{k} \\ F^{*} &= N^{*} \mp \frac{g}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9).$$

I punti $F$ ed $F^{*}$ li diremo *fuochi principali*, e i piani condotti per essi normalmente all'asse *piani focali principali*.

Se poi si vogliono riferire le due rette d'incidenza e di riflessione a due punti $\Omega$ ed $\Omega^{*}$, in modo che ad una retta incidente passante pel primo, corrisponda una retta di riflessione parallela passante pel secondo, basta osservare che per la rifrazione si è trovato nel caso analogo

$$\Omega = N^{\circ} + \frac{n^{\circ} l}{k} - \frac{n^{*}}{k}$$

$$\Omega^{*} = N^{*} - \frac{n^{*} g}{k} + \frac{n^{\circ}}{k} \,,$$

le quali nel nostro caso diventano

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= N^\circ \mp \frac{1 \mp l}{k} \\ \Omega^* &= N^* + \frac{1 \mp g}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(10).$$

I punti $\Omega$ e $\Omega^*$ li chiameremo *punti nodali;* e possiamo subito stabilire che i punti nodali coincideranno, o non, coi punti principali, secondochè il numero delle superficie è pari o dispari.

Ora le ascisse dei punti principali si possono scrivere nella seguente maniera:

$$E = F - \frac{1}{k}, \qquad E^* = F^* \pm \frac{1}{k}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} FE &= -\frac{1}{k} = \varphi \\ E^* F^* &= \mp \frac{1}{k} = \varphi^* \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(11).$$

Chiameremo $\varphi$ e $\varphi^*$ rispettivamente *prima* e *seconda distanza focale principale*. E si deduce subito che nel caso della riflessione le distanze focali principali saranno sempre uguali, e del medesimo segno o di segno contrario, secondochè il numero delle superficie riflettenti è pari o dispari. Ad ogni modo si ha sempre

$$F\Omega = \varphi^*, \qquad \Omega^* F^* = \varphi$$

$$E\Omega = E^*\Omega^* = \varphi^* - \varphi, \qquad E E^* = \Omega\Omega^*.$$

Se ora nelle coordinate del punto coniugato al punto $(\xi\, \eta\, \zeta)$ si sostituiscono ad $N^\circ$ ed $N^*$ i loro valori espressi in funzione di $E$ ed $E^*$ ricavati dalle (8), si ha

$$\left.\begin{aligned} \xi^* &= E^* + \frac{E - \xi}{1 + k(E - \xi)} \\ \eta^* &= \frac{\eta}{1 + k(E - \xi)}, \qquad \zeta^* = \frac{\zeta}{1 + k(E - \xi)} \end{aligned}\right\} \ldots(12).$$

E se ad $E$ ed $E^*$ si sostituiscono i loro valori in funzione di $F$ ed $F^*$,

$$\left.\begin{aligned} \xi^* &= F^* \pm \frac{1}{k^2(F-\xi)} \\ \eta^* &= \frac{\eta}{k(F-\xi)}\,, \qquad \zeta^* = \frac{\zeta}{k(F-\xi)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(13).$$

La prima delle (12) si può anche scrivere

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\xi^*-E^*} \pm \frac{1}{E-\xi} = -k \\ \text{e la prima delle (13)} \\ &(\xi^*-F^*)(F-\xi) = \varphi\,\varphi^* \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(14).$$

## IV.

*Riflessione sopra una superficie.*

Applichiamo le regole generali trovate ad alcuni casi speciali, e prima al caso di un solo specchio.

Vediamo anzitutto come sono collocati fra loro due punti coniugati. Qui evidentemente

$$k = u^\circ\,, \qquad l = 1\,, \qquad h = 0\,, \qquad g = 1\,.$$

Onde l'ultima delle (7) ci dà:

$$\xi^* - N = -\frac{\xi - N}{1 - \frac{2}{r}(\xi - N)}$$

e facendo, per semplicità,

$$\xi - N = p\ ; \qquad \xi^* - N = q$$

si ha

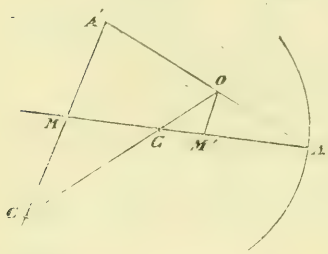
$$q = -\frac{p}{1 - \frac{2}{r}p}$$

da cui

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} \qquad \ldots\ldots(15).$$

Questo ci dice che *la distanza di due punti coniugati è divisa armonicamente dallo specchio e dal suo centro di curvatura.*

Fig. 1




Onde, per avere il coniugato d'un punto qualunque $M$, basta condurre la retta $CM$, che congiunge $M$ col centro, e per $M$ una retta arbitraria su cui si prendono due segmenti $MA'$, $MC'$ uguali; poi si conducono $AA'$, $CC'$, e dal loro incontro $O$ si tira la parallela alla $C'A'$; il punto $M'$ sarà il coniugato di $M$.

Vediamo quali siano i punti cardinali nello stesso caso d'un solo specchio. Siccome

$$l = g = 1 \ ,$$

i punti principali coincideranno col vertice dello specchio, e i fuochi saranno dati da

$$F = N + \frac{1}{u^0} \ , \qquad F^* = N + \frac{1}{u^0}$$

ossia

$$NF = NF^* = \pm \frac{r}{2} \ .$$

Avremo il segno (+) per uno specchio convesso e il segno (−) per uno specchio concavo.

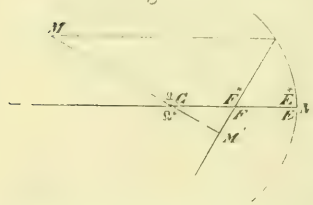
E si deduce quindi che i *due fuochi coincidono nel punto medio del raggio dello specchio.*

I punti nodali, trattandosi di una sola superficie, non coincideranno coi punti principali, ed applicando le formole (10) al nostro caso otterremo

$$\Omega = \Omega^* = N \pm r \ .$$

Ossia, *i due punti nodali coincidono sempre col centro della superficie riflettente.*

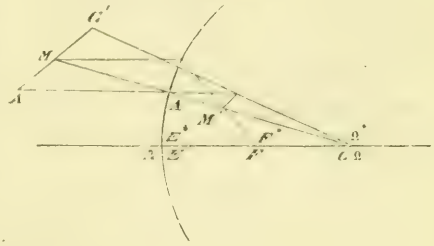
Fig. 2




Di qui un altro mezzo semplice di trovare il coniugato di un punto qualunque $M$. Si conduca per esso il raggio parallelo all'asse; questo si rifletterà passando per $F$; si conduca un altro raggio incidente che passi per $C$; in tal punto coincidendo i due punti nodali, l'immagine di $M$, dovrà trovarsi sul prolungamento di $CM$, ossia sarà in $M'$.

Le costruzioni si son fatte per lo specchio concavo, ma le stesse regole valendo per lo specchio convesso, è evidente che nell'identica maniera si troverà l'immagine di un punto $M$ nel caso dello specchio convesso, tanto colla prima quanto colla seconda costruzione (fig. 3).

Fig. 3



Se lo specchio fosse piano, allora sarebbe $r = \infty$, e la formola (15) ci dà immediatamente

$$p = -q \; ;$$

ossia, le due immagini sono simmetriche rispetto allo specchio.

Per trovare la relazione fra l'oggetto e l'immagine avuta dalla riflessione sopra uno specchio, si osservi che dalle formole (7), immediatamente risulta essere i rapporti $\frac{\eta}{\eta^*}$ e $\frac{\zeta}{\zeta^*}$ uguali ad una medesima costante. È chiaro inoltre che questo rapporto rappresenta appunto il rapporto frà l'oggetto e l'immagine.

Ora dalle (13) avremo

$$\frac{\eta}{\eta^*} = \frac{\xi - F}{\varphi} = \frac{0}{I} \; .$$

Ponendo per brevità

$$E - \xi = p \; ,$$

si ottiene

$$0 = \frac{\varphi - p}{\varphi} I \qquad \ldots\ldots (16).$$

Se il tratto $\frac{\varphi - p}{\varphi}$ è positivo, l'immagine sarà diritta; se è negativo, sarà capovolta.

Sostituendo a $\varphi$ il suo valore $\varphi = \pm \frac{r}{2}$, avremo

$$0 = \frac{r \mp 2p}{r} I \; .$$

## V.

*Riflessione sopra due superficie.*

Passiamo ad un sistema catottrico centrato composto di due sole superficie riflettenti.

Possiamo senz'altro stabilire le leggi seguenti:

1° Le distanze focali sono uguali e dello stesso segno.

2° I punti nodali coincidono coi principali, e quindi i punti cardinali si riducono a quattro.

Per trovare questi punti cardinali formiamo il determinante $k$ relativo al presente caso:

$$k = \begin{vmatrix} u^0 & -1 & 0 \\ 1 & t' & -1 \\ 0 & 1 & u' \end{vmatrix}$$

dove ricordiamo che

$$u^0 = \frac{2}{r_1}, \qquad u' = \frac{2}{r_2}, \qquad t' = -(N' - N^0)$$

Sviluppando, si ottiene

$$k = u^0 u' t' + u^0 + u' .$$

E i determinanti derivati risultano

$$l = u' t' + 1 , \qquad g = u^0 t + 1$$
$$h = t' .$$

Chiamando $\Delta$ la distanza fra i due vertici

$$\Delta = N^0 - N' ,$$

si otterrà

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{4}{r_1 r_2}\Delta + \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} = \frac{2}{r_1 r_2}(r_2 - r_1 - 2\Delta) \\ l &= 1 - 2\frac{\Delta}{r_2} \qquad g = 1 + 2\frac{\Delta}{r_1} \\ h &= \Delta \end{aligned}\right\} \ldots (17).$$

Perciò la distanza focale sarà data da

$$\varphi = -\frac{1}{k} = -\frac{r_1 r_2}{2(r_2 - r_1 - 2\Delta)} \qquad \ldots\ldots(18).$$

Per le espressioni precedenti sarà

$$\frac{1-l}{k} = \frac{\Delta r_1}{r_2 - r_1 - 2\Delta}$$

$$\frac{1-g}{k} = -\frac{\Delta r_2}{r_2 - r_1 - 2\Delta}.$$

E sostituendo nelle formole (8)

$$\left.\begin{aligned} E &= N^0 - \frac{\Delta r_1}{r_2 - r_1 - 2\Delta} \\ E^* &= N^* - \frac{\Delta r_2}{r_2 - r_1 - 2\Delta} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(19).$$

E quindi i tratti $N^0 E$, $E^* N^*$ saranno espressi da

$$\left.\begin{aligned} N^0 E &= -\frac{\Delta r_1}{r_2 - r_1 - 2\Delta} \\ E^* N^* &= \frac{\Delta r_2}{r_2 - r_2 - 2\Delta} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(20).$$

Le formole trovate si riferiscono al caso generale di due superficie sferiche coi centri sul medesimo asse, ma disposte comunque. Ora veniamo a trattare i varii casi in particolare.

**1°** Supponiamo che i due specchi si rivolgano la faccia concava.

È chiaro che i raggi delle superficie sferiche dovranno essere contati sempre positivamente nella direzione della luce incidente. Onde, nel nostro caso, il raggio della prima superficie è negativo, quello della seconda è positivo, e quindi otterremo le formole relative al presente caso cangiando il segno ad $r_1$, ossia avremo:

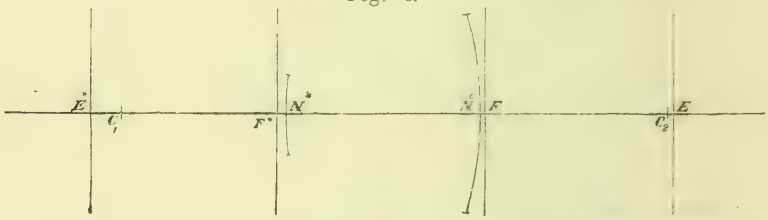
$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2 - 2\Delta)} \qquad \ldots\ldots(21).$$

$$\left.\begin{aligned} N^\circ E &= \frac{\Delta r_1}{r_1 + r_2 - 2\Delta} \\ E^* N^* &= \frac{\Delta r_2}{r_1 + r_2 - 2\Delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (22).$$

Diremo pertanto, che un sistema centrato di due specchi sferici sarà *convergente* o *divergente*, secondochè la distanza focale è *positiva* o *negativa*.

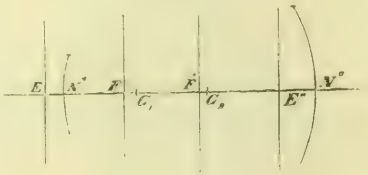
Perciò il presente sistema funzionerà come convergente o divergente, secondochè la somma dei due raggi è maggiore o minore di $2\Delta$. Nel primo caso risulta senz'altro dalle formole (22) che i punti principali sono sempre esterni al sistema (fig. 4).

Fig. 4.




Nel secondo caso (fig. 5), le formole (22) ci dicono che il primo punto principale sarà esterno od interno al sistema o coinciderà col vertice, secondochè $\frac{r_1}{r_1 + r_2 - 2\Delta}$ è maggiore, minore od uguale ad $1$, ovvero, secondochè $r_2$ è minore, maggiore od uguale a $2\Delta$; e parimente il secondo punto principale sarà esterno od interno, o coincidente col vertice, secondochè $r_1$ è minore, maggiore od uguale a $2\Delta$.

Fig. 5.




Nel caso più particolare ancora che le due superficie sferiche appartengano ad una medesima sfera, si avrà

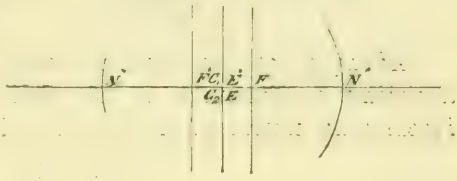
$$\Delta = 2r$$

e allora

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{r}{4} \\ N^\circ E &= E^* N^* = -r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23).$$

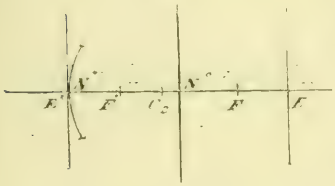
Ossia, i due punti principali coincideranno col centro comune alle due superficie, e i due fuochi saranno pure interni ad una distanza dal centro medesimo uguale alla quarta parte del raggio, come si vede nella fig. 6.

Fig. 6.



Possiamo poi supporre che uno dei due specchi sia piano, e si avranno evidentemente due casi: le formole relative si otterranno dalle (21) e (22) ponendo una volta $r_1 = \infty$, un'altra $r_2 = \infty$.

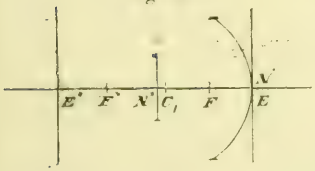
Fig. 7



1° *Caso*, $r_1 = \infty$, si avrà (fig. 7)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{r}{2} \\ N^\circ E = \Delta, \quad E^* N^* = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (24)$$

Fig. 8



2° *Caso*, $r_2 = \infty$, si ha (fig. 8)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{r}{2} \\ N^\circ E = 0, \quad E^* N^* = \Delta \end{array}\right\} \quad \ldots (24')$$

Adunque, se si ha un sistema di due specchi uno piano e l'altro sferico colla concavità rivolta verso il primo, tale sistema gode delle seguenti proprietà:

1° Esso è sempre convergente.

2° Uno dei punti principali coincide sempre col vertice della superficie sferica, l'altro è interno al sistema dalla parte della superficie piana e distante dalla medesima d'una lunghezza uguale a $\Delta$.

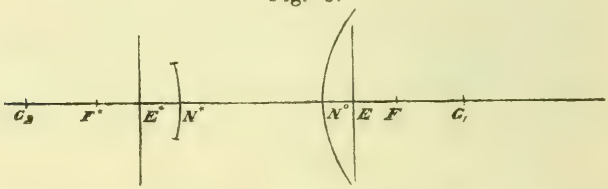
**2** Supponiamo adesso di avere due specchi sferici che si rivolgano le facce convesse.

Allora il raggio $r_2$ della seconda superficie sarà negativo: perciò le formole (18) e (20) ci daranno:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = -\dfrac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2 + 2\Delta)} \\ N^\circ E = \dfrac{\Delta r_1}{r_1 + r_2 + 2\Delta} \qquad E^* N^* = \dfrac{\Delta r_2}{r_1 + r_2 + 2\Delta} \end{array}\right\} \ldots (25).$$

Adunque, se due specchi centrati si volgono la convessità, il sistema è divergente; i due punti principali come pure i due fuochi sono esterni al sistema medesimo, come appare in figura

Fig. 9.




Supponiamo anche qui che una delle due superficie diventi piana. Avremo allora due casi:

1° *Caso*, $r_1 = \infty$, darà (fig. 10)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = -\dfrac{r_2}{2} \\ N^\circ E = \Delta \ , \qquad E^* N^* = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (26).$$

2° *Caso*, $r_2 = \infty$, darà (fig. 11)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = -\dfrac{r_1}{2} \\ N^\circ E = 0 \ , \qquad E^* N^* = \Delta \end{array}\right\} \ldots\ldots (26').$$

Fig. 10

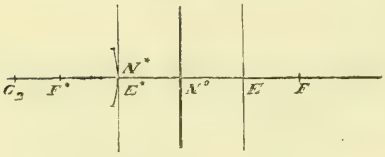



Fig. 11

Si conclude:

1° Che un sistema di due specchi, uno piano e l'altro sferico, che volga al primo la sua convessità, è sempre divergente.

2° Che in tal sistema uno dei punti principali coincide col vertice della superficie sferica, l'altro è esterno a una distanza $\Delta$ dalla superficie piana.

**3°** Supponiamo infine che i due specchi volgano la concavità verso la medesima parte, ovvero uno sia concavo e l'altro convesso. Si avranno evidentemente due casi: o ambedue i raggi saranno positivi, o ambedue negativi.

1° *Caso*, $r_1$, $r_2$ positivi — Per il presente caso valgono evidentemente le formole (18) e (20), le quali possono anche scriversi

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{r_1 r_2}{2(r_1 - r_2 + 2\Delta)} \\ N^\circ E = \dfrac{\Delta r_1}{r_1 - r_2 + 2\Delta}, \quad E^* N^* = -\dfrac{\Delta r_2}{r_1 - r_2 + 2\Delta} \end{array}\right\} \quad (27).$$

Si vede immediatamente che la distanza focale sarà positiva, quando si avrà

$$r_1 > r_2 + 2\Delta .$$

Cioè, il sistema sarà convergente quando il raggio di curvatura della prima superficie è maggiore della differenza fra il raggio della seconda e la quantità $2\Delta$.

E allora il primo punto principale sarà sempre esterno al sistema; il secondo sarà esterno, od interno o coincidente col vertice della superficie convessa, secondochè la frazione

$$\frac{r_2}{r_1 - r_2 + 2\Delta}$$

è maggiore, o minore, o uguale all'unità; ovvero, secondochè $r_1$ è minore o maggiore, o uguale a $2(r_2 - \Delta)$; come si scorge dalle (fig. 12), (fig. 13) e (fig. 14)

Fig. 12

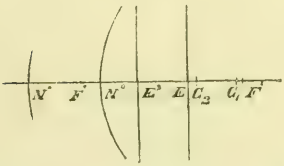



Fig. 13

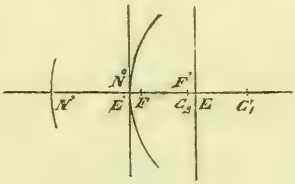
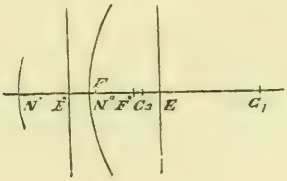



Fig. 14



2° *Caso*, $r_1$, $r_2$ negativi $\div$

Allora le formole (27) diventano

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{r_1 r_2}{2(r_2 - r_1 + 2\Delta)} \\ N^\circ E &= -\frac{\Delta r_1}{r_2 - r_1 + 2\Delta}, \quad E^* N^* = \frac{\Delta r_2}{r_2 - r_1 + 2\Delta} \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Si avrà $\varphi$ positiva, quando sarà

$$r_2 > r_1 - 2\Delta .$$

Onde, il sistema sarà convergente quando il raggio di curvatura della seconda superficie è maggiore della differenza fra quello della prima e la quantità $2\Delta$. E allora il secondo punto principale sarà sempre esterno, il primo punto principale sarà esterno od interno o coincidente col vertice della superficie convessa, secondochè $r_2$ è minore, o maggiore od uguale a $2(r_1 - \Delta)$, come si scorge dalle figure (15), (16) e (17)

Fig. 15

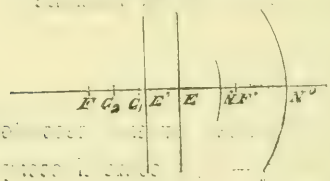



Fig. 16

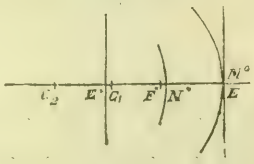
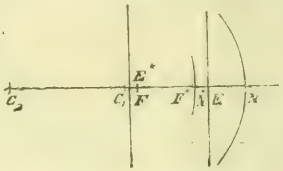



Fig. 17




Di qui concluderemo, che se due specchi sferici centrati sono disposti in modo che sian di fronte la faccia concava dell'uno alla faccia convessa dell'altro, il sistema sarà *convergente*, se il raggio dello specchio convesso è maggiore dell'eccesso del raggio dello specchio concavo sulla doppia distanza fra i due specchi medesimi.

In tal caso un punto principale sarà sempre esterno dalla parte della faccia convessa, l'altro sarà esterno dalla medesima parte, se il raggio dello specchio convesso è minore della doppia

distanza fra il vertice dello specchio medesimo al centro dello specchio concavo; se è uguale, il punto principale coincide col vertice dello specchio convesso; se è maggiore, sarà interno al sistema.

In particolare, se le due superficie avessero il medesimo centro, si avrebbe, pei raggi positivi,

$$r_1 - r_2 = -\Delta$$

e pei raggi negativi,

$$r_2 - r_1 = -\Delta$$

quindi in ogni caso

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{2\Delta} \qquad \ldots\ldots(29).$$

E nel caso dei raggi positivi (fig. 18)

$$\left.\begin{aligned} N^\circ E &= \phantom{-}r_1 \\ N^* E^* &= -r_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(29').$$

E nel caso dei raggi negativi (fig. 19)

$$\left.\begin{aligned} N^\circ E &= -r_1 \\ E^* N^* &= \phantom{-}r_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(29'').$$

Fig. 18

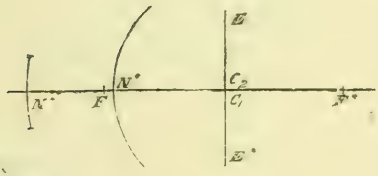
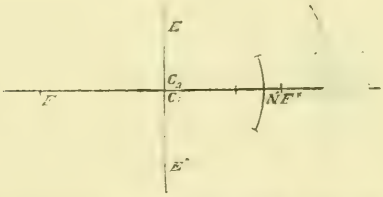



Fig. 19




p
La

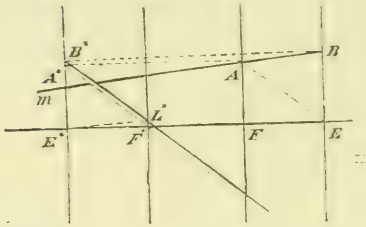
Onde il sistema di due specchi sferici colla concavità rivolta dalla medesima parte e aventi il medesimo centro, funziona da sistema convergente e i punti principali coincidono ambedue col centro comune alle due superficie.

Ora che abbiam visto come si possano trovare con massima facilità i punti cardinali d'un sistema centrato qualunque di due specchi, passiamo a vedere come si possa costruire graficamente l'immagine di un oggetto.

E cominciamo da un sistema convergente, nel quale i punti cardinali sono disposti come si vede nella figura (20), ricordando sempre che i punti nodali coincidono coi principali.

Sia $m$ una retta incidente; conducendo da $B$ una parallela all'asse, si avrà in $B^*$ il coniugato di $B$, talchè la retta d'emergenza dovrà passare per $B^*$. Ora tutte, le rette che passano pel punto $A$ del piano focale, emergeranno parallele; e se per $A$ conduciamo precisamente la $AM$ parallela all'asse, essa emergerà passando per $F^*$, perciò la emergente della $AB$ sarà $B^*L^*$ parallela alla $MF^*$.

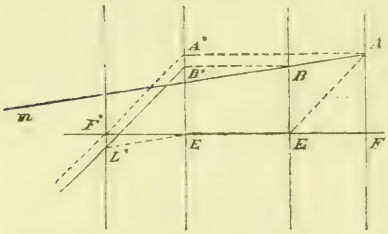
Fig. 20




Si può usare un'altra costruzione più semplice. Se si congiunge $A$ con $E$ (primo punto nodale), la retta d'emergenza deve essere la $B^*L^*$ parallela alla $AE$.

Si può ricorrere da ultimo a una terza costruzione. Infatti, tutte le rette parallele emergono passando per uno stesso punto del secondo piano focale; perciò, se per $E^*$ (secondo punto nodale) si tira la $E^*L^*$ parallela alla $AB$, la $B^*L^*$ sarà il raggio emergente che corrisponde ad $AB$.

Fig. 21




Nel caso d'un sistema divergente (fig. 21), si otterrà per retta d'emergenza della $m$, la $B^*L^*$, usando qualunque dei tre metodi sopra indicati.

## VI.

Finalmente, applichiamo le relazioni trovate agli strumenti a riflessione conosciuti coi nomi di *telescopio* di Newton, *telescopio* di Grégori e *telescopio* di Cassegrain.

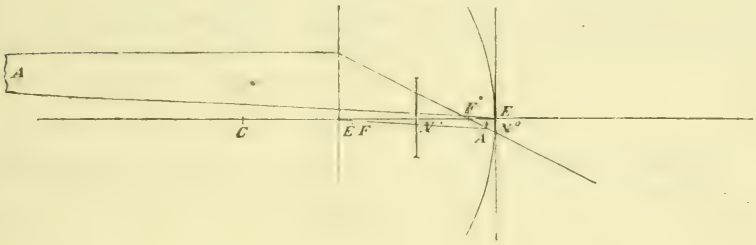
Telescopio di Newton. — Tale strumento si compone di due specchi, l'uno concavo e l'altro piano; collocati in modo che la loro distanza è minore della distanza focale dello specchio concavo.

Ora, sapendo che in uno specchio concavo il fuoco è a metà del raggio, la condizione precedente si potrà scrivere

$$\Delta < \frac{1}{2} r_1 .$$

Allora, ricorrendo alle formole (24'), che valgono precisamente per un sistema uguale a quello del telescopio di Newton, noi potremo avere immediatamente i punti cardinali; e trovare quindi, secondo i metodi sopra indicati, l'immagine dell'oggetto $\overline{AB}$, il quale si suppone collocato a grandissima distanza (fig. 22)

Fig. 22




Per trovare anche l'ingrandimento del telescopio, ricorriamo alla relazione (16), nella quale sostituendo a $\varphi$ il suo valore $\frac{r}{2}$, si avrà

$$O = \left(1 - \frac{2p}{r}\right) I \qquad \ldots\ldots (30).$$

Ora $p$ è molto grande, essendo l'oggetto lontanissimo, perciò l'immagine sarà *capovolta*.

Telescopio di Grégori. — Il telescopio di Grégori è composto di due specchi sferici centrati, che si rivolgono la concavità. La somma delle loro lunghezze focali è minore della distanza dei due vertici, il che sarà espresso dalla relazione

$$\frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 < \Delta ,$$

ossia

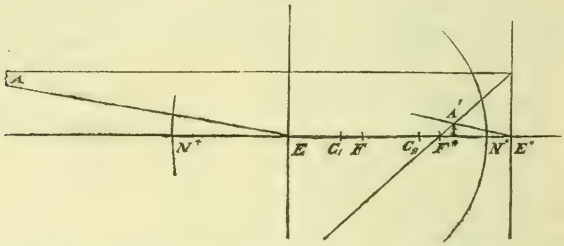
$$r_1 + r_2 < \Delta .$$

Per la condizione espressa dalla formola (21), che si riferisce a un sistema di questa specie, il telescopio di Grégori è divergente.

E la stessa formola (21) insieme alle (22) ci dà il mezzo

di trovare subito i punti e i fuochi principali, non avendo che a trovare delle quarte proporzionali a tre lunghezze date (fig. 23)

Fig. 23




Applicando la formola (16), si avrà fra l'oggetto e l'immagine la relazione

$$O = \left(1 + \frac{2\alpha p}{r_1 r_2}\right) I \qquad \ldots\ldots (31),$$

rappresentando con $\alpha$ la distanza $2\Delta - (r_1 + r_2)$, la quale è positiva, perciò l'immagine sarà diritta.

Telescopio di Cassegrain. — Questo telescopio differisce da quello di Grégori nel secondo specchio, che è convesso invece di essere concavo.

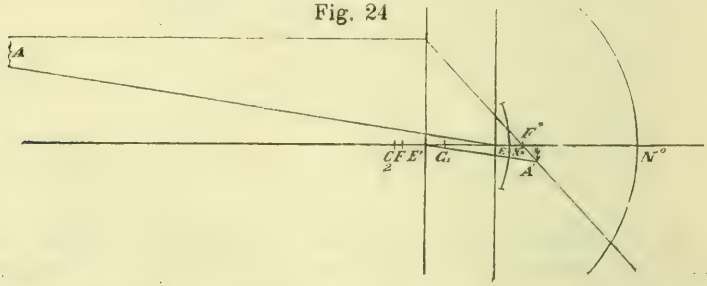
Il fuoco dello specchio convesso è a sinistra di quello dello specchio concavo, ossia avremo

$$\frac{1}{2} r_2 > \frac{1}{2} r_1 - \Delta$$

$$r_2 > r_1 - 2\Delta \ .$$

Questa è appunto la condizione che noi abbiamo trovata, affinchè il sistema di due specchi colla concavità rivolta dalla stessa parte

Fig. 24




sia convergente. È adunque dimostrato che il telescopio di Cassegrain è convergente.

I punti cardinali ci saranno dati dalle formole (28), e saranno situati come nella fig. 24.

Dalla formola (16) si ottiene immediatamente

$$O = \left(1 - \frac{2\alpha' p}{r_1 r_2}\right) I \qquad \ldots\ldots (32).$$

rappresentando con $\alpha'$ la quantità $r_2 - r_1 + 2\Delta$, che è positiva.

Essendo l'oggetto lontanissimo, risulta che il telescopio di Cassegrain *rovescia* l'immagine.

Torino, Febbraio 1884.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, in continuazione delle precedenti, le temperature (dal 1° Aprile) dell'anno passato, di ora in ora, ed i tempi delle temperature massima e minima in tutto l'anno; che l'Assistente Prof. Donato LEVI ha dedotto dalle registrazioni automatiche dell'Osservatorio.

Questi lavori saranno pubblicati nel solito fascicolo annuale che va unito agli *Atti*.

**Adunanza del 24 Febbraio 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Maggiore Prof. F. SIACCI presenta un opuscolo da parte del sig. E. NARDUCCI, Corrispondente dell'Accademia, colle seguenti parole:

Presento all'Accademia da parte del Socio corrispondente Enrico NARDUCCI una sua lettera al sig. Aristide MARRE *Sur un Manuscrit du Vatican du XIV siècle contenant un traité de Calcul emprunté à la Méthode « gobari »* (Extrait du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. VII, 1883). Questa lettera, che contiene un'accurata descrizione del Codice Vaticano n° 1285 della Regina di Svezia, ha per oggetto speciale l'analisi di un trattato contenuto in questo Codice ed intitolato *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam*. Escluso che si tratti di una traduzione latina di qualche trattato arabo sul *gòbar* o *polvere*, il Narducci avvisa trattarsi invece di un lavoro originale compilato in occidente, che offre una transizione fra l'abaco e l'algoritmo e fa conoscere il metodo *gòbar* indipendentemente dagli antichi sistemi d'abaco. Suppone il Narducci che in questo metodo fosse una spiegazione dell'Abaco degli antichi ad uso degli orientali, e conclude che il trattato medesimo serve di anello tra i lavori storici dell'illustre Chasles inseriti nei *Comptes Rendus* e quello del Woepeke *Sur l'introduction de l'Arithmétique indienne en Occident.*

Il Socio Comm. Prof. Michele LESSONA presenta e legge il seguente lavoro del sig. Carlo POLLONERA:

# MONOGRAFIA

DEL

# Genere VITRINA.

In seguito alle interessanti pubblicazioni della signora Marchesa PAULUCCI sulle specie di questo genere viventi nella parte peninsulare dell'Italia, una revisione delle forme piemontesi credo possa riuscire di qualche utilità; tanto più che dopo la pubblicazione del lavoro di Mario LESSONA, mio fratello, sui Molluschi del Piemonte, altre forme vennero trovate in questa regione, ed una tra esse essenzialmente diversa dalle altre specie europee conosciute finora.

Alle due sezioni *Semilimax* e *Phenacolimax* nelle quali Stabile divise questo genere, una terza venne aggiunta dal Fischer (*Oligolimax* Fisch. in Paulucci Mater. etc. 1878) per le specie a conchiglia subumbilicata e striata e ad animale senza mezzo-cappuccio visibile che finora erano collocate coi *Phenacolimax*.

Le osservazioni anatomiche sulle *Vitrina* sono abbastanza abbondanti, ma non sempre concordi; ecco quelle che mi sono note.

MOQUIN-TANDON, 1855, Moll. de France, II, p. 48 dà qualche parola di descrizione della radula della *V. diaphana*; descrive e figura l'apparato riproduttore della *V. maior* (p. 51, tav. VI, fig. 26).

A. SCHMIDT, 1855, Geschlechtsapp. d. Stylomm. p. 49: tavola XIV, f. 105, 106, 107, descrive e figura gli organi genitali delle *V. brevis*, *draparnaldi* e *pellucida*.

Stabile, 1864, Moll. du Piém., p. 117 parla abbastanza diffusamente della radula delle *V. charpentieri*, *brevis*, *diaphana*, *maior* e *pellucida*, ma non dà nessuna figura.

Lehmann, 1873, Leb. Schneck. Pommern, descrive e figura (p 48, t, IX, f. 12) l'apparato genitale, la mandibola e la radula della *V. pellucida*.

W. G. Binney, 1878, Terr. Moll. Unit. States (vol. V, p. 135) figura la radula della *V. limpida* che è assai simile a quella della *V. pellucida* data da Lehmann.

Fischer, 1878., in Paulucci, Matériaux pour servir, etc., pag. 24, descrive la radula delle *V. paulucciae* e *brevis*.

Non sempre i risultati di questi varii autori concordano tra loro; infatti mentre Stabile non trova nessuna notevole differenza nella radula tra le *V. maior*, *charpentieri* e *pellucida*, quest'ultima nella figura di Lehmann mostra l'aculeo delle serie marginali munito di un forte dente supplementare verso l'infuori che non si osserva nelle specie dei gruppi delle *V. maior* e *charpentieri*. Anche la descrizione di Stabile della radula della *V. brevis* non sembra concordare perfettamente con quella data da Fischer.

Ad ogni modo però la radula del genere *Vitrina* è dello stesso tipo di quella dell'*Agriolimax* (vedi Lessona e Pollonera, monogr. Limac. ital.), cioè il dente centrale ha tre aculei, i campi mediani ne hanno due, ed i latero-marginali ne hanno un solo, molto allungato, liscio o con una addentellatura sul margine esterno. Però nei denti maggiori la base è sempre più piccola e la cuspide principale è molto più allungata.

La mandibola è sempre liscia, arcuata e munita di una forte sporgenza rostriforme nel mezzo del suo margine libero.

L'apparato genitale per lo più è semplice, cioè ha una guaina della verga corta, a canale deferente inserito lateralmente, ma il *flagellum* non è separato da essa da alcun restringimento cosicchè forse non si può neppure considerare questa parte quale un vero *flagellum*, come spiegherò meglio tra poco; borsa copulatrice a collo non molto lungo e senza ramo accessorio; sacco del dardo e vescicole mucose, nulle; tuttavia parecchie notevoli differenze si osservano nelle varie specie.

A proposito del *flagellum* farò osservare che Moquin-Tandon chiama con questo nome tutta la parte della guaina della verga

che si trova posteriormente al punto da cui parte il canale deferente senza tener conto della posizione del muscolo retrattore, cosicchè in certe specie (come nelle *Vitrina*) nessuna differenza di forma o d'aspetto distingue queste due parti. Ma se noi osserviamo l'apparato riproduttore delle specie provviste di un vero *flagellum* bene sviluppato (moltissime *Helix*) vedremo che esso è sempre libero dal muscolo retrattore della guaina della verga il quale si inserisce un po' sotto o sopra allo sbocco del canal deferente, ma giammai alla punta del *flagellum*. Nelle *Vitrina* invece il muscolo retrattore è alla estremità del cosidetto *flagellum* o piuttosto della guaina della verga, la quale somiglia perfettamente a quella di alcuni *Agriolimax*, differendone soltanto per lo sbocco del canale deferente che è laterale invece di essere terminale come in quelli. Infine io credo non bastare che il canale deferente sbocchi lateralmente nella guaina della verga per dover considerare come *flagellum* la parte posteriore di essa, ma che si possa far ciò soltanto allorchè questa parte non è legata alla sua estremità dal muscolo retrattore, perciò secondo me le *Vitrina* si dovrebbero considerare come prive di *flagellum*.

Nella *V. maior* Moquin-Tandon (pl. IV, f. 26) osservò al principio del dilatamento della vagina o collo della matrice due rigonfiamenti glandulari che rappresenterebbero le vescicole mucose, e sotto di esse il collo assai lungo della borsa copulatrice sboccare nella vagina. Una identica disposizione trovai nella *V. stabilei* di Valfroide (vedi fig. 46); invece lo Schmidt (pag. 49, fig. 106) nella *V. draparnaldi* di Bonn (= *V. maior*) trovò la borsa copulatrice quasi priva di collo e non seppe distinguere le ghiandole che però dovevano esserci e cagionare l'ingrossamento che egli notò in questo punto. Nelle altre specie del genere osservate finora non si trova traccia alcuna di queste ghiandole.

Nella *V. pegorarii* la borsa copulatrice è a collo breve e grosso e sbocca al principio dell'ingrossamento della vagina come nelle *V. maior* e *stabilei*, ma non ho potuto scorgervi le ghiandole o prostate vaginali come in quelle.

Nella *V. pellucida* la vagina non presenta i ristringimenti e gli ingrossamenti notati nelle specie sopracitate, e la borsa copulatrice sbocca assai più presso alla guaina della verga, come si può vedere dalle figure di Schmidt (fig. 107) e di Lehmann (tav. IX, f. 12), sebbene poi queste non concordino tra loro

nella forma della borsa copulatrice e nelle sue dimensioni rispetto alla guaina della verga.

Una disposizione affatto anormale osservò lo Schmidt nella *V. brevis* (p. 49, fig. 105), cioè la borsa copulatrice che sbocca nella guaina della verga, invece che nella borsa comune o nella vagina; inoltre presso allo sbocco della guaina della verga nel canale comune un grosso ed abbastanza lungo braccio supplementare, che ricorda la parte inferiore del *flagellum* laterale dei *Buliminus obscurus* e *detritus*, eccettochè in queste specie esso sbocca verso l'estremità della guaina della verga, mentre nella *V. brevis* esso sbocca nel canale comune. Questa somiglianza è ancora più marcata nella *V. goeotiformis* (fig. 41) poichè quest'organo acquista in essa uno sviluppo molto maggiore, e presenta come nei citati *Buliminus* due parti ben distinte, cioè la inferiore grossa che passa in un'altra strettissima la quale si va allargando in forma di clava. Nella *V. goeotiformis* quest'organo è assai più lungo della guaina della verga, ed ha nel canale comune uno sbocco assolutamente indipendente da questa, per cui mi sembra non si possa considerare come un *flagellum*.

Le mandibole non presentano che differenze trascurabili, fuorchè nella *V. brevis* che secondo Stabile (p. 118) avrebbe una mandibola molto larga, poco alta ed a sporgenza rostriforme pochissimo pronunciata.

Come accennai più sopra le descrizioni della radula delle varie specie di *Vitrina* europee non mancano, ma finora non venne figurata che quella della *V. pellucida* da Lehmann ed ancora abbastanza grossolanamente. Le descrizioni date da Stabile riescono di poco aiuto perchè mi sembrano il risultato di un esame troppo incompleto, forse conseguenza dell'aver egli osservato queste radule con un ingrandimento troppo debole, cosicchè non potè apprezzarne al loro giusto valore i caratteri.

Io osservai quest'organo nelle *V. stabilei pegorarii*, *diaphana* e *goeotiformis*; in tutte queste specie trovai un numero di denti assai superiore a quello osservato nelle altre specie, infatti mentre Fischer ne trovò in ogni fila trasversale nella *V. paulucciae* 47, nella *V. brevis* 51, Binney nella *V. limpida* 51, Lehmann nella *V. pellucida* 75, io ne osservai in ciascuna di quelle specie da 85 a 87.

L'insieme della radula è come dissi più sopra identico a quello degli *Agriolimax* e come in questi il passaggio dai campi mediani

ai laterali si effettua quasi improvvisamente, cosicchè tra essi si può segnare un limite sicuro, mentre tra i laterali ed i marginali il passaggio è talmente insensibile che non si può segnare nessuna divisione neppure approssimativa. Generalmente il numero dei denti dei campi mediani è meno della metà di quello dei latero-marginali; finora non fa eccezione a questa regola che la *V. paulucciae* che ne ha 9 in ciascun campo mediano e 14 in ciascun campo latero-marginale, mentre nelle *V. brevis* e *limpida* la proporzione è di 7 per 18, nelle *V. pegorarii* e *diaphana* 12 per 31 nella *V. goeotiformis* 12 per 30.

Il dente centrale è sempre a cuspide principale molto lunga e stretta, sormontata da un aculeo aguzzo che seguita e completa la curva della cuspide, le lamine laterali appena sensibili: cuspidi laterali mediocremente accennate, sormontate da aculei conici assai forti; base riflessa piccola che non giunge alla metà della base di inserzione. In questo solo carattere differisce dagli *Agriolimax* nei quali la base riflessa è sempre superiore alla metà della base di inserzione.

Nei denti dei campi mediani la cuspide principale è sempre assai alta ma meno sottile, ad aculeo più forte ed a lamina interna sviluppatissima; la cuspide interna è rudimentale e priva di aculeo, mentre l'esterna è più pronunciata che nel dente centrale. Nelle *V. goeotiformis* e *stabilei* la cuspide principale presenta nel suo lato interno una intaccatura in forma di gradino nel punto da cui comincia la parte inferiore e più larga della lamina interna; questa intaccatura nella *V. pegorarii* e *diaphana* è assai meno pronunciata e scompare prima della fine dei campi mediani, mentre nella *V. goeotiformis* essa sussiste in tutti i denti di questi campi.

Nei campi latero-marginali delle quattro specie sopra citate l'aculeo principale (l'unico che sussiste) è molto allungato, in forma di coltello un po' ricurvo e perfettamente liscio sui suoi due margini; esso allontanandosi dal centro, e di mano in mano che i denti diminuiscono di mole, si fa più corto e si arrotonda in punta. Però nelle *V. goeotiformis* e *stabilei* la base si fa più obliqua verso i denti marginali, e conserva fin quasi agli ultimi una forma allungata, mentre nelle *V. pegorarii* e *diaphana* essa si va facendo più perpendicolare ed assume una forma più subquadrangolare. Nella figura della *V. pellucida* data da Lehmann ed in quella della *V. limpida* (specie affine alla pre-

cedente che vive negli Stati Uniti d'America data da Binney, l'aculeo dei campi latero-marginali presenta sul lato esterno un dentino supplementare sviluppatissimo come si osserva in parecchi *Agriolimax* (*A. tenellus*, *A. lacustris*). Questo forte dentino supplementare lo osservai io pure nella var. *bellardii* della *V. pellucida* della Valle d'Aosta, ma in questa inoltre notai che al di sotto (1) del dentino supplementare il margine esterno del dente è dentellato o seghettato come nella *Lehmannia mongianensis* (Less. e Poll. Monogr. Limac., t. III, f. III), e questa dentellatura invece di scomparire negli ultimi denti marginali si fa più forte, cosicchè questi appaiono quadridentati. Non avendo potuto osservare io stesso la radula della forma tipica della *V. pellucida* non posso esser certo che manchi in essa questa particolare seghettatura; ma se in essa mancasse veramente, io sarei di parere che la var. *bellardii* dovrebbe esser considerata come specie distinta, venendo i caratteri distintivi anatomici ad avvalorare quelli non molto accentuati della conchiglia (2).

L'animale delle *Vitrina* che vivono in Francia fu descritto accuratamente da Moquin-Tandon, per cui credo inutile tornarvi sopra, parlerò soltanto di quello delle *V. goeotiformis* e *pegorarii* che non sono ancora conosciuti.

Passo ora all'elenco delle specie piemontesi ripartite nelle tre sezioni sopra citate.

## Sez. I. — **SEMILIMAX** Stabile.

Animale incapace di ritirarsi nella conchiglia. Semi-cappuccio molto sviluppato. Conchiglia levigata e brillante di forma ovale allungata ed a spira depressissima.

---

(1) Dico *al di sotto* considerando la radula nella posizione in cui è figurata nella tavola, perchè in realtà si dovrebbe dire *anteriormente* essendo gli aculei rivolti verso l'indietro sulla lingua dell'animale.

(2) Nelle fig. 49, 50, 51, 52. della tavola annessa a questo lavoro ho riprodotte le figure date da Lehmann dell'anatomia della *V. pellucida* tipica, onde riesca più facile il confronto colla radula della mia var. *bellardii* rappresentata nella fig. 39.

## **Vitrina goeotiformis** n. sp.

Fig. 1, 2, 3, 4.

*Testa depressa, elliptico-auriformis, supra convexiuscula, subtus planulata; anfr. 2 celeriter crescentes; apertura subhorizontalis, ovalis, antice subtruncata, margine dextero arcuato, margine columellari membranaceo, lato, valide arcuato, spiram perspectivam non obtegente. Longit. max. 4 $^1/_2$ mill.*

Nell'autunno dell'82 il Prof. PEGORARI mi mandava insieme a molti *Limacidi* vivi della Valle d'Aosta alcune *Vitrina* pure vive, tra le quali un solo esemplare di questa specie che non potendo studiare sul momento immersi nell'alcool, dopo averne fatta una figura a colore e scritte poche righe di descrizione dell'animale per serbare memoria dei suoi caratteri. Dopo la pubblicazione dell'interessante lavoro sui molluschi della Valle d'Aosta del sullodato Professore, essendomi accinto a ristudiare le *Vitrina* della mia collezione, distaccai la conchiglia dall'animale, e mi avvidi allora soltanto che essa era una specie nuova e per nulla somigliante alle altre specie europee.

Questa conchiglia è interamente depressa, fragilissima, vitrea, trasparentissima, quasi incolore, leggermente ed appena verdognola, a due soli giri di spira; la bocca è allungata subovale, a margine membranoso arcuato, largo e che forma da sè solo quasi interamente la base della conchiglia. Ma il carattere che distacca nettamente questa da tutte le sue congeneri europee è appunto la bocca che è così ampia ed il labbro columellare è così arcuato che lascia scorgere l'interno di tutta la spira. Questo carattere la fa somigliare a parecchie forme esotiche dal Reeve considerate come *Vitrina* ed ora collocate nei generi *Helicarion*, *Mariaella* e *Geotis*, ma i caratteri anatomici di cui ho parlato più sopra dimostrano chiaramente che essa è una *Vitrina* sebbene alquanto aberrante.

L'animale ha una coda aguzza, breve, carenata, nerissima; il semi-cappuccio pure nerissimo si allunga poco all'innanzi, è solcato trasversalmente da poche rughe larghe ed arrotondate, ed il suo bilanciere in forma di lingua aguzza ricopre il vertice della spira; il collo è lungo, nerastro verso il cappuccio diventa nerissimo alla testa ed ai tentacoli; la suola nerastro azzurrognola nel mezzo è nera nelle zone laterali.

Questo animale è notevole per la brevità del semi-cappuccio che non è in rapporto colla forma così incompleta della conchiglia; infatti le altre specie di questa sezione, sebbene tutte possiedano una conchiglia meno aperta, hanno tutte un semi-cappuccio molto più sviluppato e che si allunga di più all'innanzi ricoprendo il collo.

L'unico esemplare conosciuto finora fu trovato presso Aosta sulla destra della Dora a circa 2000$^{m}$ d'altitudine.

## Vitrina brevis.

*Helicolimax brevis*, Fér. 1821, Tabl. Syst. pl. IX, f. 2.
*Vitrina brevis*, Pfr. Monogr. Helic. IV, p. 790.
» » Kobelt, Iconogr. 1877, fig. 1402.

Un solo esemplare di questa specie, anch'essa nuova pel Piemonte, trovò il Prof. Camerano presso il Lago della Veggia alla estremità superiore della Valle del Cervo.

L'animale di questa specie già figurato dal Férussac fu poi descritto dal Dott. Pini (Moll. Esino in Bullett. Soc. malac. Ital. 1876, p. 109). Sebbene molto diffusa in Lombardia sembra rarissima in Piemonte, non avendola Camerano trovata in nessuna delle varie località da lui esplorate nelle Valli della Toce e della Sesia.

## Vitrina diaphana.

Fig. 14, 15, 16.

*Vitrina diaphana*, Drap. 1805, Hist. moll., p. 120, pl. 8, fig. 38-39. Rossm. Iconogr. 1835, fig. 27, Kobelt, 1877, Iconogr., fig. 1398.
*Helicolimax vitrea*, Fér. 1821, Tabl. Syst., p. 25, pl. IX, f. 4.

È questa la forma più sparsa e meglio conosciuta di un piccolo gruppo di specie che formano il passaggio dai *Semilimax* ai *Phenacolimax*; infatti mentre le *V. diaphana*, *glacialis* ed altre hanno una conchiglia allungata, ad ultimo anfratto molto sviluppato ed a bocca quasi orizzontale, nelle specie più prossime alla *V. nivalis* per mezzo di parecchie forme, molto affini l'aspetto della conchiglia si modifica insensibilmente nel senso

dei *Phenacolimax* cosicchè nella *V. pegorarii* le affinità colle specie del gruppo della *V. maior* sono già molto accentuate.

Il signor Kobelt attenendosi alle conclusioni di Koch ha nettamente distinta la *V. glacialis* Forbes dalla *V. diaphana*, ed il modo in cui egli intende queste due specie mi sembra giusto; per contro mostra di non conoscere affatto la *V. nivalis* Charp. (*V. Charpentieri* Stab.) poichè la figura che esso dà di questa specie è affatto erronea e non concorda punto colla descrizione che egli copiò letteralmente da Stabile.

La conchiglia della *V. diaphana* è depressa, appena convessa, fragilissima, brillante, appena striata, d'un giallo verdastro pallidissimo. Gli anfratti sono 2 ½ che crescono rapidamente; l'ultimo è molto grande, cosicchè la sua larghezza presso l'apertura è maggiore di metà del diametro massimo della conchiglia. Apertura quasi orizzontale, molto ampia, a margine columellare fortemente arcuato; margine membranoso su tutto il margine inferiore dell'apertura, assai sviluppato, e che nella sua maggiore larghezza occupa ⅓ della faccia inferiore dell'ultimo anfratto. Lunghezza 5 ½-6 mill.: larghezza 3 ¾-4 ¼ mill.

È questo il mollusco che in Europa si eleva alla maggiore altezza, infatti esso fu trovato sulla vetta del Corno del Camoscio sopra l'Albergo del Col d'Ollen, cioè a più di 3000 metri, ed io non conosco nessuna altra specie che sia stata finora trovata in una stazione così elevata nelle nostre Alpi. Del resto il signor Fischer (Manuel de Conchyl. 1881, fasc. 3, pag, 281) segna lo zero della vita dei molluschi in Europa a circa 2500 metri di altitudine. In Piemonte fu pure trovata all'Ospizio del Sempione, 2020$^{m}$ (Stabile), e nella Valle della Dora Baltea all'Allée Blanche 2000 (Dumont) ed a Courmayeur 1218$^{m}$ (Bellardi).

## Vitrina glacialis.

Fig. 20, 21, 22.

*Vitrina glacialis* Forbes, 1837, Magas. Zool. Bot. — Wiegm. Archiv. 1838, II, p. 273 — Pfr. Mon. Helic. II, p. 496. — Koch, 1871, Nachr. Bl. Mal. Ges. III, p. 39, t, 1, f. 6. — Kobelt, 1877, Iconogr., fig. 1401.

Come sinonimo o come varietà della *V. diaphana* fu dalla massima parte dei malacologi considerata la V. *glacialis* Forbes,

specie ora nettamente distinta da quella mercè i lavori di Koch e di Kobelt. Questa finora fu trovata in Piemonte soltanto a Courmayeur nella Valle d'Aosta (1212 m) dal Cav. Ippolito Blanc. È una forma assai vicina alla *V. diaphana* dalla quale differisce essenzialmente per il margine membranoso assai più largo, cosicchè esso occupa quasi la metà della faccia inferiore dell'ultimo anfratto, ed anche più breve perchè cessa un po' prima di giungere alla estremità anteriore della bocca, mentre nella *V. diaphana* esso si estende su tutto il margine inferiore dell'apertura. In questi caratteri del margine membranoso la *V. glacialis* Forbes concorda perfettamente con una piccola *Vitrina* di Lombardia (spedita dai signori Villa col nome di *V. nivalis* Charp.), ma questa è meno depressa, più convessa superiormente ed inferiormente, ad ultimo giro meno ampio e quindi a conchiglia meno allungata, a bocca più obliqua, più alta e meno lunga. L'unico esemplare che ne possiedo è di dimensioni alquanto minori delle *V. diaphana* e *glacialis* misurando mill. 4 ½ di lunghezza per 3 ½ di larghezza. Questa forma io la chiamerò:

## Vitrina villae.

Fig. 17, 18, 19.

*V. nivalis* Villa in schedis, non *V. nivalis* Charpentier.

Essa si distinguerà al primo colpo d'occhio dalla *V. nivalis* Charp. per la sua forma meno allungata e più rotonda, ma sopra tutto pel suo margine membranoso larghissimo e breve, mentre nella *V. nivalis* esso è strettissimo e lungo.

## Vitrina nivalis.

Fig. 5 a 13.

*Vitrina nivalis*, Charpentier in Dumont et Mortill. 1852 Hist. moll. Savoie, p. 299, n° 2. — 1857, Catal. crit. et malac. Savoie, p. 16.

» *charpentieri*, Stabile, 1859, Descript. Coq. nom. in Rev. et Mag. Zool., p. 419 (non Kobelt).

Grazie alla gentilezza del Dott. Pini di Milano ho potuto osservare un esemplare tipico di Charpentier di Bex in Svizzera (fig. 5, 6, 7) ed uno pure tipico di Stabile dell'Ospizio del Sempione (fig. 8, 9, 10). Ecco la descrizione della *V. nivalis* tipica.

*Testa elongata, depressa, subplanulata; supra vix convexiuscula, subtus subglobosa; hyalina lutescenti-viridula; spira brevissima, apice prominula. Anfractus 2 ¾ convexiusculis, rapidissime crescentes, sutura filo-marginata separati; ultimus magnus, depressus, elongatulus. Apertura obliqua, ovato-elongata, margine supero arcuato-subangulato, infero mediocriter incurvato, limbo membranaceo angusto.*

Longit. 4 ¾ mill.

*Hab.* Le Alpi di Bex in Svizzera.

Questa conchiglia non è tra le *Vitrina* più trasparenti, l'interno della bocca è alquanto bianchiccio madreperlaceo, le strie sono poco marcate ed arrotondate: il margine superiore della bocca è leggermente concavo presso il suo punto di partenza, si fa poi convesso e rivolto bruscamente all'indietro tanto da sembrare quasi ottusamente angoloso.

L'esemplare tipico di Stabile (fig. 8, 9, 10), cioè la forma del Sempione, non è perfettamente identico a quello di Bex, infatti esso è di forma generale meno allungata, è alquanto più convesso superiormente cosicchè anche la bocca resta un po' più obliqua all'asse della conchiglia, il margine superiore della bocca si inarca regolarmente, e quello inferiore essendo più arcuato, la bocca resta assai più larga in rapporto alla sua lunghezza; inoltre il margine membranoso è ancora più stretto che nel tipo di Bex. Per quest'ultimo carattere concordano colla forma del Sempione gli individui del Monte Codeno in Lombardia e quelli della cascata detta Frua in Piemonte che sono nella mia collezione, ma per la forma dell'apertura concordano meglio colla forma tipica di Bex. Tutte queste piccole differenze però mi sembrano puramente locali od individuali, e soprattutto troppo leggere per poter loro dare il valore di caratteri differenziali; io credo quindi che queste varie forme debbano restare unite sotto lo stesso nome di *V. nivalis* Charp.; tutto al più si potrebbe considerare la *V. charpentieri* Stabile come una semplice mutazione a margine membranoso più stretto.

Ormai non è più possibile confondere la *V. nivalis* colla *V. diaphana* o colle forme affini a questa, per la notevole diversità di ampiezza del margine membranoso, e per la obliquità della bocca nel gruppo della prima mentre nelle altre essa è quasi orizzontale. Dalle forme del gruppo della *V. maior* si di-

stinguerà sempre pel grande sviluppo del suo ultimo anfratto e per conseguenza dell'ampiezza dell'apertura.

Della *V. charpentieri* Stabile vi sono due figure, ma entrambe erronee. Quella di Kobelt (Iconogr. f. 1408) rappresenta una forma assai meno allungata ed a margine membranoso largo come nella *V. diaphana*, cosicchè è impossibile riferirla alla specie in questione. Quella di Stabile (l. c. tav. 15, f. 1-5) esagera assai l'ampiezza dell'ultimo anfratto nel suo rapporto coi primi e quindi anche quella dell'apertura: infatti egli dà come lunghezza della bocca 3 o 3 ½ mill. per 5 o 6 di lunghezza totale della conchiglia, mentre la sua figura rappresenta una conchiglia lunga 6 ¼ mill. con un'apertura di 4 ¾.

Il signor Clessin descrisse una *V. alpestris* (Malakozool. Blätt, 1881, p. 185) che si distinguerebbe dalla *V. nivalis* pel margine membranoso un po' più largo e per la spira più depressa, ma il signor Boettger (Malakozool. u. Palaeont. Mittheil. 1883, p. 159) crede che essa non sia altro che la forma perfettamente adulta della *V. nivalis*.

In Piemonte la *V. nivalis* fu trovata finora all'Ospizio del Sempione, 2050$^{m}$ (Stabile); al Piccolo San Bernardo, 2000$^{m}$ (Dumont); Valle della Stura di Lanzo 1900$^{m}$ (Stabile); Gran San Bernardo 2400$^{m}$, fra Pollein e Chervensod 2000$^{m}$, e vallone di Gressan, 1000$^{m}$ nella Valle d'Aosta (Pegorari); Cascata della Frua in Val della Toce, 1694$^{m}$ (Camerano); Monte Cenisio, 2000$^{m}$ (Boettger).

Un'altra forma di questo gruppo si trova a Castel See in Val della Toce, e sebbene offra notevoli differenze, non essendone stato finora raccolto che un solo esemplare non oso dichiararla quale specie nuova, temendo che essa possa essere soltanto una varietà molto più globosa della *V. nivalis;* la chiamerò:

### Var. **piniana**

Fig. 11, 12, 13.

*Testa striata, supra convexa; anfractus 2 ½ rapidissime crescentes, ultimus amplus; apertura obliqua, regulariter ovato-oblonga, margine membranaceo angusto. Longit. 4 ¼ mill.*

Questa forma differisce dalla tipica per essere assai più globulosa, più convessa superiormente, a spira più prominente, a bocca ancora più obliqua, meno allungata e più ovale: a margine membranaceo stretto come nella forma di Stabile, il colore, la poca trasparenza e l'interno della bocca madreperlaceo sono simili alla *V. nivalis* della Cascata della Frua.

## **Vitrina pegorarii**, n. sp.

Fig. 23, 24, 25, 26.

È questa una forma intermedia tra la *V. nivalis* e le forme depresse del gruppo della *V. maior*. Ne ricevetti 2 individui vivi dal Prof. Pegorari che li raccolse sulla riva destra della Dora presso Aosta a circa 2000$^{m}$ di altitudine, e che io confusi finora colla specie precedente. Eccone la descrizione.

*Testa depressa, rotundata, supra subplanulata, subtus convexa, hyalina, vitrea, pallidissime lutescenti-viridula, spira vix prominula. Anfractus 2 $^{3}/_{4}$ rapide crescentes, sutura filo-marginata separati; ultimus amplus gradatim crescens. Apertura subobliqua, ampla, margine supero regulariter arcuato, infero incurvato, limbo membranaceo angustissimo. Longit. 6 mill.*

Questa specie si distingue dalla *V. nivalis* per la sua forma assai meno allungata che le viene da ciò che l'ultimo anfratto cresce gradatamente, e non prende mai uno sviluppo tanto preponderante sul resto della spira come accade in quella. Infatti misurando queste due specie si osserverà che nella *V. nivalis* la larghezza dell'ultimo anfratto presso l'apertura supera assai la metà della lunghezza totale della conchiglia, mentre nella *V. pegorarii* essa è inferiore alla metà. Inoltre in questa il lembo membranoso è ancora più ristretto che in quella, ed anche per questo carattere si avvicina alle forme estreme del gruppo della *V. maior*; la spira è alquanto più depressa ed il margine columellare più arcuato che nella *V. nivalis*.

L'animale mentre cammina è lungo circa 18 mill., ha la testa ed i tentacoli neri; il semi-cappuccio molto sviluppato che si allunga e si restringe all'innanzi, è trasversalmente solcato da numerose rughe non molto larghe, esso è di color nerastro a

macchie ocraceo-chiaro; ha un bilanciere breve, largo, arrotondato in punta e che non ricopre l'apice della conchiglia. La coda poco aguzza, nerastra, e longitudinalmente traversata da un profondo solco mediano di color chiaro dal quale partono molti solchi trasversali obliqui dall'innanzi all'indietro. La suola bianchiccia nel mezzo, è nera nelle zone laterali.

## Sez. II. — **PHENACOLIMAX** Stabile.

Animale che può ritirarsi nella sua conchiglia e chiudervisi con un epifragma. Semi-cappuccio ben sviluppato. Conchiglia di forma ovale, non umbilicata.

### Vitrina stabilei

Fig. 33, 34, 35.

*Vitrina maior*, Stabile, 1864, Moll. Piem., p. 24.
» » var. *stabilei* Lessona, 1880, Moll. viv. Piemonte, p. 24, t. IV, f. 5-7.

*Testa depressa-globosa, tenuis, laevigata, nitidissima, pellucida, hyalina, pallide lutescente; spira brevissima, apice vix prominula. Anfractus 3 celeriter crescentes, sutura filo-marginata separati, ultimus depressus, antrorsum elongatus, basi subplanus, margine membranaceo breviusculo, semilunare; apertura subhorizontalis subovato-elongata. Longit.* 6 ½ — 8 ½ *mill.*

Questa specie è affine alla *V. maior* Fér. e la sostituisce nelle nostre Alpi occidentali eccetto le marittime. Ho creduto di dover separare specificamente dalle francesi queste forme piemontesi perchè tutte concordano tra loro su parecchi caratteri differenziali abbastanza notevoli, quantunque variino tra loro assai per l'altezza della spira e per le dimensioni. Queste forme piemontesi sono sempre più depresse che le francesi; la bocca è assai meno obliqua, anzi è quasi orizzontale, perchè l'ultimo anfratto è più schiacciato tanto sotto quanto sopra, e non discende a guisa di tetto come nella *V. maior* ma è quasi pianeggiante; inoltre, la spira svolgendosi assai più rapidamente, esso è anche assai più grande rispetto al resto della spira che è composta da

soli 3 giri invece di 3 ½ come nella *V. maior* di Francia (Vedi fig. 33, 34, 35 e 36, 37, 38).

Il signor Locard di Lione al quale comunicai varie di queste forme piemontesi, crede la *V. stabilei* del Lago di Fiorenza identica alla var. *depressiuscula* Moq. della *V. maior;* ma essendo questa forma distinta dal tipo soltanto colle seguenti parole: « *coquille de même taille, un peu plus déprimée* » l'identità non mi sembra potersi stabilire con sufficiente certezza per adottare il nome di Moquin-Tandon, tanto più che questi cita come patria della sua varietà i Pirenei. A questo proposito converrà osservare che l'area in cui vivono le forme che io raccolgo sotto il nome di *V. stabilei* non confina forse in nessun punto con quella della *V. maior;* infatti Dumont e Mortillet (Catal. crit. moll. Savoie, p. 18) osservarono che questa specie, assai abbondante in quella regione, manca a tutta la parte alta della Savoia, cioè verso il confine italiano, come pure manca alla Valle d'Aosta la *V. stabilei* che si trova nelle parti elevate delle Valli della Sesia, del Cervo, della Stura di Lanzo, della Dora Riparia e del Po; in quest'ultima località soltanto essa si trova forse a breve distanza dai luoghi abitati dalla *V. maior.*

Come dissi più sopra la *V. stabilei* è assai variabile tanto nella forma, quanto nella grandezza. Considero dunque come tipica la forma figurata da M. Lessona (loc. cit.), cioè quella del Lago di Fiorenza e del Piano del Re ai piedi del M. Viso (oltre i 2000$^{m}$); essa è quella che presenta le maggiori dimensioni raggiungendo qualche volta fino 8 ½ mill. È di forma ancora un poco più appiattita superiormente e più piccola (5-6 ½$^{m.m}$) nel vallone di Valfroide sopra Bardonecchia (Piolti), al Monte Cenisio 2000$^{m}$ (Pollonera) ed al Col d'Ollen in Val Sesia (Camerano). Gli individui di Valfroide sono inoltre alquanto più rigonfi inferiormente, e tra essi ne trovai uno subopaco e color bianco latteo. Una forma più notevole è quella che presenta un esemplare di Balme nella Valle di Lanzo determinato da Stabile col nome di *V. maior*, essa è la

### Var. **locardi**

Fig. 27, 28, 29.

*Testa supra et subtus depressior, spira fere omnino planulata, limbo membranaceo fere nullo. Longit.* 6 ¼ *mill.*

Questa forma è ancora più schiacciata delle precedenti, la bocca è ancor meno obliqua, e soprattutto il margine membranoso è talmente stretto che quasi non esiste più. Il sig. Locard al quale la comunicai, la ritiene per una specie nuova: ma io non possedendone che un solo esemplare, ed ignorando quindi se il carattere del margine membranoso sia costante negli altri individui della stessa località, mi limito a notarla come varietà distinta.

Oltre le località sopra citate, Stabile nota ancora per la *V. maior*, il Santuario d'Oropa 1250$^{m}$, e sopra Rochemolles nella Valle della Dora Riparia a 1900$^{m}$.

## Vitrina major

Fig. 36, 37, 38.

*Vitrina pellucida* Drap. 1801, Tabl. Moll. p. 89. — Hist. p. 119 pl. VIII, f. 34-37 (non Gaertner).
*Helicolimax maior* Fér. 1807, Ess. meth. Conch., p. 43.
*Vitrina maior* C. Pfr. 1821, Deutsch. Moll. I, p. 47. — Moq. Tand. 1855, Hist. moll., p. 49, pl. VI, f. 14-32.

La forma tipica francese, che ho rappresentato nelle citate figure, non vive in Piemonte, le forme citate con questo nome da Stabile e da Lessona essendo tutte comprese nella *V. stabilei*; tuttavia credo di dover ascrivere alla *V. maior*, quale nuova varietà, due esemplari raccolti dal Cav. J. Blanc a Limone nelle Alpi Marittime, chiamerò questa forma:

### Var. **blanci**

Fig. 47, 48.

*Testa subdepressa, nitida, hyalina, anfr. 3 ½ regulariter crescentes; apertura subobliqua, margine supero declivi, membranaceo angustissimo, columellari reflexo umbilicum parvulum simulante.*

Questa forma pel suo aspetto generale e pel modo in cui si svolge la spira è bene la *V. maior*, ma se ne distingue pel suo colore vitreo invece di verdognolo, per i suoi anfratti meno globosi che si approssimano a quelli della *V. stabilei*: ma il carattere più spiccato è il simulacro di umbilico che è in essa, formato dal mar-

gine columellare alquanto dilatato e risvoltato, e per un tratto non aderente alla conchiglia, ciò che non accade mai nella forma tipica di questa specie. Debbo però far notare che in un esemplare di *V. maior* di Montpellier in Francia ho pure osservato questo pseudo-umbilico sebbene molto meno visibile che in questa forma di Limone.

Uno dei due esemplari raccolti dal Cav. Blanc misura nel suo diametro massimo quasi 10 mill., l'altro 7 ½.

## Vitrina pellucida

Fig. 30.

*Helix pellucida*, Müller. 1774, Verm. hist. II, p. 15.
*Vitrina pellucida*, Gaertn. 1813, Conch. Wett. p. 34 (non Drap.).

Questa ben nota specie è del Genere *Vitrina* quella che si trova più comunemente in tutte le nostre Alpi, ed è l'unica che finora sia stata trovata nell'Apennino ligure-piemontese, e che discenda fino alla pianura.

Essa è generalmente poco trasparente, di un colore che tira sul giallognolo, e nell'interno della bocca è qualche volta di un bianchiccio un po' opaco: gli esemplari piemontesi sono quasi tutti più fortemente striati che non quelli lombardi che vivono a Legnano; del resto sono poco variabili e solo in qualche località se ne trova qualcuno a spira un po' più depressa.

Una forma molto notevole però è quella che vive nei contorni d'Aosta, donde me ne mandò parecchi esemplari il Professore Pegorari, e che io chiamerò:

### Var. **bellardii**

Fig. 31.

*Differt a forma typica, testa nitidissima, hyalina, viridula, supra depressiore, subtus globosiore, laevissima, ad suturam minute et crebre striatula. Longit.* 4 ½-5 *mill.*

Più sopra parlando dei caratteri anatomici delle varie specie feci notare le importanti particolarità della radula che trovai in questa forma; ora se un accurato esame della radula della

*V. pellucida tipica* non la dimostrerà uguale a questa della var. *bellardii*, io credo che questi caratteri anatomici differenti, concordanti con differenze abbastanza notevoli nella forma della conchiglia, dovranno far considerare come specie distinta questa forma che per ora considero come semplice varietà, ed allora essa dovrà prendere il nome di *Vitrina bellardii*.

Questa conchiglia è trasparentissima, liscia, pochissimo e finissimamente striata, eccettochè presso la sutura dove le strie son molto fitte e più profonde. La spira è assai più depressa che nella *V. pellucida*, mentre al di sotto la conchiglia è molto più globosa, e la bocca è assai meno larga e più alta. Per apprezzare questi caratteri basta dare uno sguardo alle figure 30 e 31 che rappresentano la figura tipica e la var. *bellardii*.

Il colore di questa varietà mi sembra debba essere simile a quella della var. *beryllina* Pfr., la quale però sembra distinguersi dal tipo soltanto per la sua colorazione, e che appare piuttosto una mutazione individuale, trovandosi qua e là frammista cogli individui tipici, non però in Piemonte dove non credo sia mai stata trovata finora.

La *V. pellucida* si trova in tutte le valli delle nostre Alpi a cominciare da quella della Toce fino a quella del Po; negli Apennini; nelle colline di Valmadonna presso Alessandria e sulle rive boscose del Ticino. Dalla pianura si eleva sino oltre i 2500 metri.

## Sez. III. — **OLIGOLIMAX** Fischer.

Animale che può ritirarsi nella sua conchiglia e chiudervisi con un epifragma. Senza semi-cappuccio visibile. Conchiglia striata, orbicolare, umbilicata.

### Vitrina annularis

Fig. 32.

*Hyalina annularis*, Venetz, 1820 in Studer Kurz. Verzeichn. p. 86.
*Helicolimax annularis*, Fér. 1821, Tabl. Syst. p. 25, Hist. pl. IX, f. 7.
*Vitrina annularis*, Gray 1825, in Ann. phil. IX, p. 409.
» *subglobosa*, Michaud 1831, Compl. hist. moll. I, p. 10, pl. XV, f. 18-20.

Questa conchiglia assai facile a distinguere dalle altre specie dello stesso genere per il suo aspetto più eliciforme e per la molto più pronunciata striatura. fu assai bene descritta ma pessimamente figurata da Moquin-Tandon (Hist. moll. tav. VI, f. 37-40). La figura di Férussac quantunque meno cattiva, non basta a darne una esatta idea perchè anch'essa esagera assai la larghezza della bocca e le dà una posizione troppo orizzontale, inoltre non segna neppure la perforazione umbilicale che tuttavia è ben visibile in questa specie. Le figure che Kobelt dà di questa specie e della *V. servainiana* (Iconogr. f. 1406-1407), che io dubito assai sia la stessa specie, sono di poca utilità perchè non avendo egli data la figura della conchiglia veduta di fronte non si può avere un'idea della forma dell'apertura e delle sue proporzioni rispetto al resto della conchiglia. Gli esemplari piemontesi concordano assai più colla descrizione che egli dà della *V. servainiana* Saint-Simon che con quella della *V. annularis*, soprattutto per le proporzioni della larghezza per l'altezza della conchiglia; quanto allo svolgersi della spira esso è più rapido che in quest'ultima ed un po' meno che nella prima. Del resto lo stesso Saint-Simon dubita ora della validità della sua specie (1), ed io credo che si verrà alla fusione di questa colla *V. annularis*. Negli esemplari piemontesi osservai in individui della stessa località variazioni abbastanza notevoli non solo nell'elevazione e nello svolgersi della spira più o meno rapido, ma anche nella striatura che in alcuni è pronunciatissima a costoline arrotondate, regolari e serrate le une contro le altre; in altri esse sono più distanti e disuguali; in altri infine la conchiglia è assai liscia e di poco più striata che la *V. pellucida*.

In Piemonte finora fu trovata al Sempione 2100$^{m}$ (Stabile); a Morasco in Val Formazza (Camerano); in tutto il bacino di Aosta da 550 a 1600$^{m}$ (Pegorari); sopra Balme nella Valle della Stura di Lanzo, 2000$^{m}$ (Stabile); nella Valle della Dora Riparia sopra Ferrere, 600$^{m}$ (Camerano) ed al Monte Tabor 2000$^{m}$ (Piolti); Ronches al Mon Cenisio (Blanc); nella Valle del Po, pascoli alpini sopra Crissolo, 1600-1800$^{m}$ (Stabile).

Il signor Westerlund descrisse una *V. bicolor* (Ofvers. Kgl. Vetensk. Förh. 1881, p. 51) delle Alpi e dei Pirenei, ma non

(1) Vedi Locard *Catal. Moll. France*, 1882, p. 24 in nota.

avendo ancora potuto aver sott'occhio la sua descrizione non so se questa specie si debba riferire a qualcuna delle forme sopra descritte.

Quanto alla *V. membranacea* e *V. hiemalis* di Koch (Zeitsch. A. Deutsch-Oesterr. Alpenver. VII, p. 217 e 218) delle Alpi Retiche non sembrano trovarsi nelle Alpi occidentali.

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1, 2, 3, 4, *V. goeotiformis* Pollonera.
» 5, 6, 7, *V. nivalis* Charp. di Bex.
» 8, 9, 10, *V. charpentieri* Stab. del Sempione.
» 11, 12, 13, *V. nivalis* var. *piniana* Poll. di Castel See.
» 14, 15, 16, *V. diaphana* Drap. del Col d'Ollen.
» 17, 18, 19, *V. villae* Poll. di Lombardia.
» 20, 21, 22, *V. glacialis* Forbes del Cantone di Vaud
» 23, 24, 25, 26, *V. pegorarii* Poll. di Aosta.
» 27, 28, 29, *V. stabilei* var. *locardi* Poll. di Balme.
» 30, *V. pellucida* Müll. di Vallestretta.
» 31, *V. pellucida* var. *bellardii* Poll. di Aosta.
» 32, *V. annularis* Venetz di Morasco.
» 33, 34, 35, *V. stabilei* Lessona del Pian del Re.
» 36, 37, 38, *V. maior* Drap. del Delfinato.
» 39, *V. pellucida* var. *bellardii* Poll., radula.
» 40, 41, 42, *V. goeotiformis* Poll., mandibola, organi genitali, radula.
» 43, 44, 45, *V. pegorarii* Poll., mandibola, radula, organi genitali.
» 46, *V. stabilei* Less., organi genitali.
» 47, 48, *V. maior* var. *blanci*, Poll. di Limone.
» 49, 50, 51, 52, *V. pellucida*, tipica, organi genitali, radula e mandibola; figure riprodotte da Lehmann, leb. Schneck. Pommern, tav. IX, f. 12.

Il Socio Conte Prof. T. Salvadori legge il seguente suo lavoro

# INTORNO
## AD UNA
# SPECIE DI FALCO
## NUOVA PER LA FAUNA ITALIANA.

Il Dott. Martorelli, già Professore di Storia Naturale nel Liceo di Sassari in Sardegna, mi mostrava, non ha guari, un bellissimo disegno fatto da lui, di un Falcone femmina, che era stato ucciso nelle vicinanze di Sassari, su alcune roccie a picco sul mare, nel Giugno del 1882, e che ora si conserva nel Museo di quella Università.

Dalla figura di quell'esemplare io non potei farmi un' idea certa della specie cui esso fosse da riferire, per cui scrissi al Professore Fanzago, direttore del Museo di Sassari, di volermelo inviare, per poterlo studiare con diligenza. Il Prof. Fanzago aderiva di buon grado al mio desiderio, della quale cortesia gli sono gratissimo; ma anche coll'esame dell'esemplare, non riuscii a determinarlo, sembrandomi differente da tutti quelli a me noti, per cui risolsi d'inviarlo in Inghilterra al Gurney, conoscitore sovra tutti degli uccelli di Rapina, e creatore del Museo di Norwich, ove si trova adunata la più bella e la più ricca collezione di Rapaci che esista.

Il Gurney, esaminato il Falcone, mi scriveva quanto segue: « Io considero il Falcone come un giovane del *Falco punicus* di Levaillant jun., l'adulto del quale è figurato nell'opera *Exploration de l'Algérie*, pl. 1, e che secondo me è la razza settentrionale o *subspecies* del *F. minor*. L'esemplare inviatomi è un poco più piccolo, rispetto alle dimensioni dell'ala e del tarso, delle fem-

mine ch'io ho prima d'ora esaminate, ma ciò è da attribuire all'essere quell'esemplare molto giovane ».

Lo stesso Gurney (*Ibis*, 1882, p. 309-321) discorre a lungo del *F. punicus*, il quale abita il Marocco, l'Algeria e la Tunisia, è stato trovato in Spagna e nelle isole Baleari, è stazionario nell'Asia minore e si estende anche in Persia, dove dal De Filippi è stato raccolto un esemplare che si conserva nel Museo di Torino; questo fu attribuito dal De Filippi (*Viaggio in Persia*, p. 345) al *Falco peregrinus*, mentre il Blanford (*Eastern Persia*, II, p. 102) lo ha riferito dubitamente al *Falco barbarus* ed il Gurney (*Ibis*, 1882, n. 310) ha sospettato invece che appartenesse al *F. punicus*, e secondo me giustamente, giacchè esso somiglia moltissimo all'esemplare di Sardegna sovra menzionato, differendone soltanto per le parti superiori più chiare, meno nereggianti, per le parti inferiori meno rossigne e con macchie nere meno cospicue, pel mustacchio nero meno largo e per le piume del sottocoda con macchie nericcie a V, e non con tre o quattro fascie nere trasversali alquanto appuntate sul mezzo del margine inferiore.

Non è improbabile che questa non sia la prima volta che questo Falcone è stato osservato in Italia, giacchè il Vian (*Rev. et Mag. de Zool.* 1867, p. 174) scrive di avere un *Falco* che egli chiama *peregrinoides* (*Falco communis minor*, Schleg.), e che il Dresser riferisce al *F. minor* (= *F. punicus* in parte), ucciso nelle vicinanze di Milano nell'Aprile del 1867.

Nella *Fauna d'Italia*, p. 310, io feci notare come il Vian non dicesse da chi aveva ricevuto quel Falcone, e come perciò mi sembrasse prudente di attendere ulteriori prove prima di ammettere quella specie fra le italiane. Anche il Gurney (*Ibis*, 1882, p. 310, nota) fa osservare che la identificazione di quell'esemplare è cosa incerta. Tuttavia avendo ora riletto attentamente la descrizione dell'esemplare del Vian, mi pare che esso appartenga veramente al *F. punicus*, la quale cosa viene avvalorata dalla considerazione che il Vian dice di riferire quell'esemplare di Lombardia alla stessa specie cui appartengono certi Falconi di Algeria che egli aveva ricevuti dal Loche col nome di *F. barbarus*, e noi sappiamo che con questo nome il Loche chiamava appunto il *Falco punicus*. Resta a sapersi soltanto se la provenienza di quel Falcone sia esatta.

Il Giglioli nell'*Avifauna Italiana* annovera (Sp. 25$^{bis}$) anche il *F. minor*, ma più recentemente nell'*Elenco delle specie di*

*Uccelli che trovansi in Italia*, p. 107 dice: « Havvi una certa confusione fra questa specie (*Falco barbarus*) ed il così detto *Falco minor*, specie che non saprei distinguere fra i Falconi europei e che ebbe più volte per base individui maschi e piccoli del *Falco communis* ».

Dopo ciò ora soltanto, dopo la cattura dell'esemplare di Sardegna sopra menzionato, possiamo dire con certezza che il *Falco punicus* fa parte dell'Avifauna italiana.

Questa specie somiglia più che a qualunque altra al *F. minor*, Bp. dell'Africa meridionale, ma somiglia anche al *F. barbarus*, Linn. ed al *F. peregrinus*, Tunst.

Disgraziatamente i materiali che esistono nel Museo di Torino, sono molto scarsi, mancandovi affatto il *F. minor*, ed essendoci un solo esemplare adulto del *F. barbarus* ed un solo esemplare in abito imperfetto del *F. punicus*, quindi io non sono in grado di indicare con precisione i caratteri che distinguono il *F. punicus* dalle altre tre specie menzionate. Da quanto ho potuto raccogliere sembra che il *F. punicus* si distingua dal *F. minor* adulto pel colore generalmente rossigno della cervice, per le parti inferiori rossigne con fascie trasversali scure meno regolarmente disposte e per le dimensioni alquanto maggiori; dal *F. barbarus* pel colorito più scuro, pei mustacchi molto più larghi, per le fascie trasversali scure delle parti inferiori più distinte, per le dimensioni pure maggiori, e finalmente dal *F. peregrinus* per la cervice generalmente rossigna per le parti inferiori più rossigne e per le dimensioni minori. Tuttavia si noti che, secondo quanto mi scrive recentemente il Gurney, il *maschio* del *F. punicus* somiglia tanto alla *femmina* del *F. barbarus* da poterlo distinguere soltanto mediante la dissezione che ne faccia constatare il sesso, e che la *femmina* del *F. punicus* somiglia tanto al *maschio* del *F. peregrinus* da poterla distinguere soltanto collo stesso mezzo.

L'esemplare figurato da Levaillant (fig. cit.) ha le parti superiori grigio-brune, compresa la nuca, ove non si osserva traccia di color rossigno; in esso le parti inferiori sono rossigne con poche macchie lineari lungo lo stelo delle piume del petto, e con macchie nericcie disposte a fascie sull'addome, sulle tibie e sul sottocoda.

Secondo il Gurney il *F. punicus* avrebbe le seguenti dimensioni:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Maschi* | ala poll. ingl. | 11,25–11,60 | (= 0$^{m}$,286–0$^{m}$,296) |
| | tarso | 1,50– 1,80 | (= 0$^{m}$,038–0$^{m}$,045) |
| | dito medio *sine ungue* | 1,80– 2,00 | (= 0$^{m}$,045–0$^{m}$,051) |
| *Femm.* | ala | 13,00–13,30 | (= 0$^{m}$,330–0$^{m}$,337) |
| | tarso | 1,80– 2,00 | (= 0$^{m}$,045–0$^{m}$,051) |
| | dito medio *sine ungue* | 2,00– 2,10 | (= 0$^{m}$,051–0$^{m}$,054) |

La femmina giovane uccisa presso Sassari può essere descritta nel modo seguente: Parti superiori nere colle piume del dorso, del groppone, del sopraccoda e delle cuopritrici delle ali marginate di bruno-rossigno; le penne del sopraccoda hanno i margini più larghi e più chiari; cervice variegata di rossigno-ocraceo, il quale colore forma una fascia semilunare sul margine posteriore del pileo, e sulla cervice due fascie laterali, variegate di nero, limitanti un'area nera mediana; lati della testa e mustacchi molto larghi neri; gola e parte posteriore delle gote bianchiccie con strie nere; petto ed addome di colore rossigno-ocraceo con grandi macchie nere che occupano la maggior parte della piuma; sui fianchi le macchie prendono forma di fascie trasversali; parte inferiore dell'addome e sottocoda bianco-fulviccio, l'addome con macchie longitudinali nere ed il sottocoda con tre o quattro fascie nerastre trasversali, alquanto appuntate lungo lo stelo dalla parte verso l'apice; remiganti con macchie trasversali rossigne sul vessillo interno: cuopritrici inferiori delle ali rossigno-ocracee con macchie nere; timoniere nero-grigiastre con l'apice bianchiccio e con sei serie di macchie rossigne circondate di grigio, su ambedue i vessilli, tranne la prima timoniera che ha sette macchie trasversali rossigne soltanto sul vessillo interno; becco nero azzurrognolo, cera e palpebre azzurrognole; piedi giallo-verdastri.

Lungh. tot. 0$^{m}$,430: al. 0$^{m}$,315; coda 0$^{m}$,150; becco 0$^{m}$,023; tarso 0$^{m}$,043; dito mediano senza l'unghia 0$^{m}$,050.

Aggiungo alcune citazioni che sono riferibili a questa specie:

## **Falco punicus**, Levaill.

*Falco punicus*, Levaill. jun., Expl. Algér. Ois. pl. 1 (1850) ad. — Gurney, Ibis, 1882, p. 309-321, 437.

*Falco peregrinus*, De Fil. (nec Tunst.), Viaggio in Persia, p. 345 (1865).

*Gennaia barbara*, part., Loche, Expl. Algér. Ois. p. 55 (1867).

*Falco peregrinoides*, Vian (nec Temm.), Rev. et Mag. Zool. 1867, p. 174 (Lombardie). — Salvad., Fauna d'Italia, Ucc., p. 310 (1872).

*Falco barbarus*, Blanf. (nec Linn.), Geol. and Zool. of Abyss. p. 288 (1870) (Abissinia). — Sharpe, Cat. B. I, p. 386 (1874) partim. — Blanf. (nec Linn.), East. Pers. II, p. 102 (1876) (Persia).

*Falco minor*, part., Dresser, B. of Eur. VI, p. 43 (1876).

Chiudo questa mia breve nota invitando gli Ornitologi italiani a voler studiare attentamente le varie specie di Falconi, che si trovano nella penisola, ma per fare ciò utilmente è necessario raccoglierne il maggior numero possibile di esemplari, specialmente nelle Isole di Sardegna e di Sicilia, ove è probabile che s'incontrino più frequentemente di quello che non si creda il *F. punicus* ed il *F. barbarus*.

---

*L'Accademico Segretario*

A. Sobrero.

# CLASSI UNITE

# CLASSI UNITE

**Adunanza del 3 Febbraio 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

In questa adunanza l'Accademia elegge a suo rappresentante nel Consiglio amministrativo del Consorzio Universitario il Comm. Prof. Michele LESSONA, Socio della Classe di Scienze fisiche e matematiche.

*Gli Accademici Segretari* { ASCANIO SOBRERO
GASPARE GORRESIO.

# SOMMARIO

—

## Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.


SACCO — Nuove specie fossili di Molluschi lacustri e terrestri in Piemonte . . . . . *Pag.* 247

SEGRE — Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque . . » 265

GUIDI — Dell'azione del vento contro gli archi delle tettoie . . . . » 283

BIZZOZERO — Relazione di un lavoro del Prof. L. GRIFFINI intitolato: « *Contribuzione alla patologia dell'epitelio cilindrico* » . . . . . » 291

BRUGNATELLI — Sulla composizione di una roccia pirossenica dei dintorni di Rieti . . . . . » 292

BATTELLI — Sui sistemi catottrici centrati . . . . . » 297

DORNA — Lavori dell'Osservatorio astronomico di Torino . . . . . » 320

SIACCI — Presentazione di un opuscolo del sig. E. NARDUCCI . . . » 321

POLLONERA — Monografia del Genere *Vitrina* . . . . . » 322

SALVADORI — Intorno ad una specie di Falco nuova per la fauna italiana . . . . . » 343


## Classi Unite.


ELEZIONE del Comm. Prof. Michele LESSONA a rappresentante nel Consiglio amministrativo del Consorzio Universitario . . . . . » 351

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

VOL. XIX, DISP. 4ª (*Marzo* 1884)

---

**Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.**

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

# CLASSI UNITE

Marzo

1884.

# CLASSI UNITE

**Adunanza solenne tenuta il 9 Marzo 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

L'Accademia riunitasi in solenne adunanza per commemorare il primo centenario dalla sua istituzione, il Presidente Comm. Prof. Ariodante Fabretti apre la seduta col seguente Discorso:

*Onorandi Colleghi*,

Se nelle città nostre si succedono frequenti le commemorazioni di uomini illustri o si celebrano i ricordi di grandi avvenimenti, ai detrattori o ai dimentichi del passato si fa manifesto, che la storia italiana è ricca di gloriose memorie: nè solo di memorie di prosperi casi e di fortunose vicende, che mutano la vita dei popoli, o di condottieri che nelle armi spiegarono ardimento e valore, ma eziandio dei portati della scienza e della vita di quelle istituzioni, che per lunga serie di anni furono centro di operosità scientifica. Non meno delle clamorose pruove, che spesso abbagliano i volghi e conferiscono allori caduchi, valgono i quieti esperimenti del chimico e del fisiologo e le silenziose speculazioni del pensiero, che alle società civili recano alleviamento e conforto. Del resto anche la scienza ha combattuto le sue battaglie, che furono alla umanità benefiche e soccorritrici, non disastrose nè lamentabili; ebbe i suoi martiri la scienza, ma, vincitrice sempre, non indietreggiò mai, e nelle soste, talvolta prudenti, si preparò e fortificò per aprire le vie che adducono alla conquista del vero.

E qui, o Colleghi, in questa nobile sede, uomini infervorati nel bene e nell'onesto coltivarono con onore gli studii, e delle loro ricerche e scoperte e disquisizioni molteplici e svariate fecero partecipi, per via di non interrotte pubblicazioni, quanti si affaticano nella conoscenza delle leggi che governano la materia nelle sue trasformazioni, o ricercano le ragioni a spiegare il progredire dei popoli nella civiltà e come sorgono o s' inabissano gl'imperi per non risorgere mai più. Al compiersi dell'anno 1883 la Reale Accademia delle Scienze ha compiuto l'anno centesimo della sua esistenza. Ricordare la origine di questo scientifico Istituto e dire delle sue vicende, del suo accrescimento e del suo splendore è dovere in que' che si trovano depositari del patrimonio scientifico accumulato dai nostri predecessori.

Qui, come altrove, in Italia e fuori, per opera dei cultori delle scienze matematiche, fisiche e naturali, le menti raddirizzate dalle nuove dottrine filosofiche accennavano e volgevansi agli studii sperimentali: essere opportuno *provare* e *riprovare*, anzichè rimaner fermi nella cieca venerazione di un passato lontano e sottostare a dommi e a teorie non discussi nè sofferenti la discussione. La parola sapiente di Ruggero Bacone, mal compresa nel medio evo, aveva finalmente consigliato metodi nuovi allo studio dei fenomeni della natura: *sine experientia nihil sufficienter sciri potest.* Sì, come a Roma, pochi uomini, cui sorrideva la libertà del pensiero, fin dal principiare del XVII secolo convenivano appo il principe Federico Cesi e fondavano l'*Accademia dei Lincei*, e poco dopo (1657) altri egregi, continuatori delle dottrine del Galilei, si raccoglievano a Firenze nell'*Accademia del Cimento*, così in questa città di Torino Luigi De la Grange e Giovanni Francesco Cigna si davano convegno nella casa di Giuseppe Angelo Saluzzo di Monesiglio, cui i militari uffici non impedivano di salire a meritata fama nelle scienze positive. Correva l'anno 1757; ed a questi valentuomini torinesi, pieni di giovanile entusiasmo e di fermo volere, altri si associavano nel comune intento di cooperare ai progressi dell'umano sapere con la discussione dottrinale e con le disquisizioni scientifiche, separando la ragione dalla fede, con la prudenza di chi sa quali contrasti s'incontrano nel combattere gli errori, che il prestigio del tempo faceva rispettabili.

Ed ecco entrare nell'arringo, l'un dopo l'altro e in così nobile compagnia, Giovanni Battista Gaber, Ambrogio Bertrandi, Lodovico Richeri, Carlo Allioni, Francesco Daviet de Foncenex, nel 1759 uscire il primo volume delle *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis*. Siffatta pubblicazione trova sollecitamente un protettore nel principe ereditario Vittorio Amedeo; e la società privata, divenuta società regia, continua l'opera sua, mettendo in luce altri quattro volumi col titolo di *Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin*, dall'anno 1759 al 1783; nel qual tempo essendosi accresciuta di numero e fortificata dell'opera di altri dotti subalpini, a cui si consociavano alcuni scienziati stranieri, quali l'Eulero, il Dalembert, il Laplace, il Condorcet, salse sollecitamente a tanta e meritata fama, che nell'anno 1783 da Vittorio Amedeo III, fatto re e non dimentico dei consigli dell'abate Gerdil, ottenne il titolo di *Reale Accademia delle Scienze* e acquistò insiememente il carattere di una istituzione dello Stato.

Era tale atto un luminoso trionfo della scienza; la quale, per quantunque male apprezzata dagl'ignavi, combattuta da coloro, che temono la diffusione del vero, e messa in dubbio da non benevole insinuazioni di sospettosi sodalizi, sospingeva gli Accademici a percorrere un più ampio e spedito cammino ed a pubblicare altri cinque volumi di memorie, dall'anno 1784 al 1791, ossia nel tempo in cui si andavano preparando quei portentosi avvenimenti, che dovevano mutare le condizioni politiche di Europa. Le nuove dottrine sociali avevano rallentati i vincoli, che i popoli tenevano uniti ai principati; gli apostolati diversi e contrarii provocavano per ogni dove sollevamenti e repressioni; e la rapidità degli eventi rendeva gli animi concitati, tra le speranze e i timori, certo non accomodati alle scienze speculative e sperimentali. Attraverso alle quali vicissitudini la nostra Accademia, giovane ancora, stette illesa; ma se non andò travolta nel turbinio delle passioni politiche, sospese per altro dal 1792 al 1800 le sue pubblicazioni.

Sotto la bandiera della Repubblica francese, nell'anno 1801, l'Accademia torinese iniziava un periodo novello, e vedeva allargato il campo alla sua attività; imperocchè alla classe delle

scienze matematiche, fisiche e naturali si aggiungeva quella di letteratura e belle arti. Raddoppiato il numero, i soci furono portati a quaranta.

Le ricerche archeologiche e storiche, le indagini intorno agli antichi linguaggi e le controversie degli economisti preoccupavano le menti: erano scomparsi od obliati quei convegni di letterati, che per modestia o a dileggio di se medesimi, ambivano chiamarsi *neghittosi*, *insensati*, *sonnolenti:* le lettere ripigliavano la loro missione civile, ringagliardite dal Muratori e dal Maffei, dal Parini e dall'Alfieri: nella stessa Arcadia romana, beata della sua impotenza, si faceva udire la maschia poesia di Vincenzo Monti.

Gli uomini egregi, che si accoglievano in questo stesso edificio, in cui noi siamo, conceduto all'Accademia e mantenutole successivamente, non era impari all'altezza, cui ascendeva la scienza nell'Europa civile. Essi pubblicarono nel 1803 due volumi, col titolo di *Mémoires de l'Académie des sciences, de Littérature et Beaux Arts de Turin;* e queste pubblicazioni continuarono di anno in anno insino al 1813. Nel qual tempo, oltre il conte di Saluzzo, primamente ricordato, aveva presieduto alle adunanze accademiche Carlo Lodovico Morozzo, e quindi di sei in sei mesi (un presidente per ciascuna classe) Benedetto Bonvicino, Anton Maria Vassalli Eandi, Michele Spirito Giorna, Tommaso Valperga di Caluso, Emanuele Bava di S. Paolo, Gian Francesco Napione, Vincenzo Tarino, finchè (il 25 febbraio 1804) a presidente perpetuo fu acclamato Napoleone Bonaparte, allora primo console della Repubblica francese; il quale, coperto della clamide imperiale, e soggiornando un anno dopo a Stupinigi (aprile 1805) e memore della onoranza ricevuta, al marchese Ottavio di Barolo, che a nome dell'Accademia facevagli ossequio, diede addirittura il titolo di vice-presidente « imperocchè, egli disse, credo d'esser io il presidente nominato dall'Accademia ».

A doppio titolo l'Accademia riceveva il battesimo *imperiale.* Ad essa erano aggregati in tra gli altri Cesare Saluzzo, Carlo Botta, Carlo Denina, Jacopo Durandi, Giuseppe Vernazza di Freney, Vittorio Michelotti, Prospero Balbo, Giacinto Carena e Giovanni Plana, cui la città di Voghera, memore del valore di lui, spiegato soprattutto nella *Teoria del movimento della luna*, ha testè solennemente commemorato, ritraendone in marmo la imagine. Erano soci nazionali Lazzaro Spallanzani e Alessandro Volta, Melchiorre

Cesarotti, Luigi Lanzi e Ippolito Pindemonte; e de' soci stranieri giova ricordare Otto Federico Müller, Beniamino Franklin, Roggero Giuseppe Boscovich, Orazio Benedetto di Saussure, Giuseppe de Lalande, Federico Guglielmo Herschel, Giacomo Edoardo Smith, Giovanni Antonio Chaptal, Bernardo de la Ville de Lacepède, Maria Giuseppe Degerando, Giorgio Cuvier, Pietro Luigi Ginguené, Augusto Decandolle, Antonio Silvestre de Sacy. Nè questi erano i soli, che l'Accademia aveva scelto tra i più reputati e famosi, che nel principiare del nostro secolo onoravano la scienza.

Caduta nel 1814 la fortuna imperiale, e fatta invisibile anche all'astrologia politica la stella Napoleonica, il nostro Istituto salvavasi nei mutati ordinamenti, e non turbato dalle ristaurazioni demolitrici, in virtù della acquistata rinomanza, di cui facevano fede sicura e testimonianza durevole i venti e più volumi fino allora pubblicati. Dopo un anno di lavori sospesi, l'Accademia fu ricostituita (7 agosto 1815), e autorizzata a riprendere nella stessa sede l'esercizio delle sue funzioni in armonia ai regolamenti del 1783; ma ne rimanevano esclusi quei soci, che fossero stati eletti dopo il 1800. Nel numero dei reietti sarebbe incorso il nome di Vittorio Alfieri, se questi nel 1801 non avesse rifiutata la nomina di socio nazionale. In questa ricostituzione le due classi furono mantenute, ciascuna di venti membri, l'una di scienze matematiche, fisiche e naturali, l'altra di scienze morali, storiche e filologiche; e così nel 1816 venne alla luce il ventesimo secondo volume delle *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* per gli anni 1813 e 1814.

D'allora in poi i dotti del Piemonte trovarono nell'Accademia torinese il modo di spiegare la loro attività scientifica, comunicando le risultanze di esperimenti nuovi e dissertando sopra argomenti che rientrano nell'ordine degli studi filosofici, storici e letterari. A nessuna parte della scienza mancarono cultori esimî. Nell'Accademia era concentrato in gran parte il lavorìo intellettuale degli uomini di questa regione; e qui, non essendo pubbliche le sedute, era lecito per avventura pronunciare parole, che all'aperto avrebber preso sembianza di colpa, in tempi ad ogni pensamento generoso inadequati. Io non so, se per la indole conservatrice degli istituti accademici, ch'ebbero avversari in ogni età e non sempre senza ragione, abbia mai il nostro fatto mal viso a nuovi trovati dell'ingegno, che talvolta suscitano

invidie o che si annunziano spesso molesti a coloro che immedesimati nel passato nulla veggono oltre il presente o paventano che l'avvenire si avanzi gravido di sociali perturbazioni. Certo però si può dire che l'entrare nell'onorato consesso era facilmente consentito anche ai giovani, che educati ad insegnamenti rinnovellati si preparavano con severo indirizzo a percorrere il cammino delle scienze e delle lettere. Ned è men vero, che per esso la fiamma del sapere fu mantenuta vivissima, diffondendosene la luce nelle città d'Italia ed oltre i suoi naturali confini. Nel 1838 erano quaranta i volumi pubblicati dall'Accademia.

Alle quali pubblicazioni e ad ogni altra occorrenza dell'Accademia sopperiva l'erario dello Stato: gli assegni per decreti regi, dapprincipio non larghi, furono duplicati e triplicati nel 1801, ricondotti a più modesta misura nel 1815, ed aumentati otto anni più tardi dal Re Carlo Felice. I consigli d'amministrazione, saggiamente economi, trovavan modo di provvedere così all'accrescimento del patrimonio accademico, come all'acquisto di materiali scientifici, e d'invitare e incoraggire gli studiosi a discorrere sopra argomenti, che le due Classi credevano alla loro volta meritevoli di essere ricondotti a discussione. E qui cade in acconcio ricordare, non a voi, onorevoli Colleghi, ma ai cittadini torinesi il nobile esempio dato dal Medico Cesare Alessandro Bressa, che morendo istituiva erede delle sue sostanze la reale Accademia delle Scienze, destinate a conferire un premio biennale di dodicimila lire a colui, che, italiano o straniero, avesse di recente pubblicata l'opera più importante in determinati rami dello scibile o promulgata la più interessante scoperta. Cotesto premio conseguirono nell'ultimo sessennio due stranieri e un italiano, Carlo Darwin, Luigi Maria D'Albertis, Hormuz Rassam.

Dinanzi a voi, o Colleghi, non mi è permesso indagare in quale e quanta misura abbiano profittato alle scienze i volumi pubblicati dalla nostra Accademia; chè i volumi degli ultimi trent'anni son cosa vostra. Sì dirò, che in questo periodo di tempo, segnato dalla presidenza di quegli illustri, che furono Giovanni Plana, Federico Sclopis ed Ercole Ricotti, la operosità scientifica del nostro Istituto fu raddoppiata; attalchè i volumi, che uscivano annualmente alla luce, non erano più capaci a con-

tenere la mole degli scritti presentati dai soci in nome proprio e di altrui. Ond'è che nel 1865 si pose mano alla pubblicazione di un'altra serie di volumi col titolo di *Atti dell'Accademia*, ne' quali trovano acconcia sede le meno ampie memorie e note e comunicazioni d'ogni maniera, insofferenti d'indugio. È in gran parte merito vostro, di voi preposti agl'insegnamenti universitari, se elette schiere di giovani bene avviati nelle scienze sperimentali, ci partecipano, con frequente e lodevolissimo esempio, il frutto dei loro studi e delle loro investigazioni.

Onorandi Colleghi, la storia di questo Istituto è parte della storia nazionale: appartengono alla nazione, tra i molti, i nomi venerati di Giuseppe Genè, di Giovanni Antonio Giobert, di Giuseppe Moris, di Giorgio Bidone, di Giovanni Cavalli, di Bartolomeo Gastaldi, di Diodata Saluzzo, di Cesare Balbo, di Alberto Ferrero della Marmora, di Amedeo Peyron, di Luigi Cibrario, di Giuseppe Manno, di Carlo Baudi di Vesme, di Carlo Promis, di Carlo Bon-Compagni, di Giovanni Maria Bertini. Tenete mente agli anni che corsero dal 1815 al 1848; pensate a quegli egregi subalpini, di alcuni de' quali sono qui scolpite le imagini, a quegli uomini che in questa sala e in tempi men propizi al progresso civile si affratellavano nel culto della scienza e nell'aspettazione di una età migliore; ad uomini che, molti o pochi che fossero, nella generale remissione degli animi non ristavano neghittosi, ma confidenti nella ragione dei popoli meglio che nella ragione di Stato, con calcolata prudenza e mantenendo intatti dinanzi al potere i conseguiti diritti, provvedevano, dettando e scrivendo, alla indipendenza della patria comune. Nell'anno 1843, in questa sede, il socio Luigi Provana del Sabbione faceva rivivere, illustrandone i tempi e le vicende, il nome di Arduino marchese d'Ivrea e re d'Italia. Bene auspicato ricordo, che precorse la vagheggiata unità politica della nazione, affermata dal senno popolare, dal valore delle milizie e dal previdente principato Sabaudo. Taluni dei nostri predecessori vissero vita non lunga, tratti innanzi tempo al sepolcro; ma se breve fu la vita loro consumata nell'aggiungere il vero, lunga sarà la vita nella memoria degli uomini.

Tutta la storia della torinese Accademia non è racchiusa nelle mie parole, ma nel volume che vi sta sott'occhi, con l'opera di Colleghi ammannito per questa adunanza commemorativa. In esso

troverete preziosi ricordi, congiunti ai nomi di coloro, che, italiani e stranieri, contribuirono a rendere più splendida la gloria di questo scientifico Istituto; troverete eziandio agevolato il modo a trarre profitto, per interesse scientifico e letterario, delle molteplici opere sparse nei cento volumi delle Memorie e degli Atti accademici.

Poichè tutte le umane istituzioni si conformano ai tempi, e poichè nella età nostra in miglior maniera si cerca diffondere il vero e snebbiare le menti e distruggere errori perniciosi, così voi provvedeste a rendere pubbliche le nostre adunanze e portare una riforma nello statuto fondamentale dell'Accademia, che, sancito nel 1783, non era più in armonia con le mutate consuetudini e con le esigenze della scienza.

Ma un altro provvedimento si attende da voi, suggerito dalla importanza della nostra biblioteca, oggi ordinata meglio che per lo innanzi non fosse. Molti tesori vi giacciono quasi infruttuosi: rarità di opere commendevoli, manoscritti preziosi e una ricchissima suppellettile di atti e memorie di Accademie di ogni paese, che nelle altre biblioteche sono talvolta invano desiderate e richieste. Non sarebbe egli opportuno aprire in più larga misura l'adito a coloro che si accingono a lavori speciali, che restano taluna fiata interrotti per deficienza di opere necessarie, indispensabili? I giovani studiosi, soccorsi nei modi che rendono le ricerche meno difficili, fatti securi di oltrepassare la metà del cammino in cui sono entrati, trarranno profitto di tanto patrimonio, che l'Accademia ha saputo, per virtù sua e per generosità di alcuni, ammassare in un secolo di vita. Le ricche collezioni, con paziente cura formate, di Carlo Caissotti di Verduno, di Carlo Vidua, di Giacinto Carena, di Costanzo Gazzera, di Giovanni Plana e di Federico Sclopis qui si conservano avidamente ricercate.

A noi, rispettabili Colleghi, è giunto lieto il giorno di chiudere il centesimo anno di vita di questa Reale Accademia; a voi, che perdurate con fermezza di volontà negli studi, spetta l'onore di aprire il secolo novello, continuatori di lavoro fecondo. Grazie alla libertà vivificatrice delle nazioni, grazie alla libertà conquistata alla scienza, voi potete fiduciosi proclamare la verità senza il rammarico di dover dire un giorno a voi stessi:

« io mi son fatto del male, perchè volli alla umanità procacciare il bene ».

Con rapida progressione le scoperte moltiplicano le scoperte; si disvelano i secreti della natura, sprigionandone le forze misteriose e latenti; e nel nome della scienza si affratellano i popoli disseminati sulla terra. Ciò che oggi parrebbe insania lo escogitare sarà vero la dimane. Non era delirio di mente inferma la parola di quel frate inglese, ricordato più sopra, che prima del 1300, fidente nella quasi onnipotenza dell'uomo, diceva essere possibile alle leggi della fisica e della meccanica, che vascelli guidati da un sol uomo solcassero i mari con maggiore velocità, che se fossero bastimenti pieni di numeroso equipaggio: *ut naves maxime fluviales et maritimae, ferantur, unico homine regente, maiori velocitate quam si essent plenae hominibus navigantibus;* e che potrebbersi costruire veicoli che senza aiuto di cavalli divorassero la via con incredibile celerità: *currus etiam possent fieri ut sine animali moveantur cum impetu inaestimabili.* Sconfinato è il campo aperto alla diritta osservazione e allo studio perseverante dei savi. Ai quali, se arrestati per via da ostacoli imprevisti, se turbati dai malvagi, se negletti dai molti, sovverranno le parole di Silio Italico:

Explorant adversa viros, perque aspera duro
Nititur ad laudem virtus interrita clivo.

Il Socio Comm. Prof. G. Curioni legge il seguente suo lavoro

SULLA

# POTENZA CONGIUNTIVA LONGITUDINALE

## NELLE TRAVI

### SOLLECITATE DA FORZE PERPENDICOLARI AI LORO ASSI.

1. *Assunto di questo lavoro.* — Scopo di questa nota è di stabilire le formole mediante le quali, nelle travi di altezza costante o variabile e sollecitate da forze perpendicolari ai loro assi, si possa giungere alla determinazione di quella resistenza allo scorrimento che la materia deve presentare in corrispondenza di determinate superficie longitudinali, affinchè lungh'esse non avvengano spaccature; o altrimente, quando sulle dette superficie vi ha interruzione di continuità, quale e quanta resistenza devono presentare i mezzi di congiungimento delle due parti della trave, affinchè le cose si passino come se l'interruzione di continuità non esistesse.

La determinazione dell'accennata resistenza o potenza congiuntiva e della massima importanza nello studio delle travi composte, e segnatamente nell'esecuzione delle chiodature per le travi in ferro; e, a motivo dell'indiscutibile sua utilità pratica, s'insegnerà a fare tale determinazione, non con formole soltanto, ma colla costruzione dei relativi diagrammi.

2. *Richiamo della formola che dà la resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, in un punto qualsiasi della sezione retta di un solido elastico sollecitato da forze perpendicolari al suo asse.* — Ritenendo che il piano di sollecitazione tagli tutte le sezioni rette del solido secondo un asse

principale centrale d'inerzia, essendo $DEFG$ (Fig. 1) la sezione retta che vuolsi considerare, $C$ il suo centro di superficie, $xCx'$ ed $yCy'$ i suoi due assi principali centrali d'inerzia assunti come assi coordinati e $zCz'$ il terzo asse coordinato loro compagno diretto secondo l'asse del solido, e coincidendo coll'asse $yCy'$ la traccia sulla sezione $DEFG$ del piano di sollecitazione, se chiamansi:

$y$ la distanza $\overline{mp}$ di un punto qualunque $m$ della sezione considerata dall'asse $xCx'$;

$I_x$ il momento d'inerzia della stessa sezione rispetto all'ultimo accennato asse;

$\mu$ il momento inflettente o risultante delle coppie prodotte da tutte le forze estrinseche applicate al solido dalla parte della sezione $DEFG$ verso la quale trovasi l'asse positivo delle $z$, ed

$S_l$ la resistenza longitudinale riferita all'unità di superficie, o resistenza normale al piano della sezione $DEFG$, nel punto $m$, si ha la formola

$$S'_l = \frac{y\mu}{I_x}.$$

Nell'applicazione di questa formola (*) conviene aver riguardo ai segni delle quantità in essa contenute. Il momento o coppia $\mu$ si deve ritenere: come positivo quando tende produrre, intorno all'asse $xCx'$, una rotazione da $z$ verso $y$; come negativo quando tende produrre una rotazione in senso contrario, ossia da $z$ verso $y'$. I valori di $y$ appartenenti a punti posti nella parte di sezione retta, la quale è attraversata dalla parte positiva $Cy$ dell'asse $yCy'$, si assumono come positivi; e come negativi i valori di $y$ per punti dell'altra parte della sezione stessa. Tenendo poi conto nel modo indicato dei segni di $\mu$ e di $y$, i valori di $S_l$ possono risultare positivi o negativi; è provocata la resistenza alla pressione nei punti il cui valore di $S_l$ è positivo; la resistenza alla trazione nei punti per cui questo valore risulta negativo.

---

(*) La ragione di questa formola si può trovare in quasi tutti i trattati sulla resistenza dei materiali pei bisogni dell'ingegneria, e segnatamente nel volume I dell'appendice alla mia *Arte di fabbricare*, semprequando si abbia il voluto riguardo all'influenza dei cangiamenti di notazioni e di convenzioni dei segni sui risultamenti finali.

3. *Resistenza allo scorrimento longitudinale.* — Essendo $DEFG$ (Fig. 2) la sezione retta di un solido rettilineo sollecitato come precedentemente si è detto, se si conservano alle lettere $y$, $I_x$ e $\mu$ i significati che loro furono attribuiti nel precedente numero e se considerasi un elemento superficiale $\omega$ nel punto $m$ distante dall'asse $xCx'$ della quantità $\overline{pm} = y$, si ha che la resistenza longitudinale nel detto elemento di superficie è data dal valore di $S_l$ (già stato riportato) moltiplicato per $\omega$, ossia da

$$\frac{y\mu}{I_x}\omega .$$

Se ora immaginasi condotta la retta $IL$ parallela all'asse neutro $xCx'$ e se si indicano, con

$y'$ la distanza $\overline{CK}$, con

$y_1$ la distanza $\overline{CF}$ del punto del perimetro $IFL$, il quale maggiormente dista dall'asse $xCx'$, con

$\sum\limits_{y'}^{y_1}$ una somma estesa a tutti gli elementi superficiali $\omega$ contenuti nel segmento $IKLF$,

si ha che la resistenza longitudinale sul detto segmento, osservando che $\mu$ ed $I_x$ sono quantità costanti per tutti i punti della sezione retta $DEFG$, ammette l'espressione

$$\frac{\mu}{I_x}\sum_{y'}^{y_1}\omega y .$$

Considerando ora la sezione retta $D'F'$ vicina alla sezione retta $DF$ e indicando, con

$\Delta z$ la distanza $\overline{CC'}$ dei centri di superficie delle sezioni stesse, con

$Y$ la forza tagliante relativa alla sezione $DF$,

si vede come il momento inflettente relativo alla sezione $D'F'$ sia

$$\mu + Y\Delta z ,$$

e come per conseguenza la resistenza longitudinale sulla parte

della sezione retta $D'F'$ corrispondente alla parte $IKLF$ della sezione retta $DF$ debba essere data da

$$\frac{\mu + Y\Delta z}{I_x} \sum_{y'}^{y_1} \omega y \, .$$

Segue dal sin qui detto: che il segmento di corpo $IKLFI'K'L'F'$ (Fig. 3), compreso fra le due sezioni vicinissime $DF$ e $D'F'$ (Fig. 2), si può considerare come sollecitato, sulla faccia $IKLF$ dalla forza

$$Q = -\frac{\mu}{I_x} \sum_{y'}^{y_1} \omega y \, ,$$

sulla faccia $I'K'L'F'$ dalla forza

$$Q + \Delta Q = \frac{\mu + Y\Delta z}{I_x} \sum_{y'}^{y_1} \omega y \, ;$$

e che per conseguenza il suo equilibrio non può aver luogo senza che sulla faccia $ILL'I'$ siavi una resistenza $\Delta Q$, la quale si ottiene col dire che deve essere nulla la somma algebrica di tutte le forze sollecitanti il detto segmento parallelamente all' asse $zCz'$, cosicchè risulta l'equazione

$$-\frac{\mu}{I_x} \sum_{y'}^{y_1} \omega y + \frac{\mu + Y\Delta z}{I_x} \sum_{y'}^{y_1} \omega y + \Delta Q = 0 \, ,$$

dalla quale si deduce

$$\Delta Q = -\frac{Y\Delta z}{I_x} \sum_{y'}^{y_1} \omega y \, .$$

Chiamando poi $R$ la resistenza longitudinale riferita all'unità di lunghezza dell'asse del solido in corrispondenza della sezione retta qualunque $DF$, risulta

$$R = -\frac{\sum_{y'}^{y_1} \omega y}{I_x} Y \qquad \ldots\ldots (1).$$

Tenendo conto dei segni di $y$ nel modo già stato indicato nel numero 2, e ritenendo che i valori di $Y$ si debbano considerare come positivi o come negativi secondo che sono rivolti verso $Cy$ verso $Cy'$ (Fig. 2), i valori di $R$ dati dalla formola (1) risultano positivi o negativi, secondo che questa resistenza agisce nel senso delle $z$ positive o nel senso delle $z$ negative, ossia nel senso di $Cz$ o di $Cz'$.

Se poi la linea $LKI$ si confonde coll'asse $zCz'$, la somma $\sum_{y'}^{y_1} \omega y$ acquista per ciascuna sezione retta il suo valore massimo, ed il valore di $R$, acquista pure il suo valor massimo $R_m$ dato da

$$R_m = -\frac{\sum_{y'}^{y_1} \omega y}{I_x} Y \qquad \ldots\ldots (2).$$

La formola (1) sussiste non solo pel caso in cui nella sezione retta qualunque $DEFG$ (Fig. 2 e 3) si considera un segmento $IKLF$ separato dalla sezione intiera mediante la retta $IL$ parallela all'asse neutro; ma anche quando si considera una parte della stessa sezione stralciata mediante una linea qualsiasi $IMKNL$ (Fig. 4) simmetrica rispetto l'asse $yCy'$. In questo secondo caso la somma $\Sigma \omega y$ deve essere estesa alla figura $IMKNLF$; e il punto d'applicazione della resistenza $R$ per l'intiera linea $IMKNL$, atteso la simmetria della linea ultima accennata e delle resistenze elementari componenti la $R$ per rapporto al piano longitudinale di traccia $yCy'$, deve cadere su questa traccia stessa. — Nei casi pratici, la resistenza $R$ quasi sempre deve essere concentrata su due piccole superficie in punti dati $M$ ed $N$ posti su una stessa perpendicolare all'asse $yCy'$, e quindi si può dire che essa è applicata nel punto d'incontro $O$ della retta $MN$ coll'asse medesimo.

4. *Diagramma delle forze R.* — Abbiasi un solido avente per asse la retta $z'C_0z$ (Fig. 5), posto nelle condizioni già ammesse nei precedenti numeri per rapporto alle sue sezioni rette ed alle forze sollecitanti, e vogliasi venire alla costruzione della curva, le cui ordinate rappresentino rispettivamente i valori di $R$ per le diverse sezioni rette del solido stesso in corrispondenza di una curva $K_0KS$.

Per ottenere lo scopo, basta considerare nel solido diverse sezioni rette vicine $D_0F_0$, $D_1F_1$, $D_2F_2$, $D_3F_3$, ....., non dimenticando quelle in cui hanno luogo cangiamenti bruschi di forma e di dimensioni; fare per tutte queste sezioni i valori $Y_0$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, ..... delle forze taglianti $Y$; calcolare i loro momenti d'inerzia $I_{x0}$, $I_{x1}$, $I_{x2}$, $I_{x3}$, .....; e determinare le somme

$$\left[\sum_{y'}^{y_1} \omega y\right]_0, \quad \left[\sum_{y'}^{y_1} \omega y\right]_1, \quad \left[\sum_{y'}^{y_1} y\omega\right]_2, \quad \left[\sum_{y'}^{y_1} y\omega\right]_3, \quad \ldots\ldots,$$

per le parti di sezioni rette rappresentate in $K_0F_0$, $K_1F_1$, $K_2F_2$, $K_3F_3$, ..... Avute queste quantità, si applica la formola (1) del numero precedente per dedurre i valori $R_0$, $R_1$, $R_2$, $R_3$, ..... di $R$. Sopra una retta $C_0z$ (Fig. 6) si portano le distanze $C_0C_1$, $C_1C_2$, $C_2C_3$, ..... delle sezioni considerate; pei punti $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, ... s'innalzano altrettanti perpendicolari alla retta stessa; e, assunta una determinata scala per la rappresentazione delle forze, si portano le lunghezze $C_0R_0$, $C_1R_1$, $C_2R_2$, $C_3R_3$, ... rappresentanti i trovati valori $R_0$, $R_1$, $R_2$, $R_3$, ....., della forza $R$. La linea che passa per le estremità di queste perpendicolari a $C_0z$ è il diagramma delle forze $R$.

Avviene talvolta che le quantità $Y$, $I_x$ e $\sum_{y'}^{y_1} \omega y$, si possono facilmente esprimere in funzione di $z$, e che quindi si possono trovare le equazioni degli accennati diagrammi come risulta dagli esempli svolti nel numero che segue.

5. *Esempli di determinazione analitica del diagramma delle forze R.* — Mi propongo di considerare alcuni esempli di travi orizzontalmente collocate su due appoggi, caricate di pesi e con sezioni rette simmetriche rispetto ai loro assi verticali.

I. *Diagramma delle forze $R_m$ in corrispondenza della superficie determinata dagli assi orizzontali delle diverse sezioni rette di una trave con sezione rettangolare costante, posta sotto l'azione di un peso applicato in un dato punto della sua lunghezza.*

Essendo fatta la trave, come in elevazione ed in sezione trasversale, si vede nella figura 8, si dicano:

$l$ la distanza fra le sezioni rette corrispondenti ai due appoggi $A$ e $B$,

$a$ il lato orizzontale e

$b$ il lato verticale determinante la sua sezione retta,

$p$ la distanza $\overline{C_0 O}$ del punto d'applicazione del peso sollecitante dall'appoggio di sinistra,

$P$ l'intensità del detto peso.

La retta, in corrispondenza della quale si vogliono i valori di $R_m$, è lo stesso asse delle $z$; cosicchè, per essere un rettangolo di lati $a$ e $b$ la sezione trasversale della trave, si ha

$$y' = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{2} b$$

$$\omega = a\,dy$$

$$\sum_{y'}^{y_1} \omega y = \frac{1}{8} a b^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} a b^3 .$$

Chiamando poi:

$R'$ ed $R''$ le reazioni verticali dei due appoggi $A$ e $B$,

$Y_1$ ed $Y_2$ le forze taglianti per una sezione retta qualsiasi $D_1 F_1$ della parte $C_0 O$ e per una sezione retta qualsiasi $D_2 F_2$ della parte $O C_u$ della trave,

$R_{1m}$ e $R_{2m}$ i valori di $R_m$ in corrispondenza dei centri $C_1$ e $C_2$ delle stesse sezioni rette,

si ha: che i valori assoluti delle due reazioni $R'$ ed $R''$ sono dati dalle formole

$$R' = \frac{l-p}{l} P$$

$$R'' = \frac{p}{l} P ;$$

che, per ottenersi la forza tagliante relativa ad una sezione retta qualunque della trave col considerare tutte le forze poste da una

stessa parte della sezione stessa e col prendere la loro somma algebrica, risulta

$$Y_1 = P - R'' = \frac{l-p}{l} P$$

$$Y_2 = -R'' = -\frac{p}{l} P \;;$$

e finalmente che le forze $R_{1m}$ e $R_{2m}$, le quali si deducono dalla formola (2) del numero 3 col porre in essa i valori ora trovati di $\sum_{y'}^{y_1} \omega y$, di $I_x$, di $Y_1$ e di $Y_2$, sono date da

$$\left.\begin{aligned} R_{1m} &= -\frac{3}{2}\frac{l-p}{bl} P \\ R_{2m} &= \frac{3}{2}\frac{p}{bl} P \end{aligned}\right\} \quad (1) .$$

I valori di $R_{1m}$ e di $R_{2m}$ sono costanti; il primo è negativo, il secondo positivo; e si ottiene come segue il diagramma delle forze $R_m$. Condotta la orizzontale $C_0 z$ (Fig. 8) e stabilita la scala delle distanze orizzontali, si prendono $\overline{C_0 O} = p$ e $\overline{C_0 C_u} = l$; fissata la scala delle forze $R_m$ perpendicolarmente a $C_0 z$ si portano le lunghezze $\overline{C_0 C_0'}$ ed $\overline{O O_1'}$ rappresentanti i valori assoluti della forza $T_{1m}$ e le lunghezze $\overline{O O_1''}$ e $\overline{C_u C_u'}$ rappresentanti la forza $T_{2m}$; e nelle due rette $C_0' O_1'$ ed $O_1'' C_u'$, parallele all'asse $C_0 z$ della trave, si ha di diagramma delle forze $R_m$.

Le aree dei due rettangoli $C_0 O O_1' C_0'$ ed $O O_1'' C_u' C_u$ sono le rappresentazioni grafiche delle totali resistenze $R_{1t}$ e $R_{2t}$ provocate dal peso $P$ nelle due parti $O C_0$ ed $O C_u$ (Fig. 7) dello strato delle fibre invariabili, o, più chiaramente, sono le resistenze che si oppongono a che la parte di trave inferiore al detto strato delle fibre invariabili si distacchi dalla parte superiore mentre dura l'azione dello stesso peso $P$. Evidentemente i valori di $R_{1t}$ e di $R_{2t}$ si deducono moltiplicando rispettivamente per $p$ e per $l-p$ quelli di $R_{1m}$ e di $R_{2m}$, ed è nulla la loro somma algebrica.

II. *Diagramma delle forze* R *in corrispondenza dell'unione delle tavole ai ferri d'angolo per una trave in ferro di altezza costante con sezione a doppio* T *simmetrico, sotto l'azione di*

*due pesi operanti in dati punti della sua lunghezza e composta di due tavole unite ad una parete verticale con chiodi e con due coppie di ferri d'angolo.*

Essendo la trave costruita come in modo schematico si vede in elevazione ed in sezione trasversale nella figura 9, si dicano:

$l$ la distanza fra le sezioni rette corrispondenti ai due appoggi $A$ e $B$,

$a$, $a'$, $a''$ ed $a'''$ le dimensioni orizzontali e

$b$, $b'$, $b''$ e $b'''$ le dimensioni verticali determinanti la sua sezione retta,

$p_1$ e $p_2$ le distanze $\overline{C_0 O_1}$ e $\overline{C_0 O_2}$ dei punti d'applicazione dei due pesi sollecitanti dall'appoggio di sinistra,

$P_1$ e $P_2$ le intensità dei detti pesi,

$Y_1$, $Y_2$ ed $Y_3$ le forze taglianti per una sezione retta qualunque $D_1 F_1$, $D_2 F_2$ e $D_3 F_3$ di ciascuna delle tre parti $C_0 O_1$, $O_1 O_2$ ed $O_2 C_n$ della trave,

$T_1$, $T_2$ e $T_3$ i valori di $T$ in corrispondenza dei punti $K_1$, $K_2$ e $K_3$ delle stesse sezioni rette.

La retta, in corrispondenza della quale si vogliono i valori di $R$, è la $RS$ parallela all'asse della trave. Si ha; che

$$y' = \tfrac{1}{2} b'$$

$$y_1 = \tfrac{1}{2} b$$

$$\omega = a\, dy$$

$$\sum_{y'}^{y_1} \omega\, y = \tfrac{1}{8} a\, (b^2 - b'^2)$$

$$I_x = \frac{1}{12} (a\, b^3 - a' b'^3 - a'' b''^3 - a''' b'''^3)\,;$$

che i valori assoluti delle due reazioni $R'$ ed $R''$ sono

$$R' = \frac{(l - p_1)\, P_1 + (l - p_2)\, P_2}{l}$$

$$R'' = \frac{p_1 P_1 + p_2 P_2}{l}\,;$$

che le forze taglianti $Y_1$, $Y_2$ ed $Y_3$ risultano

$$Y_1 = P_1 + P_2 - R'' = \frac{(l-p_1)P_1 + (l-p_2)P_2}{l}$$

$$Y_2 = P_2 - R'' = \frac{-p_1 P_1 + (l-p_2)P_2}{l}$$

$$Y_3 = -R'' = -\frac{p_1 P_1 + p_2 P_2}{l} \;;$$

e che le forze $R_1$, $R_2$ e $R_3$, le quali si deducono dalla formola (1) del numero 3 col porvi i trovati valori di $\sum_{y'}^{y_1} \omega y$, di $I_x$, di $Y_1$, $Y_2$ e $Y_3$, valgono

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{3}{2}\,\frac{a(b^2-b'^2)}{ab^3-a'b'^3-a''b''^3-a'''b'''^3}\,\frac{(l-p_1)P_1+(l-p_2)P_2}{l}\\
R_2 &= -\frac{3}{2}\,\frac{a(b^2-b'^2)}{ab^3-a'b'^3-a''b''^3-a'''b'''^3}\,\frac{-p_1P_1+(l-p_2)P_2}{l}\\
R_3 &= \phantom{-}\frac{3}{2}\,\frac{a(b^2-b'^2)}{ab^3-a'b'^3-a''b''^3-a'''b'''^3}\,\frac{p_1P_1+p_2P_2}{l}
\end{aligned}\right\}(1).$$

I valori di $R_1$ $R_2$ e $R_3$ sono costanti; il primo è negativo; il secondo è negativo o positivo, secondo che si ha $p_1 P_1$ minore o maggiore di $(l-p_2)P_2$; il terzo è positivo; e, supponendo che il valore di $R_2$ sia negativo, il diagramma delle forze $R$ (Fig. 10) è dato dalle tre rette $C_0' O_1'$, $O_1'' O_2'$ ed $O_2'' C_u'$ parallele all'asse $C_0 z$ della trave, costrutte col portare perpendicolarmente alla $Cz$ stessa le lunghezze $\overline{C_0 C_0'}$, $\overline{O_1 O_1''}$ ed $\overline{O_2 O_2''}$ rappresentanti i valori assoluti delle forze $R_1$, $R_2$ e $R_3$.

Le aree dei tre rettangoli $C_0 O_1 O_1' C_0'$, $O_1 O_2 O_2' O_2''$ ed $O_2 C_u C_u' O_2''$ rappresentano rispettivamente le totali resistenze $R_{1t}$, $R_{2t}$ e $R_{3t}$ provocate dai pesi $P_1$, $P_2$ e $P_3$ nello strato $RS$ per le tre porzioni di trave corrispondenti alle parti $C_0 O_1$, $O_1 O_2$ ed $O_2 C_u$ (Fig. 9) del suo asse.

I valori delle stesse resistenze si deducono moltiplicando rispettivamente per $p_1$, per $p_2 - p_1$ e per $l - p_2$ quelli di $R_1$, di $R_2$ e di $R_3$, e risulta eguale a zero la somma $R_{1t} + R_{2t} + R_{3t}$.

Nel caso particolare in cui i due pesi $P_1$ e $P_2$ sono eguali ed in cui si trovano simmetricamente disposti rispetto alla sezione di mezzo della trave, cosicchè

$$p_1 + p_2 = l\,,$$

indicando con $P$ ciascuno dei due pesi e con $p$ la loro distanza dall'appoggio vicino, si ha

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= -R_3 = -\frac{3}{2}\,\frac{a\,(b^2-b'^2)}{a\,b^3-a'\,b'^3-a''\,b''^3-a'''\,b'''^3}\,P \\ R_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2).$$

Quando l'altezza della trave è molto grande in confronto della grossezza delle tavole, e quando, considerando la parete verticale ed i ferri d'angolo come unicamente destinati a mantenere le tavole alla voluta distanza, si crede di poter ritenere per sezione retta della trave quella delle sole tavole costituita da due rettangoli col lato maggiore parallelo all'asse neutro e col lato minore assai piccolo in confronto della distanza dei centri di gravità dei rettangoli stessi dall'asse neutro predetto, dicendo

$s$ la grossezza delle tavole data da $\frac{1}{2}(b-b')$,

si ha

$$\sum_{y'}^{y_1} \omega\, y = \frac{1}{2}\, a\, s\,(b'+s)\,,$$

e, approssimativamente,

$$I_x = \frac{1}{2}\, a\, s\,(b'+s)^2\,.$$

I valori di $R_1$, $R_2$ e $R_3$, dati dalle formole (1), notevolmente si semplificano e si riducono a

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{b'+s}\,\frac{(l-p_1)\,P_1-(l-p_2)\,P_2}{l} \\ R_2 &= -\frac{1}{b'+s}\,\frac{-p_1\,P_1+(l-p_2)\,P_2}{l} \\ R_3 &= \frac{1}{b'+s}\,\frac{p_1\,P_1+p_2\,P_2}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)\,;$$

e, nel caso dell'eguaglianza dei due pesi $P_1$ e $P_2$ e della simmetria dei loro punti d'applicazione per rapporto al mezzo della trave, risulta

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = -R_3 = -\dfrac{l}{b'+s}\,P \\ R_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots (4).$$

Se, invece di considerare lo strato $RS$ (Fig. 9) inferiore a quello delle fibre invariabili, si considera lo strato $R'S'$ superiore, ma simmetrico di $RS$, non cangiano i valori delle quantità che entrano nella formola determinatrice delle forze $R$ ad eccezione di quello della somma $\sum\limits_{y'}^{y_1} \omega\, y$, il quale diventa

$$-\frac{1}{8}\, a\,(b^2 - b'^2)\ ;$$

cosicchè i valori di $R_1$, $R_2$ e $R_3$ pel detto strato sono quelli dati dalle formole (1), (2), (3) e (4) coi segni cangiati.

III. *Diagramma delle forze* R *in corrispondenza dell'unione delle tavole ai ferri d'angolo per una trave in ferro simmetrica rispetto al suo asse verticale, colla sua sezione retta a doppio* T *simmetrico, ma di altezza variabile secondo le ordinate di rette, posta sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sul suo asse e formata di due tavole unite ad una parete verticale con chiodi e con due coppie di ferri d'angolo.*

Essendo fatta la trave come in modo schematico appare in elevazione dalla figura 11, si ritengano le stesse lettere state usate nel precedente problema per indicare le distanze dei due appoggi, le dimensioni orizzontali e verticali della sezione retta, e si dicano:

$s$ la grossezza di una tavola,

$s'$ la grossezza di un ferro, l'angolo nel braccio posto contro la tavola ed

$s''$ la lunghezza del suo lato posto contro la parete verticale, misurata nella sezione retta del ferro d'angolo stesso;

$\alpha$ gli angoli acuti che le rette $K_0H$, $K_uH$, $K_0'H'$ e $K_u'H'$, in corrispondenza delle quali si vogliono i valori di $R$, fanno coll'asse $C_0z$,

$c$ le lunghezze delle ordinate $\overline{C_0 K_0}$, $\overline{C_0 K_0'}$, $\overline{C_u K_u}$ e $\overline{C_u K_u'}$,
$e$ le lunghezze delle ordinate $\overline{OH}$ ed $\overline{O'H}$
$q$ il peso riferito all'unità di lunghezza dell'asse della trave,
$R'$ la reazione di ciascuno dei due appoggi $A$ e $B$,
$Y$ la forza tagliante per la sezione retta qualunque $DF$.

Per l'accennata sezione retta qualunque $DF$, al cui centro $C$ corrisponde l'ascissa $\overline{C^0 C} = z$, si ha: che l'equazione della retta $K^0 H$, le cui coordinate correnti sono $z$ e $v$, è

$$v = c + z \text{ tang. } \alpha \ ;$$

che per $z = \frac{1}{2} l$ si ha $v = e$, cosicchè l'angolo $\alpha$ è dato da

$$\text{tang. } \alpha = 2 \frac{e - c}{l} \qquad \ldots\ldots (1)$$

che i valori di $y'$ e di $y_1$, rappresentati per la sezione retta qualunque $DF$ dalle lunghezze $\overline{CK}$ e $\overline{CF}$, sono rispettivamente

$$y' = c + z \text{ tang. } \alpha$$

$$y_1 = \frac{s}{\cos \alpha} + c + z \text{ tang. } \alpha \ ;$$

che, essendo $\omega = a\, d\, y$, risulta

$$\sum_{y'}^{y_1} \omega\, y = \frac{a\, s}{\cos \alpha} \left( \frac{1}{2} \frac{s}{\cos \alpha} + c + z \text{ tang. } \alpha \right) ;$$

che, per essere nella sezione retta qualunque $DF$

$$b = 2\, y_1 = 2 \left( \frac{s}{\cos \alpha} + c + z \text{ tang } \alpha \right) ,$$

$$b' = 2\, y' = 2\, (c + z \text{ tang } \alpha) ,$$

$$b'' = 2\, y' - 2 \frac{s'}{\cos \alpha} = 2 \left( - \frac{s'}{\cos \alpha} + c + z \text{ tang } \alpha \right) ,$$

$$b''' = 2\, y' - 2 \frac{s''}{\cos \alpha} = 2 \left( - \frac{s''}{\cos \alpha} + c + z \text{ tang } \alpha \right) ,$$

si trova

$$I_x = \frac{2}{3}\left[\begin{array}{l} a\left(\frac{s}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^3 - a'(c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha)^3 \\ -\alpha''\left(-\frac{s'}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^3 - a'''\left(-\frac{s'''}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^3 \end{array}\right];$$

che

$$R' = \frac{1}{2}\,l\,q\ ,$$

$$Y = q(l-z) - R' = q\left(\frac{1}{2}\,l - z\right);$$

e finalmente che il valore di $R$, che si deduce dalla formola (1) del numero 3, col porre in essa i trovati valori di $\sum\limits_{y'}^{y_1} \omega\, y$, di $I_x$ e di $Y$, è dato da

$$R = -\frac{3}{2}\,\frac{q\,\frac{a\,s}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{2}\,\frac{s}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\,l-z\right)}{\left.\begin{array}{l} a\left(\frac{s}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^3 - a''(c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha)^3 \\ -a''\left(-\frac{s'}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^3 - a'''\left(-\frac{s'''}{\cos a}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^3 \end{array}\right)} \quad (2).$$

Se in tutte le sezioni rette della trave la distanza delle tavole e molto grande in confronto della loro grossezza e se voglionsi considerare la parete verticale ed i ferri d'angolo come aventi unicamente per iscopo di mantenere le tavole alla valuta distanza, per approssimazione si può ritenere nello stabilire la formola determinatrice di $R$ che il momento d'inerzia $I_x$ sia data da

$$I_x = 2\,\frac{a\,s}{\cos a}\left(\frac{1}{2}\,\frac{s}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)^2;$$

ed il valore di $R$, che notevolmente si semplifica, diventa

$$R = -\frac{q\left(\frac{1}{2}\,l-z\right)}{2\left(\frac{1}{2}\,\frac{s}{\cos\alpha}+c+z\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)} \quad \ldots\ldots(3).$$

Il valore di $R$ varia col variare dell'ascissa $z$, ed è nullo per $z = \frac{1}{2}l$. Dando poi a $z$ diversi valori compresi fra 0 e $\frac{1}{2}l$, si ottengono altrettanti valori negativi di $R$; e, portando sulla retta $C_0 z$ (Fig. 12) i prestabiliti valori di $z$ come ascisse ed i corrispondenti valori di $R$ come ordinate, riesce facile costruire per la metà $C_0 O$ dell'asse della trave il diagramma $R_0 C_0 O$ delle forze $R$.

Per l'altra metà della trave si potrebbero fare i valori di $R$ scrivendo l'equazione della retta $HK_u$ (Fig. 11), considerando una sezione retta qualunque $D'F'$ e procedendo in tutto collo stesso metodo stato seguito per la deduzione della formola (2) o (3). Siccome i valori delle ascisse $z$ devono variare da $\frac{1}{2}l$ ad $l$, il binomio $\frac{1}{2}l - z$ sarà negativo, come pure sarà negativo il fattore tang. $\alpha$ per essere ottuso l'angolo che la retta $HK_u$ fa coll'asse delle ascisse, e risulteranno positivi i valori di $R$. Se però osservasi che, essendo la trave simmetrica rispetto al suo asse verticale ed essendo simmetricamente sollecitata, le forze $R$ nel punto $K'$, appartenente alla sezione $D'F'$ simmetrica di $DF$, ha lo stesso valore assoluto delle forze $R$ nel punto $K$, immediatamente si deduce che, prendendo per ogni punto $C$ (Fig. 12) della prima metà dell'asse della trave, a cui corrisponde il valore di $R$ dato dalla ordinata $\overline{CR}$, il punto $C'$ sulla seconda metà col portare la distanza $\overline{OC'} = \overline{OC}$ e l'ordinata $\overline{C'R'}$ eguale a $\overline{CR}$, si ottiene nella linea $OR'R_u$ il diagramma delle forze $R$ in corrispondenza della retta $HK$.

L'area del triangolo mistilineo $C_0 OR_0$ rappresenta la totale resistenza $R_t$ provocata nello strato $K_0 H$ dal peso uniformemente distribuito sull'asse della trave; l'area dell'altro triangolo mistilineo $C_u OR_u$ rappresenta l'analoga resistenza nello strato $HK_u$; e, essendo queste resistenze eguali e di segno contrario, si deduce essere nulla la loro somma algebrica.

Occorre appena di accennare che sono eguali e di segno contrario i valori di $R$ nei punti $K$ ed $L$ posti nella stessa sezione retta $DF$, uno sullo strato $K_0 HK_u$ e l'altro sullo strato $K_0' H' K_u'$ simmetrico al primo per rapporto allo strato delle fibre invariabili.

6. *Componenti della forza R.* — La resistenza $R$, essendo perpendicolare alla sezione retta del solido a cui si riferisce, è parallela all'asse $zCz'$ (Fig. 2); e quindi, supponendo che sia

Fig. 1

Fig. 3

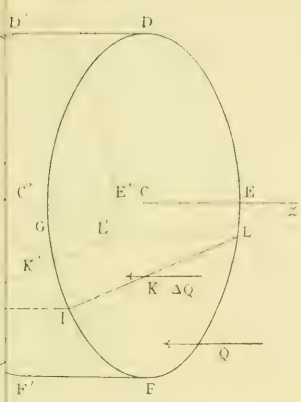



Fig. 4

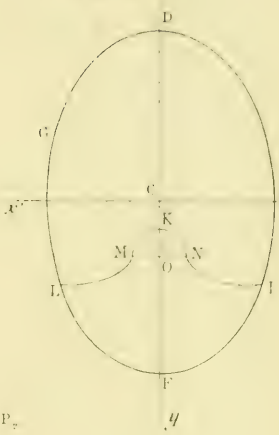



Fig. 9

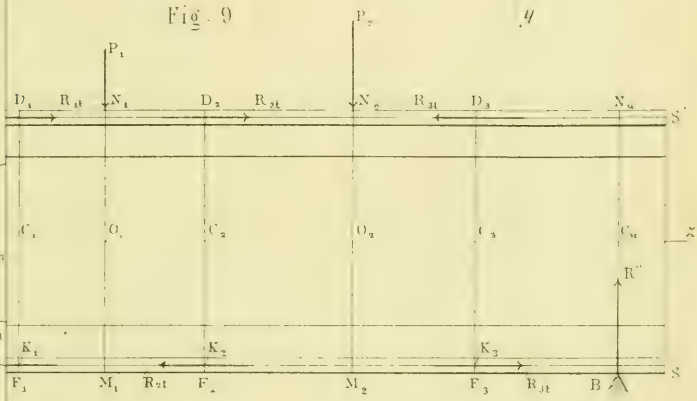



Fig.

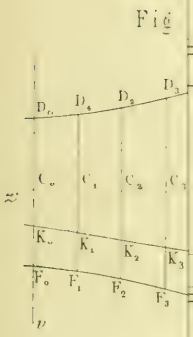



Fig.

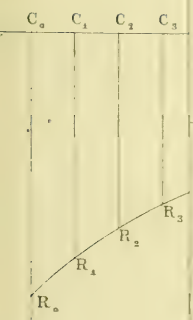
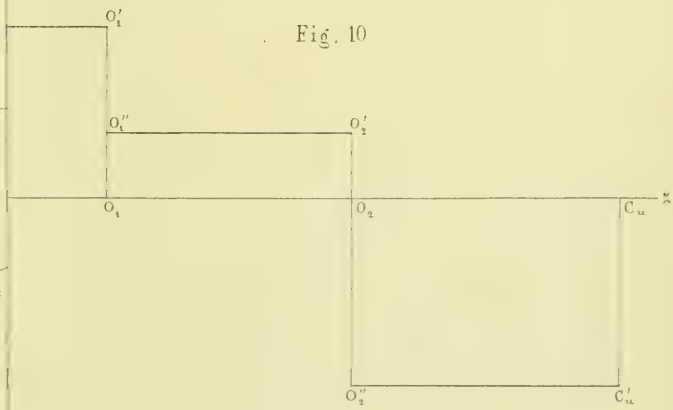
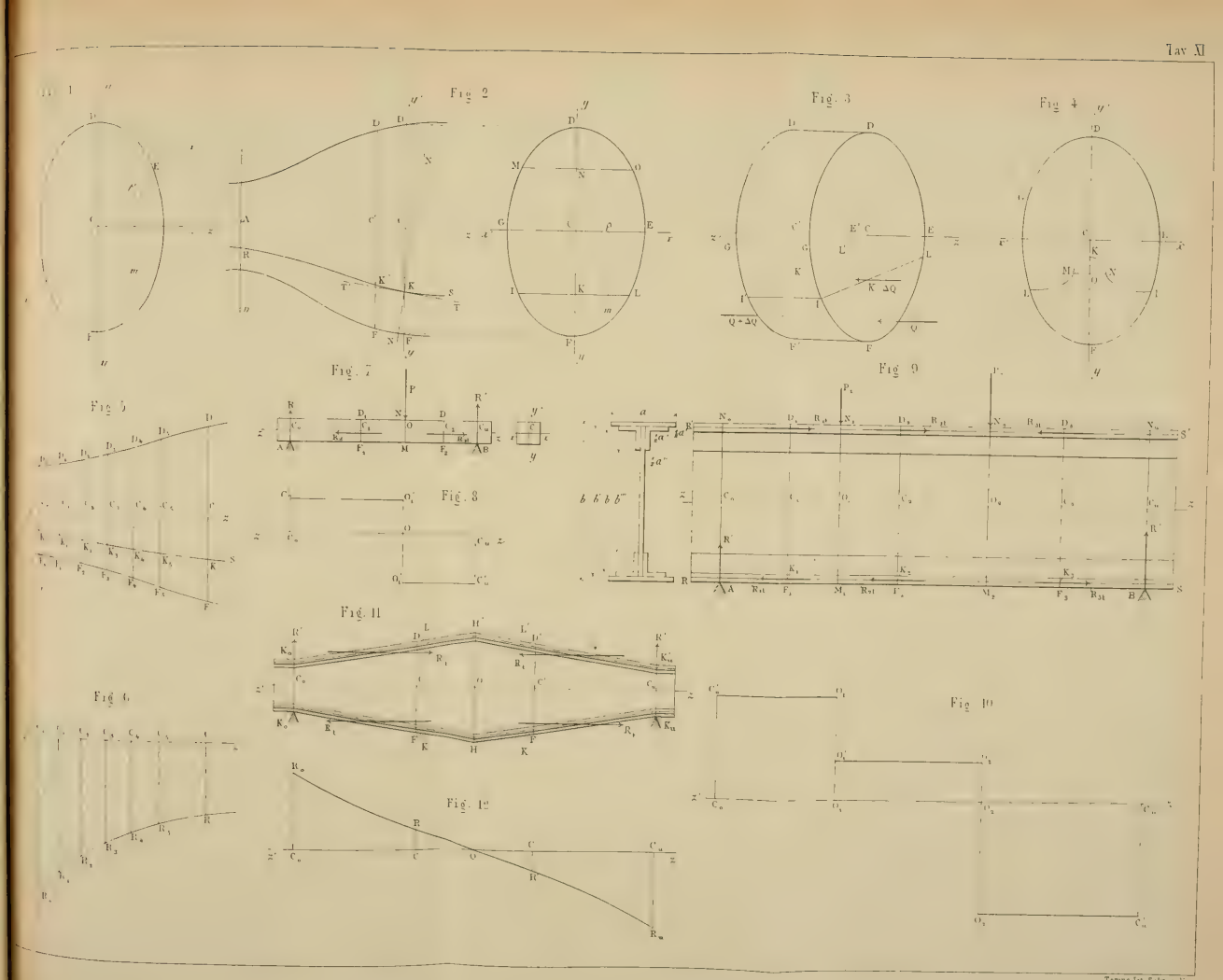



Fig. 10




Torino, Lit. Salussolia.




Torino Lit. Salussolia

$RKS$ la curva secondo la quale il piano determinato dagli assi $yCy'$ e $zCz'$ taglia la superficie cilindrica avente per direttrice la curva stessa e le sue generatrici parallele all'asse $xCx'$, si può scomporre tale resistenza in due componenti, una $T$ secondo la tangente, l'altra $N$ secondo la normale in $K$ alla citata curva.

Nei problemi pratici è sufficientemente esatto e conviene quasi sempre determinare graficamente le componenti predette. Però anche la loro determinazione numerica non presenta alcuna difficoltà, giacchè, assumendo sull'asse $zCz'$ un punto $A$ come origine delle coordinate onde riferire la curva ai due assi ortogonali $Az$ ed $Av$ contenuti del suo piano, indicando con $z$ e con $v$ le coordinate correnti della curva stessa e con $s$ l'arco, servono allo scopo le semplicissime formole

$$T = R\frac{dz}{ds}$$

$$N = -R\frac{dv}{ds}.$$

Le resistenze $T$ ed $N$, date da queste formole, possono risultare positive o negative; sono positive, se dirette da $K$ verso $T$ o verso $N$; sono negative, se rivolte da $K$ verso $T'$ o verso $N'$.

Il Socio Cav. Prof. A. Naccari legge il seguente lavoro da lui fatto in collaborazione del sig. Dott. G. Guglielmo, suo Assistente alla Cattedra di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino,

SUL

# RISCALDAMENTO DEGLI ELETTRODI

PRODOTTO

# DALLA SCINTILLA ELETTRICA.

1. Le esperienze descritte in questa Nota sono state fatte per continuare uno studio pubblicato alcuni anni or sono da uno di noi, nel quale venne considerato il fenomeno del riscaldamento di elettrodi sferici prodotto da scintille d'induzione (1). Nelle esperienze che ora descriveremo si è esaminato il caso di forme diverse, cioè di punte di diversa acutezza, di superficie sferiche e di superficie piane circolari, usando parimente il rocchetto d'induzione. Faremo seguire la descrizione di alcune esperienze eseguite con la macchina di Holtz.

Il Poggendorff aveva già trovato, ponendo un termometro nel tragitto delle scintille, che usando piccoli coni di diversa acutezza, il riscaldamento è minore che nelle sfere e tanto minore quanto più acuto è il cono (2). Recentemente il Mugna usando elettrodi cavi che costituivano le due bolle di un termometro differenziale ed adattando ad uno di essi una punta molto lunga e sottile, trovò che il riscaldamento dell'elettrodo munito di punta era sempre minore di quello dell'altro anche quando questo era positivo (3). Però in tali condizioni il calore gene-

(1) A. Naccari, *Atti del R. Istitulo Veneto*, (5) VII (1880-81), 1363.
(2) Poggendorff, *Annalen der Physik und Chemie*, CXXXII, 117 (1867).
(3) Mugna, *Rivista scientifico-industriale*, XIV, 1882, 242.

rato all'estremità della punta, si disperde in massima parte nell'aria e solo una piccolissima porzione può propagarsi per conducibilità fino al termometro.

Nelle nostre esperienze gli elettrodi erano costituiti da cilindri cavi di rame nichelato di $30^{mm}$ di diametro e 30 di lunghezza disposti orizzontalmente e terminati ad una estremità da una faccia piana, all'altra da un cono cavo, il cui angolo al vertice era di $91^{\circ}$, 1 per alcuni elettrodi, di $46^{\circ},5$ per gli altri. Le pareti erano tutte di lamina sottile. Alla parte superiore del cilindro era saldato un breve tubo in cui s'adattava un tappo di gomma elastica portante un tubo capillare aperto ai due capi e terminato all'estremità superiore da un piccolo imbuto. Essendo gli elettrodi ripieni d'alcool, essi costituivano due termoscopi e nel tempo stesso due calorimetri molto sensibili. Ciascun di essi era sostenuto da una colonnina di vetro rivestita con ceralacca.

Le scintille erano prodotte, come nelle esperienze precedenti, da un grande rocchetto di Ruhmkorff costruito dal Carpentier. L'intensità della corrente era misurata da una bussola reometrica di Wiedemann colle spirali di grosso filo di rame ricoperto di guttaperca; si prese per unità quella che produceva nella bussola una deviazione di una divisione e che aveva il valore di 0,0000104 Ampère. L'ago della bussola sotto l'azione delle correnti indotte oscillava abbastanza regolarmente intorno ad una posizione media, che si poteva ordinariamente apprezzare con un errore non superiore ad una divisione della scala.

La durata del passaggio della corrente fu in generale di 2′; quando il riscaldamento era molto piccolo, fu prolungato fino a 4′ e 5′; i risultati però furono ridotti alla durata di 2′. I tubi capillari adoperati avevano tutti all'incirca lo stesso diametro interno; le piccole differenze erano trascurabili per il grado di precisione di queste esperienze. La capacità di una divisione era $0,154^{mm^3}$; la lunghezza $1^{mm}$. Nelle tabelle che seguono i riscaldamenti dei termoscopi sono espressi dagli spostamenti in millimetri delle colonnette d'alcool; essi vennero ridotti ad unità di corrente, ammettendo anche in questo caso che il riscaldamento fosse proporzionale all'intensità della corrente.

2. *Influenza della forma d'un elettrodo sul suo riscaldamento.* — Nella seguente tabella sono esposti i risultati di alcune esperienze nelle quali le scintille scoccavano fra i vertici

dei coni di 46°, 5 che erano alla distanza di circa $20^{mm}$. Nella colonna $i$ trovansi le intensità della corrente, nelle colonne $n$, $p$, $n:p$ rispettivamente gli spostamenti della colonna d'alcool dell'elettrodo negativo e del positivo ed il quoziente del primo pel secondo.

TABELLA I.

| $i$ | $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|---|
| 73 | 0,88 | 0,20 | 4,5 |
| » | 0,82 | 0,15 | 5,6 |
| » | 0,84 | 0,16 | 5,4 |
| Medie | 0,85 | 0,17 | 5,2 |

Di qui si vede come anche nel caso di elettrodi conici l'elettrodo negativo si scalda più del positivo. Per elettrodi sferici il rapporto $n:p$ sarebbe stato eguale a 3 circa: con elettrodi conici esso risulta più grande.

Altre esperienze furono fatte con scintille fra le estremità di un cono di 46°,5 ed uno di 91°. Con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti del primo, con $n_1$ e $p_1$ quelli del secondo. In causa della diversa forma degli elettrodi, l'intensità della corrente era diversa a seconda della sua direzione.

TABELLA II.

| $i$ | $n$ | $p$ | $n_1$ | $p_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 52 | — | 0,16 | 1,76 | — | $\frac{n_1}{n} = 2{,}02$ |
| 63 | 0,83 | — | — | 0,54 | $\frac{p_1}{p} = 5{,}23$ |
| 52 | — | 0,12 | 1,55 | — | |
| 63 | 0,84 | — | — | 0,66 | $\frac{n}{p} = 6{,}62$ |
| 52 | — | 0,12 | 1,90 | — | $\frac{n_1}{p_1} = 2{,}56$ |
| 63 | 0,90 | — | — | 0,85 | |
| Medie | 0,86 | 0,13 | 1,74 | 0,68 | |

Risulta da queste esperienze che il riscaldamento del cono più acuto è minore di quello del meno acuto e che il rapporto del secondo al primo è maggiore quando sono entrambi positivi; ne segue che il rapporto $n : p$ è maggiore per il cono più acuto come risulta dalla tabella.

Altre esperienze furono fatte con una scintilla fra l'estremità d'un cono di 91° ed una superficie piana circolare. Con $n$ e $p$ sono indicati nella seguente tabella i riscaldamenti del cono, con $n_1$ e $p_1$ quelli della superficie piana ridotti come sempre ad unità di corrente. La distanza era di $21^{mm}$.

TABELLA [illegible].

| $i$ | $n$ | $p$ | $n_1$ | $p_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 0,27 | — | — | 0,61 | |
| 57 | — | 0,050 | 1,25 | — | $\frac{n_1}{n} = 5,41$ |
| 64 | 0,24 | — | [—] | 0,61 | $\frac{p_1}{p} = 13,6$ |
| 59 | — | 0,042 | 1,42 | — | |
| 75 | 0,26 | — | — | 0,67 | $\frac{n}{p} = 5,43$ |
| 55 | — | 0,047 | 1,42 | — | $\frac{n_1}{p_1} = 2,16$ |
| 64 | 0,25 | — | — | 0,66 | |
| 55 | — | 0,049 | 1,42 | — | |
| Medie | 0,255 | 0,047 | 1,38 | 0,64 | |

Anche da queste esperienze risultano conclusioni simili alle precedenti: il riscaldamento della superficie piana è maggiore di quello del cono ed il rapporto del primo al secondo quando sono entrambi positivi è maggiore di quando entrambi sono negativi; il rapporto $n : p$ è maggiore per la punta che pel disco.

In queste condizioni per confrontare i riscaldamenti dei due elettrodi di forma diversa che siano entrambi positivi o entrambi negativi, bisogna confrontare due esperienze in cui, oltre alla diversa intensità di corrente, possono esercitarsi influenze differenti.

Per evitare ciò furono fatte delle esperienze interponendo nello stesso circuito due intervalli d'aria di egual lunghezza, nei quali i due elettrodi che si voleva paragonare erano tutti due positivi o tutti due negativi. In tal modo l'intensità della corrente è la stessa nei due intervalli e si ha maggior probabilità che le cause che agiscono su uno degli elettrodi agiscano anche sull'altro. Le condizioni però diventano meno favorevoli alla determinazione di $n:p$. Per evitare che qualche piccola differenza nelle lunghezze dei due intervalli d'aria potesse influire sui risultati, si fecero delle esperienze variando una di queste lunghezze in modo da renderla ora un po' maggiore ora un po' minore dell'altra, ma i risultati rimasero sensibilmente gli stessi.

Nella seguente tabella trovansi i risultati di una serie di esperienze fatte con due scintille, una fra coni di 46°,5, l'altra fra coni di 91°. Con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti del cono di 46°, 5, con $n_1$ e $p_1$ quelli del cono di 91°; con $d$ è indicata la distanza in millimetri.

TABELLA IV.

| $d$ | $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ | $n_1:n$ | $p_1:p$ | $n:p$ | $n_1:p_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 11,5 | — | — | 0,16 | 0,32 | — | 2,0 | — | — |
| » | 45 | 0,733 | 0,92 | — | — | 1,26 | — | 4,58 | 2,88 |
| 5 | 92,5 | — | — | 0,21 | 0,30 | — | 1,43 | — | — |
| » | 93,5 | 1,49 | 2,05 | — | — | 1,38 | — | 7,1 | 6,8 |

Risulta anche da queste esperienze che il cono più acuto si riscalda meno di quello meno acuto. Il rapporto del riscaldamento del secondo a quello del primo è maggiore quando essi sono entrambi positivi e quando la lunghezza della scintilla è maggiore. Apparirebbe anche che il rapporto $n:p$ diminuisce coll'aumentare della distanza, ciò che in altri casi però non s'è verificato.

Nelle seguenti esperienze una scintilla scoccava fra i vertici di due coni di 46°,5 ed una fra due sfere cave di rame di 5 $^{cm}$ di diametro. I riscaldamenti del cono sono indicati con $n$ e $p$, quelli della sfera con $n_1$ e $p_1$.

TABELLA V.

| $d$ | $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ | $n_1:n$ | $p_1:p$ | $n:p$ | $n_1:p_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 170 | 1,18 | 1,56 | — | — | 1,32 | — | — | — |
| » | » | — | — | 0,17 | 0,40 | — | 2,35 | 6,94 | 3,9 |
| 5 | 86 | 1,25 | 2,73 | — | — | 2,18 | — | — | — |
| » | 102 | — | — | 0,15 | 0,75 | — | 5,0 | 8,33 | 3,64 |
| 10 | 44 | 0,94 | 3,9 | — | — | 4,15 | — | — | — |
| » | 19 | — | — | 0,18 | 1,885 | — | 10,5 | 5,2 | 2,1 |

Da queste esperienze risulta che essendo la sfera e il cono entrambi positivi o entrambi negativi, il riscaldamento della sfera è maggiore di quello del cono. Il rapporto del primo al secondo è maggiore quando entrambi questi elettrodi sono positivi; esso parrebbe inoltre crescere all'aumentare della distanza. A tal proposito conviene osservare che per piccole distanze l'estremità del cono si trova tutta avvolta dall'aureola della scintilla d'induzione, e quindi esso si riscalda più di quello che avverrebbe senza un tale fatto.

I risultati della seguente tabella furono ottenuti con una scintilla fra due coni, uno di 91° e l'altro di 46°, 5 ed una scintilla fra una superficie piana ed un cono di 46°,5; con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti del cono di 91°, con $n_1$ e $p_1$ quelli della superficie piana. In tali condizioni non havvi nelle due scintille altra differenza fuorchè quella proveniente dalla diversità dei due elettrodi da confrontare. In queste esperienze non fu determinata la distanza che doveva essere da 2 a 5$^{mm}$ e che era però la stessa nei due intervalli.

TABELLA VI.

| $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 76 | — | — | 0,14 | 0,52 | $\frac{n_1}{n} = 1,3$ |
| 66 | 0,60 | 0,82 | — | — | $\frac{p_1}{p} = 3,8$ |
| 71 | — | — | 0,14 | 0,55 | |
| 64 | 0,64 | 0,75 | — | — | $\frac{n}{p} = 4,4$ |
| Medie | 0,62 | 0,78 | 0,14 | 0,53 | $\frac{n_1}{p_1} = 1,5$ |

Da tutte le esperienze fatte con due scintille o con una sola risulta indubitatamente che il riscaldamento d'un elettrodo è tanto minore quanto minore è la curvatura, o maggiore l'acutezza della superficie dell'elettrodo nel punto ove scocca la scintilla; che inoltre il riscaldamento è piccolo specialmente allora che l'elettrodo che si considera sia positivo. Dati due elettrodi, se diminuisce il raggio di curvatura di uno di essi, può avvenire se questo è negativo, che il suo riscaldamento si faccia molto minore di quello dell'altro elettrodo.

Siccome nell'arco voltaico, ove il riscaldamento è maggiore all'elettrodo positivo che al negativo, questo ha appunto una forma appuntita e l'altro è cavo, abbiamo voluto vedere se per caso il maggiore riscaldamento di questo non dipendesse dalla diversità della forma, sebbene Gassiot avesse osservato con una pila di grande forza elettromotrice che fra due fili come elettrodi si arroventava il negativo se il passaggio dell'elettricità avveniva per scintille, e invece il positivo se fra essi si produceva un arco voltaico, per cui il diverso riscaldamento parrebbe dovuto alla natura diversa dei due fenomeni (1).

Abbiamo usato come elettrodi due sfere, ora di rame, ora di zinco di $11^{mm}$ di diametro, congiunte ad astine di rame collegate con una pila di 30 elementi di Bunsen. Producevamo fra le due sfere un arco voltaico di 1 a $2^{mm}$ per $10''$ e quindi, interrotta la corrente, si tuffavano le due sfere con le astine in due calorimetri, sensibilmente uguali e contenenti ciascuno $100^{cm3}$ di acqua, un termometro diviso in quinti di grado ed un agitatore. Facendo le correzioni solite delle determinazioni calorimetriche, si ottenne da sei esperienze abbastanza concordanti un riscaldamento medio di $1^{\circ},89$ nel calorimetro ove si tuffò l'elettrodo positivo, di $1^{\circ},28$ per l'altro ed il rapporto $p : n$ risultò uguale a 1,48. Rimane quindi fuor di dubbio che nel caso dell'arco voltaico si ottengono risultati opposti a quelli che in generale si ottengono per le scintille.

3. *Influenza della forma d'un elettrodo sul riscaldamento dell'elettrodo opposto.* — La forma d'un elettrodo avendo influenza sulla scintilla è probabile che essa abbia pure influenza

(1) Gassiot, *Proc. of Roy. Soc.*, XI, p. 329 (1861).

sul riscaldamento dell'elettrodo opposto. Ciò risulta anche da alcune delle esperienze già indicate, ma non si potrebbe con molta sicurezza confrontare serie diverse di esperienze.

Per verificare la cosa abbiamo fatto delle apposite esperienze con due scintille di ugual lunghezza nello stesso circuito, disponendo due elettrodi entrambi positivi, o entrambi negativi identici di fronte ad elettrodi di forma molto diversa, e osservando i riscaldamenti dei primi due.

Facemmo prima delle esperienze in cui gli elettrodi identici erano coni di 46°,5, opposti l'uno ad un cono di 91°, l'altro ad una superficie piana. Con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti del secondo, con $n_1$ e $p_1$ quelli del primo.

TABELLA VII.

| $d$ | $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 29 | — | — | 0,26 | 0,27 |
| » | » | 0,76 | 0,87 | — | — |
| 2 | 84 | 1,09 | 1,24 | — | — |
| 5 | 100 | — | — | 0,143 | 0,153 |
| » | 120 | 0,975 | 1,36 | — | — |
| » | 92 | 0,914 | 1,51 | — | — |
| » | 92 | 0,89 | 1,25 | — | — |

Altre esperienze furono fatte con due superficie piane opposte l'una ad una sfera di rame e l'altra ad un cono di 46°,5; con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti della prima, con $n_1$ e $p_1$ quelli della seconda; $d = 6,5^{mm}$.

TABELLA VIII.

| $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 61 | — | — | 0,36 | 0,59 |
| 58 | 0,84 | 0,96 | — | — |
| 58 | — | — | 0,34 | 0,62 |
| 53 | 0,68 | 0,91 | — | — |

Queste esperienze furono eseguite parecchie volte; per evitare anche in questo caso che una piccola differenza delle due lunghezze degli intervalli d'aria potesse avere influenza sui risultati, si aumentò e diminuì una delle lunghezze in modo da renderla alquanto maggiore o minore dell'altra. Si ottenne però sempre lo stesso risultato, cioè che la forma d'un elettrodo influisce sul riscaldamento dell'altro e precisamente nel senso che allorchè è maggiore il riscaldamento del primo diminuisce quello del secondo.

Esaminando tutte le esperienze eseguite intorno all'influenza della forma degli elettrodi sul loro riscaldamento si può conchiudere che ogni qual volta si agevola l'efflusso dell'elettricità da un elettrodo diminuisce il suo riscaldamento. A questa proposizione si conformerebbero non solo le esperienze fatte per istudiare l'influenza della forma d'un elettrodo sul suo proprio riscaldamento, ma anche quelle fatte per studiare l'influenza della forma dell'elettrodo opposto, qualora fosse sicuramente provato che la scintilla scocca più facilmente tra una punta e un disco o fra una punta e una sfera che non fra due punte.

4. *Influenza della distanza. Valore assoluto dei riscaldamenti.* — Abbiamo fatto di poi delle esperienze per riconoscere l'influenza della distanza sia sul riscaldamento di ciascun elettrodo, sia sul rapporto fra i riscaldamenti dei due elettrodi.

Le esperienze furono numerose e vennero eseguite in due diverse epoche a intervallo di parecchi mesi, con una sola scintilla fra coni di 46°,5, ma sia per un'alterazione delle estremità del cono dopo il lungo uso come elettrodo, sia per altre cause sconosciute, i risultati delle due serie discordano, benchè quelli spettanti a ciascuna serie sian concordanti fra loro.

Nelle prime esperienze si osservò una diminuzione abbastanza notevole del rapporto $\frac{n}{p}$ al crescere della distanza, nelle ultime tale diminuzione non apparve o almeno fu inferiore alle differenze fra i risultati di esperienze fatte a distanze uguali.

Dobbiamo in generale osservare che non si può attendere dalle esperienze sulle scintille e specialmente da quelle fatte con elettrodi conici una gran precisione, sia per le molte cause che possono influire sull'andamento delle correnti indotte, sia anche per la piccolezza del riscaldamento di questi elettrodi allorchè sono positivi. Non è improbabile ancora che sotto l'azione della

scintilla si alteri alquanto la estremità del cono e si formino piccole punte, o cavità che influiscano sull'efflusso dell'elettricità e quindi sul riscaldamento.

Per evitare almeno alcune delle cause d'errore abbiamo fatto anche in questo caso delle esperienze con due scintille nello stesso circuito, entrambe fra un cono di 46°,5 ed uno di 91°, ma di diversa lunghezza, ed osservammo i riscaldamenti dei coni di 46°,5 che erano entrambi positivi o entrambi negativi. I risultati esposti sono, come sempre, le medie di molte esperienze. In alcune di queste furono scambiate le distanze in modo che ciascuna delle due scintille di diversa lunghezza avvenisse or presso ad uno, or presso all'altro degli elettrodi considerati.

Tabella IX.

| | $d$ | $i$ | $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 62 | 1,41 | 0,18 | 7,8 |
| | 10 | » | 1,02 | 0,16 | 6,4 |
| | 2 | 55 | 1,44 | 0.15 | 9,6 |
| | 20 | » | 0,97 | 0,13 | 7,5 |
| | 2 | 22 | 1,14 | 0,16 | 7,1 |
| | 40 | » | 0,83 | 0,13 | 6,4 |
| | 10 | 30 | 1,12 | 0,13 | 8,6 |
| | 40 | » | 0,70 | 0,11 | 6,3 |
| | 0,5 | 37 | 1,02 | 0,13 | 7,8 |
| | 5 | » | 1,52 | 0,15 | 10,0 |

Da queste esperienze risulta che il riscaldamento d'un elettrodo per piccole distanze cresce all'aumentare della distanza, poscia diminuisce; le variazioni paiono maggiori per l'elettrodo negativo che pel positivo, e perciò il rapporto $n:p$ prima cresce, indi decresce all'aumentar della distanza. La distanza alla quale si ha il massimo, parrebbe in questo caso essere compresa fra 2 e $5^{mm}$. Ciò risulta anche dalle tabelle IV, V, VII.

Riguardo al valore assoluto dei riscaldamenti ottenuti nelle varie condizioni delle nostre esperienze, conviene osservare che

esso dipende da molte cause che non è facile determinare; fra queste possiamo notare l'andamento della intensità della corrente indotta rispetto al tempo.

Tuttavia, per avere un valore medio di questo riscaldamento per elettrodi conici di 46°,5 di apertura, prendendo la media di parecchie delle nostre esperienze senza tener conto delle diverse condizioni in cui furono eseguite, troviamo che per unità di corrente si ha in 2′ una dilatazione di una divisione ossia di $0,158^{mm.3}$ se l'elettrodo è negativo, e di 0,18 ossia $0,028^{mm.3}$ se esso è positivo. Tenendo conto del peso della parte metallica dell'elettrodo ($36^{gr.}$), del volume dell'alcool contenuto ($36^{cm.3}$), del coefficiente di dilatazione dell'alcool, ecc. si trova che gli aumenti di temperatura sono di 0°,0055 e 0°,001 e le quantità di calore sviluppate 0,088 e 0,016 piccole calorie, ossia per 1 Ampère in 1′ 4230 e 770.

5. *Riscaldamento dell'acqua usata come elettrodo.* — Abbiamo voluto esaminare se, quando uno degli elettrodi fosse costituito da una sostanza liquida, sussistesse la prevalenza del riscaldamento nel caso in cui essa fosse negativa anzichè positiva.

Si faceva scoccare la scintilla fra l'estremità arrotondata di un filo di rame di $2^{mm}$ di diametro e la superficie piana di una certa quantità d'acqua ($50^{cm.3}$) che si trovava in un vaso di $3,5^{cm.}$ di altezza e 5 di diametro. L'acqua veniva agitata prima e dopo il passaggio delle scariche; un termometro diviso in quinti dava la temperatura.

Allorchè la distanza dell'astina di rame dall'acqua era di circa $3^{mm}$ questa, essendo negativa, si riscaldò per unità di corrente di 0°,0084, essendo positiva di 0,0041; quando la distanza era di $3^{mm}$, si riscaldò, essendo positiva, di 0°,0109, essendo positiva, di 0°,0084. Vedesi che anche in questo caso il riscaldamento è maggiore quando l'acqua fa l'ufficio di elettrodo negativo: il rapporto è 2 per la distanza di $3^{mm}$ ed 1,3 per la distanza di $9^{mm}$, valori che non differiscono molto da quelli trovati pel riscaldamento d'una superficie piana metallica opposta ad una punta.

Riguardo alla quantità di calore essa non si può avere esattamente da quest'esperienza giacchè non fu determinata che all'ingrosso la quantità d'acqua: inoltre il vaso di vetro aveva pareti molto grosse. Trascurando questa correzione, e considerando i due ultimi valori, si ha che la quantità di calore svi-

luppato per Ampère in 2′ fu di 52400 piccole calorie quando l'acqua era positiva, di 40400 quando era negativa.

Altre esperienze furono fatte con due scintille simultanee di lunghezza prossimamente uguale, una fra l'estremità arrotondata di un'astina di rame di $3^{mm}$ di diametro e la superficie dell'acqua contenuta in un bicchierino di vetro sottile di $30^{mm}$ di diametro, l'altra scintilla fra un'astina di rame uguale alla precedente e la superficie piana di uno degli elettrodi calorimetrici usati precedentemente, e come al solito ripieni di alcool. Le scintille erano entrambe verticali, le due superficie piane, di cui si voleva paragonare il riscaldamento, erano entrambe positive o entrambe negative; un termometro diviso in quinti di grado dava la temperatura dell'acqua che veniva resa uniforme agitando prima e dopo il passaggio della scarica ed anche per breve tempo durante questo passaggio. La quantità dell'acqua era di $50^{cm3}$. Fu determinata direttamente, cioè ponendo in un bagno l'elettrodo calorimetrico ed un termometro, la variazione di temperatura che produceva lo spostamento di una divisione nella colonna d'alcool ed essa risultò di $0^{\circ},0198$.

Nella seguente tabella sono esposti i risultati di queste esperienze. Con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti del metallo, con $n_1$ e $p_1$ quelli dell'acqua, tutti ridotti ad unità di corrente e alla durata di 2′.

TABELLA X.

| $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 0,909 | 0,0098 | — | — | |
| » | — | — | 0,504 | 0,00855 | $\frac{n}{p} = 1,64$ |
| » | 0,936 | 0,0155 | — | — | |
| » | — | — | 0,613 | 0,00864 | $\frac{n_1}{p_1} = 1,41$ |
| 60 | 1,085 | 0,0093 | — | — | |
| 61 | — | — | 0,692 | 0,00811 | |
| 62 | 1,210 | 0,010 | — | — | |
| 62 | — | — | 0,712 | 0,00647 | |
| Medie | 1,035 | 0,0112 | 0,630 | 0,00794 | |

Risulta da queste esperienze come da quelle con una scintilla, che il rapporto dei riscaldamenti dell'elettrodo negativo e del positivo è presso a poco lo stesso per l'acqua e pel metallo, per cui pare che questa quantità non abbia alcuna relazione notevole colla costituzione molecolare dell'elettrodo.

Riguardo ai valori assoluti dei riscaldamenti, essendo la quantità d'acqua di $50^{cm.3}$, se non si tien conto del calore acquistato dal vetro, si ha che la quantità di calore acquistata dall'acqua in 2′ e per unità di corrente fu di 0,56 calorie quando l'acqua era negativa, di 0,397 quando era positiva. Nell'elettrodo metallico il peso del rame era $26,9^{gr.}$, quello dell'alcool $18^{gr.}$, l'equivalente in acqua era quindi prossimamente di 14,4. La quantità di calore occorrente per produrre la dilatazione dell'alcool di una divisione del cannello era di 0,285 calorie. Dalla esperienza risultò che la quantità di calore generata sulla superficie metallica fu di 0,295 calorie quando essa era negativa, di 0,22 quando era positiva, per cui il riscaldamento dell'acqua come elettrodo risulta maggiore che non quello del metallo, risultato tanto più singolare inquantochè lo strato superficiale dell'acqua deve venir portato a temperatura piuttosto elevata, e quindi deve avvenire evaporazione ed assorbimento di calore.

La quantità di calore prodotto sull'acqua risulta per Ampère e per minuto primo di 26900 piccole calorie quando era negativa e di 19100 quando era positiva; la quantità di calore prodotto sulla superficie piana metallica risulta di 14200 e 10600.

Abbiamo fatto anche delle esperienze per paragonare il riscaldamento dell'acqua con quello del mercurio, sostituendo all'elettrodo solido dell'esperienza precedente un bicchierino di vetro sottile (press'a poco uguale a quello che conteneva l'acqua) contenente $25^{cm.3}$ di mercurio, un termometro diviso in quinti di grado ed una astina di vetro per agitare.

Nelle seguenti tabelle sono esposti i risultati di queste esperienze; con $n$ e $p$ sono indicati i riscaldamenti del mercurio ridotti come sempre ad unità di corrente colla durata di 2′, con $n_1$ e $p_1$ quelli dell'acqua.

TABELLA XI.

| $i$ | $n$ | $n_1$ | $p$ | $p_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0°,0158 | 0°,0171 | — | — | $\frac{n}{p} = 1,46$ |
| 65 | — | — | 0°,0145 | 0°,0107 | |
| 58 | 0°,0197 | 0°,0193 | — | — | $\frac{n_1}{p_1} = 1,74$ |
| 58 | — | — | 0°,0107 | 0°,0121 | |
| 62 | 0°,0197 | 0°,0229 | — | — | |
| Medie | 0°,0184 | 0°,0198 | 0°,0126 | 0°,0114 | |

Come vedesi il rapporto dei riscaldamenti dell'elettrodo negativo e del positivo è all'incirca lo stesso per l'acqua che per il mercurio o per il rame. Riguardo alla quantità di calore svilùppata trascurando la porzione assorbita dal vetro si ha che essa fu pel mercurio di 0,208 e 0,142 e per l'acqua di 0,495 e 0,285, ossia per Ampère e per minuto primo di 10000 e 6830 piccole calorie per il mercurio, e di 23800 e 13700 piccole calorie per l'acqua, valori che non differiscono molto (avuto riguardo alla poca regolarità del fenomeno, ed alle condizioni diverse) da quelli trovati rispettivamente per l'elettrodo metallico e per l'acqua nelle serie antecedenti.

Altre esperienze si fecero pure con una scintilla che scoccava dalla estremità dell'astina d'ottone e la superficie dell'acqua, ed indi ponendo a galla sulla superficie dell'acqua una sottil laminetta d'ottone con fori pel passaggio del termometro e dell'agitatore; ed anche in questo caso si ottenne il riscaldamento maggiore per scintille che scoccavano fra l'acqua che non per quelle che scoccavano sulla laminetta.

6. *Esperienze con la scintilla di disgiunzione.* — Abbiamo fatto anche delle esperienze per vedere quale fosse il riscaldamento degli elettrodi nel caso speciale della scintilla chiamata da Edlund di disgiunzione (1). Perciò i due poli del rocchetto

(1) EDLUND, *Pogg. Ann.*, t. CXXXIV, 337; CXXXIX, 353.

erano in comunicazione colle armature interne dei due condensatori, le cui armature esterne comunicavano fra loro e col suolo. Nel circuito si trovava oltre all'intervallo d'aria di $2^{mm}$ fra gli elettrodi considerati (sfere di rame di $5^{cm}$ di diametro) un intervallo d'aria di $28^{mm}$ presso ad un polo del rocchetto. I due elettrodi comunicavano fra loro mediante una resistenza metallica di 0,5 *U. S.* In tali condizioni la corrente del rocchetto attraversava l'intervallo d'aria di $28^{mm}$, si biforcava passando per la resistenza metallica anzidetta e per l'intervallo d'aria fra le due sfere. Anche in questo caso si riscaldò maggiormente l'elettrodo in comunicazione col polo negativo del rocchetto ed il rapporto $n : p$ risultò come media di cinque esperienze abbastanza concordanti, uguale a 1,2, valore presso a poco uguale a quello trovato coll'uso dei condensatori (1).

7. *Esperienze colla macchina di Holtz.* — Il Poggendorff sperimentando nel modo indicato, trovò con molte esperienze che all'opposto di ciò che avviene colla scintilla del rocchetto d'induzione, il termometro in questo caso si riscalda più accanto all'elettrodo positivo che al negativo (2). Il Mugna col metodo pure accennato trovò che anche colle scintille della macchina d'Holtz si riscalda sempre più l'elettrodo negativo.

Abbiamo eseguito delle esperienze col metodo solito e con sfere di rame di $5^{cm}$ di diametro. L'intensità della corrente in generale non potè essere apprezzata a causa della sua piccolezza e della sua variabilità. Però invertendo la corrente si potevano eliminare le piccole differenze che dipendessero da accidentale diversità dei due elettrodi. I riscaldamenti, come era stato osservato dal Poggendorff, sono molto maggiori a parità di corrente, che non col rocchetto, cosicchè si ottennero abbastanza grandi sebbene l'intensità della corrente fosse piccolissima, e la durata del passaggio della medesima spesso non potesse esser prolungata oltre ad 1' a causa delle condizioni poco propizie dell'atmosfera. Ecco i riscaldamenti osservati allorchè la distanza delle sfere era di $9^{mm}$.

---

(1) Naccari, *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, XVII, 343.
(2) Poggendorff, Memoria citata.

| $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|
| 16,0 | 6,9 | 2,3 |
| 19,7 | 7,4 | 2,7 |
| 28,3 | 11,1 | 2,55 |
| 21,3 | 8,0 | 2,7 |
| 20,0 | 8,3 | 2,4 |
| 29,6 | 13,0 | 2,3 |
| 14,0 | 5,8 | 2,4 |

In media $n : p = 2,5$. In altre esperienze essendo la distanza delle sfere di $5^{mm}$ si ottennero i seguenti risultati:

| $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|
| 17,1 | 13,1 | 1,3 |
| 10,3 | 8,5 | 1,2 |
| 8,5 | 6,0 | 1,4 |
| 11,9 | 7,1 | 1,7 |
| 21,5 | 13,8 | 1,6 |

In media $n:p = 1,45$.

In tali condizioni scintille più lunghe non si poterono ottenere sia a causa della grandezza delle sfere, sia per lo stato poco propizio dell'atmosfera, e per lo sviluppo del circuito che comprendeva il galvanometro.

Per sperimentare a distanze maggiori usammo per elettrodi dei cilindri di lamina sottile d'ottone di $25^{mm}$ di diametro terminati ad un lato da una calotta emisferica pure d'ottone ed aperti dall'altro lato ove s'introduceva un tappo di gomma portante il tubo capillare. Questi elettrodi si posero direttamente a contatto coi poli della macchina, si escluse il galvanometro le cui indicazioni erano troppo incerte, e si fecero le esperienze in un luogo riscaldato. Inoltre si tenne presso alla macchina una lampada a petrolio collocata dietro il disco fisso: gli elettrodi erano difesi dalle radiazioni della lampada. Così si potè ottenere con sicurezza una scintilla di $27^{mm}$ di lunghezza, e si ebbero i risultati esposti nella seguente tabella:

| $d$ | $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 33,9 | 25,3 | 1,34 |
| » | 29,6 | 21,2 | 1,4 |
| 23 | 32,7 | 24,0 | 1,36 |
| » | 28,6 | 23,3 | 1,23 |
| 20 | 31,3 | 27,9 | 1,12 |
| » | 31,4 | 21,8 | 1,44 |
| 27 | 41,9 | 27,5 | 1,5 |
| » | 36,4 | 19,2 | 1,9 |
| » | 37,2 | 13,5 | 2,8 |
| » | 44,6 | 27,2 | 1,64 |

Finalmente, con altri elettrodi di uguali dimensioni, in condizioni atmosferiche migliori, si ottennero scintille di $40^{mm}$, ed i riscaldamenti osservati sono i seguenti:

| $n$ | $p$ | $n:p$ |
|---|---|---|
| 26,7 | 16,0 | 1,67 |
| 24,3 | 10,0 | 2,43 |
| 47,6 | 11,0 | 4,33 |
| 20,5 | 10,5 | 1,95 |

Risulta da tutte queste esperienze accertato che, anche colla macchina di Holtz, almeno per scintille non maggiori di 40 mill., l'elettrodo negativo si riscalda più del positivo: solo il rapporto $n:p$ risulterebbe minore che colle scintille d'induzione.

Riguardo all'influenza della distanza sul valore di questo rapporto le esperienze furono fatte in condizioni troppo diverse, per poterne dedurre una conclusione.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino, 9 Marzo 1884.

Il Socio Barone Antonio MANNO legge un suo scritto intitolato:

# LA PRIMA PAGINA DI STORIA

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

Vengo a recarvi un lieto annuncio. Una vostra recente deliberazione ed il caso, prepararono una bella sorpresa per questa nostra modesta solennità.

Facendo sgomberare, per decreto vostro, certi scaffali dalla seconda sala della libreria, si rinvenne dietro a fitta siepe di enormi volumi poco consultati, un fascio di carte sul quale i sedimenti di indotta polvere rivelavano un'epoca remota di oblio.

Datavi una rapida e curiosa scorsa, mi rallegrai trovandovi ordinatamente disposte in ragion di data le lettere scritte all'Accademia dall'anno di sua fondazione a quello della caduta della Monarchia. Carteggio di tre lustri che si deplorava perduto.

Qui lettere di parecchi fra gli illustri che ci precedettero; dei tre fondatori, dei due presidenti, degli operosissimi fra i segretari Tomaso Valperga di Caluso e Prospero Balbo. Compaiono i riveriti nomi del botanico Allione, dei matematici Foncenex e Gianella, del filosofo cardinale Gerdil, di Gardini elettricista, del chimico Giobert, del polistore Vernazza, del Robilant mineralogista, dell'economista Vasco, e di Vassalli Eandi fisico; nipote, zio e prozio di accademici (1). Giovanni Aldini scrive da Bologna, carteggiano da Milano

(1) Nipote di Giuseppe Antonio EANDI saluzzese, Socio nostro (21 Dicembre 1788); zio di Giovanni EANDI (eletto il 15 Maggio 1840); zio di Secondo BERRUTI (Accademico dal 12 Dicembre 1847) il quale gli fu nipote di sorella

Carlo Amoretti, Antonio Landriani ed Ambrogio Fusinieri; i due Ardoino da Padova; da Verona il colonnello Lorgna, fondatore della Società dei XL; lettere da Pavia dello Scopoli e di Lazzaro Spallanzani che vi discute a lungo sul non intermesso tema della natura dei pipistrelli. La nobile schiera s'abbellisce coi nomi di Sénebier, Boscovich, d'Alembert, Scheele, Bossut, Monnet, Macquer, Spielmann, de Condorcet, Lalande, Laplace e Monge. Infine lettere preziose di quella triade illustre di nostri comprovinciali che cercarono in terre straniere maggior benignità di sussidi, se non di cielo; ho citato Berthollet, Denina e Lagrange.

Dalle più antiche di queste lettere traspariscono due nobili sentimenti; di gratitudine verso Giuseppe Angelo Saluzzo per cui opera sorse l'Accademia, e di ammirazione per il grande Lagrange primo fondatore della Società privata torinese.

Il Conte Fontana di Cravanzana, ministro del Re a Berlino è lieto di partecipare al Lagrange la sua elezione a presidente onorario dell'Accademia perchè conosce « que de toutes les preuves d'approbation et de bonté que S. M. pourrait lui destiner, c'est assurément celle qui sera plus propre à entretenir les sentiments de dévouement que je lui ai toujours vu pour son Souverain et sa patrie (1) ». Il Landriani si rallegra per la giustizia resa dal Re a quest'uomo straordinario che era stato un po' troppo trascurato dalla Corte di Torino (2). « C'est une chose honorable pour lui (scrive da Parigi il Condorcet), agréable pour ses amis et qui fera honneur au Roi dans l'esprit de tous les hommes éclairés (3) ». Anton Maria Lorgna, va più in là: « chi sa che non lo possiamo

---

e prozio del collega Giacinto Berruti (nominato il 25 Giugno 1871) che è figlio di un fratello di Secondo. Questo, a mio credere, rappresenta nella nostra Accademia il più singolare esempio di relazioni di vicinissima parentela fra soci e la sola dove si vegga rifiorire la elezione nella terza, quantunque indiretta, generazione. Furono Accademici, tanto il padre quanto il figlio, Prospero e Cesare Balbo; Ottavio e Tancredi di Barolo; Giuseppe Enrico e Leone Costa di Beauregard; Carlo e Carl'Ignazio Giulio; Giuseppe ed Antonio Manno; il padre e due figli nei Michelotti; Domenico e Vincenzo Promis, con Carlo fratello del primo; Ignazio e Giambattista Somis. Zio e nipote nei Barucchi, Carena, Peyron, Schiapparelli; due fratelli nei Ménabrèa, Napione, Provana del Sabbione e Sismonda; tre fratelli ed una sorella nei Saluzzo.

(1) Lettera al Co. Saluzzo, 29 Luglio 1783.

(2) Lettera al Co. Saluzzo, Agosto 1783.

(3) Lettera al Co. Saluzzo, 29 Luglio 1783.

» riavere per questa nobile e luminosa via. L'espediente è degno del
» Sovrano che l'ha preso (1) ». Il Denina poi c'informa dei sensi
provati dallo stesso Lagrange « Vi posso assicurare (scrive all'Avvo-
» cato Chionio) quello che ve ne ho toccato nella precedente. S. M.
» ed il Ministro che lo consigliò, non potevano far la cosa più ge-
» nerosamente. Non solo il signor Marchese (*Lucchesini*) e M. De-
» Lagrange, ma il signor Mérian Direttore della classe delle belle
» lettere e versatissimo nella letteratura italiana e l'ottimo nostro
» collega M. De Castillon, nato ed allevato in Toscana, trovano il
» diploma (*della fondazione dell'Accademia*) dettato con dignità
» e il S. De Lagrange mi parve sommamente contento, non tanto
» del titolo di presidente onorario che gli è conferito, quanto della
» maniera con cui si parla nelle Patenti dei principii di questa
» oramai reale e pubblica Società di scienze. Egli ha ragione di
» compiacersene perchè ne fu veramente il primo autore e quasi
» che io pure partecipo di questa sua compiacenza, per l'antica
» amicizia contratta e nell'Università, quando ancor non potea so-
» gnare di divenire, come poi sì presto divenne, sommo e sublime
» geometra (2) ».

Come finale di questo bel concerto credo udrete con soddisfazione le stesse lettere che allora il Lagrange scriveva al Saluzzo.

« *Monsieur*,

« Il est bien flatteur pour vous, mon illustre Confrère, d'avoir
» fait réussir le projet que nous avions formé, il y a vingt-cinq
» ans, d'une Académie des Sciences, et dont l'exécution paroissoit
» sujette a des difficultés insurmontables. Vous avez en cela bien
» mérité de vos amis, de la patrie, et des sciences; et je ne puis
» à cet égard que joindre mes remercîmens à ceux de mes
» Confrères. Mais je vous en dois de particuliers pour l'honneur
» que votre amitié m'a attiré, et dont je suis d'autant plus

(1) Lettera al Co. Saluzzo, 15 Aprile 1783.

(2) Lettera dell'Agosto 1783.

In essa con transizione oggettiva si compiaceva di avere già « prenunziato questa formale istituzione », in quel suo *panegirico primo* al buon Re Vittorio, che non fece scordare l'antico frizzo del Professore torinese sulla pretesa predilezione del suo Sovrano per i tamburini sopra gli scienziati.

» touché que j'avais moins droit de m'y attendre. Cependant si
» je ne croignois qu'il n'y eut encore plus d'amour propre a m'y
» refuser qu'à l'accepter, je n'hésiterois pas à prendre le pre-
» mier parti comme plus conforme à ma façon de penser; mais
» cette crainte jointe à celle de paroître ingrat me retient, et
» je reçois la distinction qu'il plait au Roi de m'accorder,
» avec le respect dû aux faveurs de Sa Majesté. Je vous sup-
» plie donc de vouloir bien être auprès d'Elle l'organe de ma
» vive reconnoissance, et de m'acquitter aussi envers le Ministre
» par les mains duquel cette grâce a passée, et qui daigne
» avoir de moi une opinion que je ne mérite pas.

» Je vous suis infiniment obligé de la bonté que vous avez
» eue de me faire passer la patente et les Statuts de l'Aca-
» démie; j'ai lu cette pièce avec une grande satisfaction, et
» le souvenir de tout ce qui s'était passé dans ma jeunesse
» relativement à cet objet me l'a rendue plus intéressante en-
» core. La constitution actuelle de ce corps me paraît aussi bonne
» qu'on pouvoit le désirer et très propre à le faire prospérer
» de toutes manières. Je vous en félicite, et je m'en réjouis avec
» vous de tout mon cœur.

» Je n'ai pu être d'aucune utilité a M. Boarelli qui m'a re-
» mis votre lettre, et qui n'a fait ici qu'une apparition, étant pressé
» de continuer son voyage pour éviter les grandes chaleurs dans
» la route. J'espère qu'il trouvera à se placer avantageusement
» à Pétersbourg par son mérite, par les recommandations dont
» il est muni, et surtout par la nature de sa profession que les
» circonstances actuelles doivent y rendre très importante.

» Je serois bien flatté de pouvoir vous être bon à quelque
» chose dans ce pays; et votre nouvelle confraternité me devien-
» droit bien plus précieuse si elle servoit a m'attirer l'honneur
» de vos ordres. Il ne tiendra pas à moi de la mériter par
» mon zèle à les remplir.

» Recevez de rechef mes très sincères complimens, et les as-
» surances des sentimens remplis d'estime de respect et de re-
» connoissance avec lesquels j'ai l'honneur d'être

» Monsieur

» *Votre très humble*
» *et très obéissant Serviteur*

» De la Grange »

« à Berlin ce 25 Août 1783 ».

« à Berlin ce 28 Juin 1785. »

» Puisque vous voulez absolument, mon cher Comte, que je » vous envoie quelque chose pour le nouveau volume, j'adresse par » ce même ordinaire à M. Boccardi un paquet contenant deux » Mémoires, un d'analyse pure, l'autre sur la théorie des fluides, » lesquels y occuperont peut être plus de place qu'ils ne méritent. » Ce manuscrit est très correct par rapport aux formules d'algè- » bre; et je prie l'imprimeur de s'y conformer le mieux qu'il » pourra. Je suis très aise que la chimie, la physiologie et l'his- » toire naturelle forment la partie dominante de ce volume; il » n'en sera que plus intéressant même pour moi, et à coup sûr » plus utile.

» J'ai lu à l'Abbé Denina l'article de votre lettre qui le re- » garde, il a été fort sensible à votre souvenir, et m'a chargé » de vous en remercier. Je vous prie de vouloir bien m'acquitter » envers ceux qui m'honorent du leur, et de faire quelque fois » commémoration de moi avec nos anciens et communs amis; pour » leur écrire rarement je ne leur suis pas moins sincèrement et » constamment attaché, et l'éloignement n'a en aucune manière » diminué la vivacité de mes sentiments. Vous connoissez ceux » que je vous ai voués depuis longtems; ils n'ont fait qu'aug- » menter par les bontés que vous avez eues en dernier lieu pour » moi, et les nouveaux témoignages d'intérêt dont vous m'honorez » dans votre lettre y ajoutent encore. Je prends la part la plus » vive à votre rétablissement ainsi qu'a celui de notre ami Ci- » gna. Je serois au désespoir de devoir renoncer à la consolation » de vous rembrasser tous les deux. J'ai appris que M. Favrat » était devenu sénateur à Turin; oserois-je vous prier de lui en » faire mon compliment, et de lui demander en même tems s'il » a reçu la réponse que je lui adressai à Chambéry.

» Recevez mon très illustre Confrère les assurances de la » tendre estime et du respectueux attachement avec lequel j'ai » l'honneur d'être

« Monsieur

» *Votre très humble*
» *et très obéissant serviteur*

» De la Grange ».

La riconoscenza al Saluzzo non era nè di convenzione, nè soverchia. Il caso, come dissi, mi servì maravigliosamente per sincerarvene.

Dando ordine e classazione ai numerosi manoscritti posseduti dall'Accademia per descriverveli, più volte m'era venuta fra le mani una filza voluminosa sulla quale stava scritto che erano *Carte di contabilità*. Come usa nelle cose fastidiose sempre ne procrastinava la rassegna; finchè, ora fanno pochi giorni, vinta la ritrosia, mi posi ad esaminarle. Tra la bellezza di quaderni di conti, di ricevute, di fatture, di tutto il ciarpame d'ufficio; con vero stupore vi trovai un prezioso fascicolo tutto di documenti sulla trasformazione della Società antica nella nuova Accademia Reale.

Questo cambiamento era stato tentato, senza successo, da un gentiluomo filosofo; dal Marchese di Fleury, che fu aio del Principe di Piemonte.

Sempre avevalo desiderato il Saluzzo che sosteneva coll'opera e colla borsa la pubblicazione dei *Mélanges*. Dolevagli sommamente che la Società torinese di Reale non avesse che un titolo, per così dire di cortesia; e non fosse regolata nè da ordini, nè da ufficiali; non fosse sussidiata; non fosse alloggiata; non vivesse insomma di vita civile. Ripetutamente lagnavasi che la Società non avesse mezzi per corrispondere agli inviti, ai quesiti, alle premure delle altre; cose necessarie alle Accademie che fanno studi di scienza a differenza di quelle che « unicamente si oc- » cupano (secondo la frase del Saluzzo) della misura, dell'ordine, » dell'armonia delle parole ». Ond'è che venutogli il destro, si valse di tre piccole cause per ottenere un grande effetto.

Giusti lamenti mandava da Verona il Lorgna, cui, per deficienza di denaro, da circa tre anni si ritardava la stampa di due Memorie spedite alla Società.

L'Accademia Teodoro-Palatina di Manheim sollecitava perchè si stabilissero apparecchi meteorologici ed una rete di osservazioni, a vantaggio, come dicevasi nella lettera di richiesta, del genere umano.

Infine l'astronomo Lalande richiedeva istantemente il Saluzzo di notizie sull'organamento e sui sussidi della Società per parlarne in una nuova edizione del suo *Viaggio in Italia*; nella quale avrebbe dovuto togliere a Milano la meraviglia del palmizio che fruttava datteri nel cortile dell'Ambrosiana.

Il Saluzzo con ripetuti memoriali metteva in rilievo la poco buona figura che si farebbe lasciando indovinare la impotenza e

la vita precaria di una Società che tutti credevano Reale di nome e di fatti. Sarebbe lungo narrare le vicende, le difficoltà, i disgusti, gli sforzi, che durarono tre anni; e come si dovette lottare per vincere le ritrosie, i pregiudizi, le cattive intenzioni e le ostilità contro alla fondazione di una vera istituzione scientifica nazionale. Opposizioni che partivano specialmente da un Ministro avverso alla impresa.

Dicevano al Re che spenderebbe troppo e pericolosamente. Ed allora il Saluzzo ed i suoi fautori proporre per la dote della futura Accademia o la rivendicazione di un lascito dell'antiquario Conte Bagnolo, od il privilegio di una pubblica annuale lotteria; oppure la privativa su tutti gli almanacchi.

Ripieghi presto e con migliore consiglio cambiati in un discreto e decente assegnamento.

Ma più che collo spavento della spesa cercavasi di intimorire il Re collo spettro del filosofismo e che la propagazione delle cognizioni riuscirebbe fatale allo spirito di sommessione. Cosicchè, per tranquillare l'animo regio, il Saluzzo continuava a limitare gli studi dell'Accademia a quelli di scienze esatte e naturali osservando accortamente che oltre ai rilevanti vantaggi materiali « il en est un très-important pour l'état, savoir celui de n'avoir » rien à craindre des conséquences que les lumières qui se ré- » pandraient pourraient apporter à sa tranquillité; on ne pour- » rait rien tenter au préjudice des liens sacrés de la société, » dans le traitement de la géométrie et de la physique ».

Infine fu accomodamento necessario per piegare quell'ostile Ministro, più pratico di fôro che di portico, e che ambiva di essere Presidente della nuova Accademia; di accogliervi il figlio che pizzicava di scienziato.

Oggi, giorno di festa, non voglio nominare il ritroso Ministro; per contro addito alla vostra riconoscenza i generosi che aiutarono il Saluzzo. Informavano e premunivano e consigliavano il Re, il suo medico, Ignazio Somis, che fu accademico; e Benedetto Piossasco Cavaliere di None poi Grande Ciambellano e quel Conte di Lagnasco, nonno di Massimo d'Azeglio nei cui *Ricordi* tutti abbiamo letto com'egli per medicare le caustiche spruzzaglie dell'acquasantino di Corte avesse fatto scrivere nel suo gabinetto *AI FA PA NEN; non importa* (1)! Ma il più autorevole fra

(1) *Ricordi*, I, 22.

i nostri Dei tutelari fu il Ministro per l'estero che scaltramente seppe deludere i maneggi del suo innominabile collega. Sia lode e gratitudine a Carlo Francesco Baldassarre Perrone San-Martino, avolo dell'eroe morto a Novara e conserviamo gelosamente fra i nostri manoscritti, un suo libro a penna sul *Rifiorimento del commercio.*

Come ho taciuto nomi, così non rivolto la medaglia dei trionfi del Saluzzo. Sul rovescio vi leggeremmo disgusti, dissapori, disillusioni. Perchè aveva fatto tutto presero ad infastidirlo col complimento che abbrucia: *vuol fare tutto!* Cosicchè egli ispirandosi a quella filosofia pratica che contenta gli animi miti, lasciò che altri facesse. La sua presidenza che doveva essere perpetua non durò che cinque anni.

Da queste carte e carteggi avrei desiderato trascrivere il meglio per servire alla storia dell'Accademia e degli Accademici. Il tempo fu troppo breve e non potei. Ma ciò che venne differito, forse non sarà abbandonato.

Il Socio Professore Alfonso Cossa fa la seguente comunicazione intorno ad un'*Idocrasia della Valle di Susa:*

Tra i differenti campioni di minerali metallici, che i nostri Alpigiani infaticabili cercatori di miniere, portano frequentemente al laboratorio di chimica docimastica della Scuola degli Ingegneri di Torino, merita di essere ricordato un campione di bornite compatta nella quale trovavansi disseminati copiosi e ben sviluppati cristalli di idocrasia.

Relativamente alla località da cui proveniva questo minerale, mi fu solamente indicato che esso fu raccolto ad una grande altezza sui monti che sovrastanno ad Almese e Condove nella Valle di Susa.

Non essendo a mia cognizione che finora siasi trovata l'idocrasia nella località sovracitata, ho creduto importante di farne l'analisi, che comunico all'Accademia solo quale piccolissimo contributo alla parte chimica della mineralogia delle Alpi Occidentali.

L'idocrasia liberata coll'acido nitrico diluito da ogni traccia di bornite presentava nessuna traccia di introsione del minerale metallico; ed i saggi quantitativi più volte ripetuti non fecero scoprire in essa alcuna traccia di rame.

Il peso specifico di questa idocrasia, che ha un colore variabile nei differenti individui tra il verde chiaro ed il giallo bruno, fu trovato eguale a 3,39 a + 15° C.

L'analisi quantitativa diede i risultati seguenti:

| | |
|---|---|
| Silice con traccie d'acido titanico | 37. 46 |
| Allumina . . . . | 15. 51 |
| Ossido ferrico . . . . | 5. 39 |
| Calce . . . . . | 35. 98 |
| Magnesia . . . . | 1. 97 |
| Acqua . . . . . | 3. 40 |
| | 99. 71 . |

Il Socio Barone Gaudenzio CLARETTA comunica all'Accademia, facendole dono dell'autografo, la seguente lettera che l'illustre Storico Gian Carlo Leonardo SIMONDO dei SISMONDI indirizzava al Conte Alessandro di SALUZZO, Presidente dell'Accademia, in ringraziamento della sua elezione a Socio Straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche:

*Monsieur le Comte*,

Je viens de recevoir, avec une bien vive reconnoissance la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser, par laquelle vous m'annoncez que l'Académie Royale des Sciences a daigné m'admettre à une place d'Académicien étranger, et que S. M. le Roi a bien voulu approuver cette nomination. Je tiens à grand honneur, Monsieur, d'être associé à un corps aussi illustre et de pouvoir desormais me dire votre Collégue. Je suis touché en même tems de tout ce qui resserre mes liens avec mon pays de prédilection, ma chère Italie.

Daignez exprimer toute ma reconnoissance à l'Académie Royale des Sciences de Turin, et me croire, avec les sentimens de la plus haute considération,

Monsieur le Comte,

Chêne près Genève, 8 Décembre 1838.

*Votre très-humble et très-obéissant Serviteur*

I. C. L. de SISMONDI.

Il Socio Maggiore Prof. F. Siacci comunica all'Accademia il seguente suo scritto:

# ALCUNI TEOREMI

SULLA

## RESISTENZA INCONTRATA DA UNA SUPERFICIE IN MOTO DENTRO UN FLUIDO.

Della resistenza incontrata da una superficie dotata di moto di traslazione entro un fluido, non conosco, all'infuori degli studi sperimentali, che le formole stabilite molti anni fa dal Conte di S. Robert riguardanti una superficie di rivoluzione, e riprodotte in seguito da altri autori (*). Egli, considerando un proietto oblungo che muovesi obliquamente al suo asse, e supponendo la resistenza proporzionale al quadrato della velocità, stabilisce gl'integrali che determinano le componenti ortogonali, una delle quali secondo l'asse, ed il punto d'applicazione della resistenza totale.

Nel teorema seguente, io considero una superficie qualunque, di rivoluzione o no, continua o discontinua, limitata da un cilindro le cui generatrici sono parallele alla direzione del moto. Suppongo la resistenza elementare proporzionale ad una potenza qualunque $n$ della velocità, e chiamo forza *ritardatrice* la componente della resistenza totale secondo la velocità, e forza *deviatrice* la componente perpendicolare. Ciò posto ecco il teorema:

(*) Saint-Robert, *Mémoires scientifiques réunis et mis en ordre.* Tome I. *Balistique.* Turin 1882, pag. 251-278.

*Proiettando la forza deviatrice sopra un piano qualunque parallelo alla velocità, il prodotto di questa proiezione per $n+1$ è eguale alla derivata della forza ritardatrice rispetto all'angolo fatto dalla velocità con una retta qualunque posta sul piano stesso.*

Da questo teorema generale, segue facilmente questo corollario.

*In un proietto oblungo la forza deviatrice spingerà il proietto verso la parte accennata dalla punta o dalla parte opposta, secondochè la ritardatrice cresce o decresce coll'aumentare dell'obliquità.*

Riguardo ad una superficie di rivoluzione limitata da un piano perpendicolare all'asse, si può dimostrare facilmente anche questo teorema:

*Supposta la resistenza elementare proporzionale alla velocità o al quadrato della velocità, fintantochè la superficie è esposta interamente alla resistenza, il centro di resistenza non muta col mutar dell'obliquità del moto.*

La determinazione della resistenza sopra un emisfero che muovesi obliquamente al suo asse, anche supponendo la resistenza proporzionale al quadrato della velocità, importa delle operazioni di calcolo non indifferenti (*).

Avvi una formola per mezzo della quale, determinata la resistenza sopra un emisfero, proporzionale alla potenza $n$ della velocità, si ottiene per mezzo di una semplice differenziazione la resistenza sullo stesso emisfero proporzionale alla potenza $n+2$ della velocità. Ora, siccome per $n=0$ e per $n=-1$ la resistenza si può determinare senza integrazione, si potrà avere anche senza integrazioni la resistenza proporzionale ad una potenza qualsiasi intera della velocità.

La formola è la seguente:

S'indichi con $\delta$ l'angolo fatto dalla velocità coll'asse dell'emisfero, e con

$$C_n v^n F_n(\delta)$$

(*) Veggasi per esempio Mayewski, *Traité de Balistique*. Paris 1872, pagina 20-26.

la forza ritardatrice: si ha

$$F_{n+2}(\delta) = \frac{1}{n+4}\left[(n+2)\,F_n(\delta) - \frac{\partial F_n(\delta)}{\partial \delta}\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\delta\right].$$

Per $n=0$ e per $n=-1$ si ha senza calcolo:

$$F_0(\delta) = \frac{\pi r^2}{2}(1+\cos\delta)\,, \qquad F_{-1} = 2\,r^2(\pi-\delta)\,,$$

$r$ è il raggio dell'emisfero.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro Dorna, Direttore dell'Osservatorio astronomico, presenta il seguente suo lavoro:

# NUOVO MATERIALE SCIENTIFICO

E

# PRIME OSSERVAZIONI CON ANELLI MICROMETRICI

## ALL'OSSERVATORIO DI TORINO.

L'Osservatorio che fu per tanti anni amministrato dall'Accademia, e diretto da uno de' suoi soci più illustri, pieno di riconoscenza verso di Lei, che seguita a proteggerlo stampandone i lavori, in questa solenne adunanza la ringrazia. Contento che per la sua nobile origine in seno dell'Accademia, sia stato annoverato fra gli istituti dell'Università, la quale ne assicura e rinvigorisce l'esistenza, procurandogli locali e strumenti importanti, ed insistendo perchè gli sia aumentata la dotazione ed accresciuto e migliorato il personale.

L'Osservatorio, l'anno venturo, possederà, sulla torre sud ovest del Palazzo Madama, in apposito cupulo girante di otto metri e mezzo di diametro e cinque metri e mezzo di altezza, che venne congiunto con un corridoio coperto agli altri locali della specola, un grande equatoriale, avente trenta centimetri di apertura e quattro metri e mezzo di distanza focale.

La montatura col tubo è costruita in Padova, all'officina Osservatorio astronomico della Società Veneta, che la presenterà all'Esposizione generale di Torino, prima di collocarla nel Palazzo Madama.

La rinomata casa Merz di Monaco in Baviera, lavorò l'obbiettivo, un micrometro filare con circolo di posizione e parecchi oculari, due dei quali con anelli micrometrici.

Fu inoltre, prima, acquistato uno spettroscopio solare ed uno stellare di Zölluer, costruiti a Lipsia da Tauber.

Per i riscontri necessari ad ultimare l'equatoriale, tutto questo materiale scientifico fu mandato da Torino a Padova; eccettuati i due oculari con anelli micrometrici, per provarli, non avendone mai avuti alla specola.

Si fecero qui delle madreviti con cui si applicano a due cannocchiali, molto più piccoli del precedente, ma buoni di Fraunhofer, ed anche con montatura equatoriale; che se non è necessaria è anche utile cogli oculari con anelli micrometrici.

Fu preparato inoltre qui, per osservare il Sole coi medesimi, un elioscopio di Parigi, che dà una immagine bianca, leggermente colorata di violetto.

Nella seconda settimana di Dicembre si cominciò a provare i due oculari col cannocchiale minore cercatore di comete, che ha l'apertura di 96 millimetri e la distanza focale di 83 centimetri. Gl'ingrandimenti dei due oculari con questo cannocchiale sono rispettivamente 31 e 20; ed il primo oculare ha un anello ed il secondo due.

Si osservò per determinare col Sole e con stelle i raggi degli anelli micrometrici nel cannocchiale adoperato, come si farà l'anno venturo per il refrattore Merz dell'equatoriale; e per seguire la cometa Pons, riferendola a stelle per lo più di grandezza non inferiore alla settima, la maggior parte delle quali è contenuta nel BAC della Società di Londra.

Lo scopo principale dell'Osservatorio per l'Università essendo l'astronomia che insegna, non basta che presenti all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, come fa per le osservazioni meteorologiche, i risultamenti astronomici ottenuti, ma deve esporre i procedimenti con cui questi derivano dalle osservazioni. Senza però sviluppare teorie e dimostrare le formole adoperate; eccettuate le cose differenti dalle pubblicate, che pare abbiano qualche utilità.

Con queste norme, comincia a presentare una Nota col titolo: « *Sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici col Sole* ». Una seconda sarà « *Sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici con stelle* »; ed una terza « *Sopra alcune osservazioni con anelli micrometrici della cometa Pons, in Dicembre e Gennaio* ».

Quando l'Osservatorio avrà l'aiuto e l'astronomo aggiunto, domandati per la scuola d'Astronomia e per la specola, sarà in grado di presentare all'Accademia frequentemente delle osservazioni astronomiche, le quali se vogliono tempo e fatica a farle, molto maggior tempo e fatica richiedono, inoltre, per le riduzioni.

9 Marzo 1884

ALESSANDRO DORNA.

---

# NOTA PRIMA

## SULLA DETERMINAZIONE

DEI

# RAGGI DEGLI ANELLI MICROMETRICI COL SOLE

## I.

### Oculare con un anello.

Osservai il Sole in vicinanza del meridiano il 15 ed il 24 Dicembre, facendo nel giorno 15 registrare i tempi dei contatti al pendolo siderale Dent, e servendomi nel giorno 24 di un contatore a secondi, che confrontai col pendolo suddetto, prima e dopo delle osservazioni, mediante un mezzo cronometro Dubois.

Nel modo con cui vennero registrati i contatti al 15, vi è stato un piccolo ritardo in tutti, ma probabilmente costante e di nessuna influenza sui valori dei raggi. Anche i piccoli errori commessi al 24 nei confronti del mezzo cronometro col pendolo siderale e col contatore possono considerarsi come compensati nei valori dei raggi.

*Osservazioni del* 15 *Dicembre*
*tempi dei contatti del Sole colle due periferie dell'anello.*

**Osservazione 1ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $17^h\ 24^m\ 34^s,2$ | $17^h\ 26^m\ 55^s,8$ |
| 24 47,3 | 27 7,8 |
| 27 4,8 | 29 27,8 |
| 27 18,9 | 29 40,9 |

**Osservazione 2ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $17^h\ 30^m\ 4^s,9$ | $17^h\ 32^m\ 28^s,1$ |
| 30 19,2 | 32 41,8 |
| 32 37,5 | 34 58,7 |
| 32 50,3 | 35 12,5 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Del 14 Dicembre | $18^h\ 24^m\ 46^s, 82$ | correzione | $-\ 58^m\ 51^s, 37$ |
| » 15 » | 18 29 16, 26 | » | — 58 55, 39 |

Ritardo in un giorno — 4, 02

*Osservazione del 24 Dicembre.*

**Osservazione 1ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $30^m\ 1^s, 0$ | $32^m\ 24^s, 0$ |
| 30 14, 8 | 32 36, 0 |
| 32 32, 0 | 34 55, 3 |
| 32 45, 2 | 35 8, 9 |

**Osservazione 2ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $41^m\ 21^s, 0$ | $43^m\ 44^s, 0$ |
| 41 33, 9 | 43 57, 0 |
| 43 52, 0 | 46 15, 1 |
| 44 5, 8 | 46 29, 2 |

*Confronti del mezzo cronometro* d, *col contatore* c *e col pendolo siderale* p.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | $10^h\ 43^m\ 0^s$ | *d* | $11^h\ 8^m\ 30^s$ | *d* | $11^h\ 30^m\ 30^s$ |
| *p* | 16 26 52 | *c* | 0 15 29 | *c* | 0 37 25 |
| *d* | 12 41 30 | *d* | 12 52 0 | *d* | 18 34 0 |
| *c* | 1 48 15 | *p* | 18 36 19 | *p* | 24 19 29 |

*Andamento di* p *a mezzodì vero.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Del 23 Dicembre | $18^h\ 6^m\ 12^s, 00$ | correzione | $-\ 20^s, 94$ |
| » 24 » | 18 10 42, 05 | » | — 24, 34 |

Ritardo in un giorno — 3, 40

*NB.* L'avanzo del pendolo sul tempo siderale, essendo già quasi di un'ora, venne corretto il 17 del mese in modo che segnava $17^h\ 23^m\ 56^s$ a mezzodì medio di Roma.

Chiamerò $C$, $D$, $E$, $F$ i tempi dei contatti successivi del 1° lembo del Sole colle due periferie dell'anello, e $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ i tempi corrispondenti ai medesimi del 2° lembo.

Risulta dalle osservazioni che il tempo dal primo contatto all'ultimo, ossia $F' - G$, supera di poco cinque minuti, e che il ritardo del pendolo in tal tempo non arriva in valor numerico ad un centesimo e mezzo di secondo, quantità trascurabile in questa ricerca dei raggi.

Basta quindi per le osservazioni del 15 ridurre gli intervalli di tempo trascorso, tali e quali furono segnati dal pendolo siderale, in equivalenti intervalli di tempo solare vero, mediante la *variazione diurna* dell'ascensione retta del Sole, data dall'Almanacco nautico per ogni mezzodì vero di Greenwich; e pelle osservazioni del 24 basterà anche applicare la stessa correzione, dopo di avere ridotti in secondi del tempo siderale gli intervalli di tempo espressi in secondi del contatore. Ora risulta, dai confronti, che la correzione $p - c$ per un secondo è prossimamente uguale a $0^s, 006$. Si devono adunque aggiungere, agli intervalli suddetti del contatore, sei millesimi del loro valore; operazione che si può fare a memoria.

Ciò posto, sia per le osservazioni del 15, sia per quelle del 24 colla piccola aggiunta testè indicata, designando con $\tau$ l'intervallo fra i due contatti esterni, e con $\tau'$ quello fra i due interni, si avrà, in tempo siderale, per la periferia esterna dell'anello: $\tau = F' - C$; $\tau' = F - C'$, e per quella interna $\tau = E' - D$; $\tau' = E - D'$.

Per ridurre questi intervalli in tempo solare vero, bisogna moltiplicarli tutti per il fattore $1 - \frac{\Delta \alpha'}{q}$, in cui sia $\Delta \alpha'$ la variazione diurna dell'ascensione retta del Sole in secondi e $q = 86636^s$ (durata media del giorno solare in secondi).

Siano:

$s'$ il semidiametro orizzontale apparente del Sole in secondi di arco;

$\delta'$ la declinazione apparente del Sole;

$r$ il valore cercato, in secondi d'arco, del raggio dell'anello; per entrambe le periferie di questo si ha:

$$[1]\ldots \qquad r = \frac{(15 \cos \delta')^2}{16\, s'} (\tau + \tau')(\tau - \tau') \left(1 - \frac{\Delta \alpha'}{q}\right)^2 .$$

Poniamo (*)

$$[2]\ldots \quad \log Q = \log \frac{\cos^2 \delta'}{s'} + 1,14806 - 0,00001\,\Delta\alpha,$$

e risulta dalla formola che precede la seguente:

$$[3]\ldots \qquad r = Q(\tau + \tau')(\tau - \tau')$$

pel calcolo logaritmico di $r$, con cinque decimali, sufficienti alla ricerca del medesimo, il cui valore non arriva ad un terzo di grado.

Per le osservazioni fatte in uno stesso giorno si può prendere invece di $s'$ il semidiametro dato dall'Almanacco nautico pel mezzodì di quel giorno, avuto riguardo che è trascurabile l'aumento del semidiametro del Sole e che si può evitare il piccolo errore relativo alla contrazione del suo lembo, osservando i contatti colle periferie dell'anello, vicino alle estremità del semidiametro orizzontale del Sole, la qual cosa è facile ad aversi in vicinanza del meridiano. Si può inoltre considerare $Q$ come costante per tutte le osservazioni fatte così in un medesimo giorno, calcolandolo per l'istante medio dei tempi osservati dopo di avere applicato alla declinazione data dall'Almanacco nautico per mezzodì vero, le correzioni: 1° pel tempo compreso fra tale istante a Greenwich e l'ora media delle osservazioni; 2° per la parallasse; 3° per la rifrazione. Ai tempi $\tau$ e $\tau'$ non è necessaria una correzione per la parallasse e per la rifrazione, le quali, in vicinanza del meridiano, affettando prossimamente in egual modo, e di pochissimo, i tempi dei due contatti, sì esterni, che interni, non alterano sensibilmente le differenze $\tau$ e $\tau'$ di questi tempi.

Non ostante queste minute correzioni è impossibile dedurre con precisione $r$ da una sola osservazione, poichè l'errore di un solo secondo nei tempi può rendere sbagliati di due secondi gli intervalli $\tau$ e $\tau'$ e produrre nel valore di $r$ un errore superiore ad un quarto di primo in arco, ben maggiore dell'errore che

(*) La correzione $-0,00001\,\Delta\alpha$ è analoga alla seguente $-0,00001\,(\Delta\alpha)$ del CHAUVENET (Vol. II, pag. 443), ma in questa $(\Delta\alpha)$ è la variazione dell'ascensione retta *in 48 ore espressa in minuti primi d'arco*, mentre nella precedente della mia formola [2] $\Delta\alpha'$ è *la variazione diurna dell'ascensione retta espressa in secondi di tempo.*

nasce trascurando le correzioni suddette. Infatti differenziando la [3] rispetto ai tempi si ottiene:

$$dr = 2\,Q\,(\tau\,d\tau - \tau'\,d\tau')$$

e se $\qquad d\tau = -d\tau' = 2^s \quad$ risulta

[4]... $\qquad dr = 4\,Q\,(\tau + \tau')\,.$

Dalla Osservazione 1ª del 15 Dicembre si hanno:

$$\tau = 5^m\,6^s,7\,, \qquad \tau' = 23^s,1\,;$$

onde $\qquad \tau + \tau' = 329^s,8\,.$

In quel giorno la declinazione, il semidiametro e la variazione diurna dell'ascensione retta del Sole erano rispettivamente

$$-23^\circ\,16''\,42^s,1\,; \quad 16'\,17'',5 \quad \text{e} \quad 265^s\,;$$

per cui prossimamente $\qquad Q = 0,012\,;$

epperciò $\qquad dr = 15'',8\,.$

Il bisogno di dedurre $r$ da varie osservazioni si fa anche sentire per un'altra circostanza, sia col Sole che con stelle. A rigore di termini il raggio $r$ dell'anello è una quantità variabile dipendente dalla distanza che separa quest'ultimo dall'obbiettivo del cannocchiale. Si dà all'anello la sua posizione attuale per le osservazioni ponendo prima l'anello alla vista distinta senza cambiarne la distanza dall'obbiettivo, e dopo cambiando questa distanza fino ad avere anche la vista distinta dell'astro che si osserva, mediante uno spostamento, comune all'anello ed all'oculare, rispetto all'obbiettivo; e si procura di mantenere in identica posizione il micrometro in tutte le osservazioni, segnando una marca sul collarino del tubetto a cui si applica l'oculare micrometrico, scorrevole nel tubo del cannocchiale. Ma ciò non ostante è impossibile avere sempre esattamente la medesima distanza dall'obbiettivo, e inclino a credere che ciò nemmeno convenga alla precisione delle osservazioni, trattandosi di quantità minime, se con sacrificio della vista distinta pella quale bisogna spostare alcun poco il micrometro, rispetto alle lenti dell'oculare, col variare le circostanze in cui si osserva. Dell'oculare con un solo

anello, di cui parlo, non mi risultò nelle varie osservazioni che ho fatto sinora, una sensibile deviazione dalla sumentovata marca, tanto pel Sole che per le stelle. Coll'altro oculare con doppio anello, di cui parlerò nell'articolo seguente, dalla vista distinta delle stelle e della cometa a quella del Sole la deviazione dalla marca fu sensibile ed in aumento della distanza del micrometro dall'obbiettivo del cannocchiale; ma al più di un millimetro e tre quarti, corrispondente, col cannocchiale adoperato, ad una differenza di sei secondi in arco nel valore del raggio maggiore, che è di poco inferiore a 48′; mentre, come si vedrà, l'errore che può generarsi in questo raggio dallo sbaglio di un secondo nei tempi dei contatti, è possibile raggiunga due terzi di primo in arco.

Per queste considerazioni mi sembra che le differenze provenienti nei valori dei raggi dalla variabilità della distanza del micrometro dall'obbiettivo del cannocchiale, osservando sempre colla vista distinta del micrometro stesso e degli astri, possano considerarsi come accidentali insieme a quelli, assai maggiori, che nascono da errori nei tempi dei contatti; ed è ciò che faccio in questo articolo per l'oculare con un anello, e nel successivo per l'altro che ne ha due.

Nel dedurre i raggi dell'anello semplice dalle osservazioni del 15 e del 24 Dicembre trascritte più sopra, ommisi la correzione per la parallasse e mi limitai ad usare per la rifrazione il coefficiente medio 57″. Da un esempio, in cui sono fatte tutte le correzioni con esattezza, nell'articolo seguente, si vedrà che le differenze che nascono procedendo come in questo articolo, si possono trascurare. Così mi risultarono pei raggi delle periferie nell'oculare con un anello i valori della seguente tabella:

*Valori angolari dei raggi*
*delle due periferie nell'oculare con un anello.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dicembre | Osservaz. 1ª | 18′ 49″, 2 | 15′ 49″, 8 |
| giorno 15 | » 2ª | 18 56 , 4 | 15 43 , 0 |
| » 24 | Osservaz. 1ª | 18 54 , 1 | 15 46 , 4 |
| | » 2ª | 18 57 , 0 | 15 51 , 0 |
| | Medie | 18 54 , 2 | 15 47 , 5 |

Confrontando i valori trovati pei due raggi, col semidiametro del Sole, si vede che l'oculare con un anello, nel cannocchiale a cui l'applicai, comprende il lembo del Sole fra le sue periferie, circostanza che rende guardingo pei contatti interni colla periferia minore; ed ho fatte molte prove prima di osservare l'intero passaggio.

Le due osservazioni del 24 riescirono più concordanti delle due del 15, ma è superfluo tenere conto di questa circostanza nel dedurre i valori finali da così poche osservazioni. Considerandole tutte e quattro come ugualmente erronee, si trova col metodo dei minimi quadrati, che per entrambi i raggi l'errore probabile delle singole osservazioni rispettive è di 2″, 4 (2″, 40 per le osservazioni del raggio maggiore, e 2″, 36 per quelle del minore): e che dalle medesime risultano i seguenti valori dei due raggi

$$18' \, 54'', 2 \qquad\qquad 15' \, 47'', 5$$

entrambi coll'errore probabile di 1″, 2 (ossia 1″, 20, 1‴, 18 rispettivamente).

Le osservazioni della cometa sono soggette ad errori più grandi, provenienti dalla difficoltà, che si incontra per la sua chioma e la sua coda, a ben precisare gli istanti in cui il centro del nucleo è in contatto colle periferie dell'anello micrometrico.

## II.

## Oculare con due anelli.

Visto che l'errore che può nascere nei valori dei raggi per sbaglio nei tempi dei contatti è maggiore in quest'oculare che nel precedente, ho fatto venti osservazioni; e tengo conto di tutte, sebbene qualcuna mi spiaccia, non avendo motivo di rigettarle a preferenza delle altre. Osservai il Sole col doppio anello micrometrico nei giorni 14, 15, 18, 19, 24 Dicembre e 10, 20 Gennaio. Tranne il 24 Dicembre, che notai i tempi col contatore nel modo spiegato, gli altri giorni feci registrare, come al 15 Dicembre, i tempi al pendolo siderale Dent; pel quale dedussi, come precedentemente, il ritardo diurno, dalle osservazioni dei passaggi del Sole, eseguite giornalmente all'Osservatorio dall'Assistente.

Le venti osservazioni, che ho fatte, sono queste:

*Osservazione del* 14 *Dicembre.*

*Tempi dei contatti del Sole colle quattro periferie dei due anelli.*

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $17^h\ 0^m\ 57^s,9$ | $17^h\ 3^m\ 22^s,3$ |
| 1 16,7 | 3 39,5 |
| 2 29,3 | 4 53,2 |
| 2 48,2 | 5 13,4 |
| 6 1,9 | 8 27,3 |
| 6 23,0 | 8 45,7 |
| 7 32,7 | 9 57,3 |
| 7 52,5 | 10 14,5 |

*Osservazione del* 15 *Dicembre.*

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $17^h\ 42^m\ 33^s,5$ | $17^h\ 44^m\ 57^s,5$ |
| 42 50,3 | 45 13,8 |
| 44 3,7 | 46 30,5 |
| 44 22,5 | 46 50,7 |
| 47 28,6 | 49 59,8 |
| 47 52,5 | 50 16,4 |
| 49 4,2 | 51 29,4 |
| 49 24,0 | 51 46,9 |

*Osservazioni del* 18 *Dicembre.*

**Osservazione 1ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $16^h\ 21^m\ 16^s,3$ | $16^h\ 23^m\ 39^s,4$ |
| 21 34,5 | 23 58,8 |
| 22 47,6 | 25 14,3 |
| 23 6,3 | 25 34,8 |
| 26 7,9 | 28 42,8 |
| 26 35,5 | 29 1,6 |
| 27 47,7 | 30 13,4 |
| 28 7,0 | 30 30,7 |

**Osservazione 2ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $16^h\ 32^m\ 45^s,0$ | $16^h\ 35^m\ 9,2$ |
| 33 3,4 | 35 26,0 |
| 34 16,8 | 36 43,4 |
| 34 34,7 | 37 2,7 |
| 37 45,2 | 40 15,4 |
| 38 7,8 | 40 32,5 |
| 39 19,8 | 41 45,3 |
| 39 39,7 | 42 1,8 |

*Osservazione del* 19 *Dicembre.*

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| 16h 55m 41s, 5 | 16h 58m 4s, 3 |
| 55 57, 8 | 58 20, 6 |
| 57 10, 6 | 59 36, 7 |
| 57 28, 9 | 59 57, 0 |
| 17 0 37, 8 | 17 3 7, 2 |
| 1 0, 7 | 3 24, 7 |
| 2 13, 1 | 4 38, 2 |
| 2 32, 8 | 4 55, 7 |

*Osservazioni del* 24 *Dicembre.*

**Osservazione 1ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| 16m 56s, 3 | 19m 21s, 1 |
| 17 9, 2 | 19 34, 0 |
| 18 26, 0 | 20 52, 0 |
| 18 41, 8 | 21 9, 6 |
| 21 51, 0 | 24 21, 8 |
| 22 11, 0 | 24 34, 7 |
| 23 24, 3 | 25 50, 5 |
| 23 42, 0 | 26 3, 4 |

**Osservazione 2ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| 27m 26s, 7 | 29m 52s, 1 |
| 27 39, 8 | 30 4, 3 |
| 28 56, 0 | 31 21, 2 |
| 29 11, 9 | 31 38, 0 |
| 32 22, 7 | 34 51, 4 |
| 32 40, 9 | 35 5, 0 |
| 33 55, 5 | 36 21, 1 |
| 34 12, 9 | 36 35, 0 |

*Osservazioni del* 10 *Gennaio*

**Osservazione 1ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| 20h 56m 12s | 20h 58m 34s |
| 56 28 | 58 51 |
| 57 40 | 21 0 4 |
| 57 59 | 0 22 |
| 21 1 11 | 3 35 |
| 1 31 | 3 52 |
| 2 40 | 5 4 |
| 3 0 | 5 21 |

**Osservazione 2ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| 21h 6m 3s | 21h 8m 27s |
| 6 20 | 8 41 |
| 7 32 | 9 56 |
| 7 51 | 10 15 |
| 11 4 | 13 27 |
| 11 23 | 13 41 |
| 12 32 | 14 56 |
| 12 52 | 15 15 |

### Osservazione 3ª

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $21^h\ 17^m\ 0^s$ | $21^h\ 19^m\ 23^s$ |
| 17 16 | 19 40 |
| 18 29 | 20 52 |
| 18 47 | 21 11 |
| 22 0 | 24 24 |
| 22 19 | 24 41 |
| 23 29 | 25 53 |
| 23 48 | 26 10 |

### Osservazione 4ª

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $21^h\ 27^m\ 37^s$ | $21^h\ 30^m\ 1^s$ |
| 27 54 | 30 16 |
| 29 6 | 31 29 |
| 29 25 | 31 49 |
| 32 38 | 35 2 |
| 32 57 | 35 19 |
| 34 7 | 36 31 |
| 34 26 | 36 48 |

### Osservazione 5ª

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $21^h\ 41^m\ 10^s$ | $21^h\ 43^m\ 34^s$ |
| 41 27 | 43 50 |
| 42 39 | 45 3 |
| 42 58 | 45 22 |
| 46 10 | 48 35 |
| 46 30 | 48 52 |
| 47 40 | 50 3 |
| 47 59 | 50 21 |

### Osservazione 6ª

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $21^h\ 51^m\ 12^s$ | $21^h\ 53^m\ 37^s$ |
| 51 29 | 53 52 |
| 52 42 | 55 6 |
| 53 1 | 55 24 |
| 56 13 | 58 38 |
| 56 33 | 58 54 |
| 57 43 | 22 0 7 |
| 58 2 | 0 24 |

### Osservazione 7ª

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $22^h\ 2^m\ 43^s$ | $22^h\ 5^m\ 7^s$ |
| 3 1 | 5 25 |
| 4 14 | 6 38 |
| 4 32 | 6 56 |
| 7 45 | 10 9 |
| 8 5 | 10 26 |
| 9 14 | 11 38 |
| 9 33 | 11 54 |

### Osservazione 8ª

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $22^h\ 12^m\ 47^s$ | $22^h\ 15^m\ 13^s$ |
| 13 5 | 15 29 |
| 14 19 | 16 42 |
| 14 37 | 17 1 |
| 17 49 | 20 14 |
| 18 9 | 20 31 |
| 19 20 | 21 43 |
| 19 38 | 21 59 |

*Osservazioni del 20 Gennaio.*

**Osservazione 1ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $18^h\ 51^m\ 16^s$ | $18^h\ 53^m\ 36^s,5$ |
| 51 33 | 53 52 |
| 52 44 | 55 3 |
| 53 3,5 | 55 24 |
| 56 13 | 58 34 |
| 56 33 | 58 52,5 |
| 57 42 | 19 0 4 |
| 58 1 | 0 19 |

**Osservazione 2ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $18^h\ 0^m\ 59^s$ | $19^h\ 3^m\ 19^s$ |
| 1 14,5 | 3 35 |
| 2 26 | 4 47 |
| 2 46 | 5 6,5 |
| 5 55 | 8 17 |
| 6 15 | 8 34 |
| 7 25 | 9 45 |
| 7 42 | 10 3 |

**Osservazione 3ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $19^h\ 12^m\ 3^s$ | $19^h\ 14^m\ 23^s$ |
| 12 20 | 14 40 |
| 13 31 | 15 51 |
| 13 50,5 | 16 10,5 |
| 16 59 | 19 20 |
| 17 19 | 19 38,5 |
| 18 28 | 20 50 |
| 18 47 | 21 7 |

**Osservazione 4ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $19^h\ 21^m\ 59^s$ | $19^h\ 24^m\ 21^s$ |
| 22 16 | 24 37,5 |
| 23 27,5 | 25 49 |
| 23 47 | 26 8 |
| 26 55 | 29 17 |
| 27 15 | 29 34,5 |
| 28 25 | 30 46 |
| 28 43,5 | 31 3 |

**Osservazione 5ª**

| 1° lembo del Sole | 2° lembo del Sole |
|---|---|
| $19^h\ 41^m\ 52^s,3$ | $19^h\ 44^m\ 12^s,8$ |
| 42 8,7 | 44 28,9 |
| 43 19,6 | 45 42,5 |
| 43 39,9 | 46 0,8 |
| 46 47,4 | 49 9,3 |
| 47 5,7 | 49 26,8 |
| 48 16,3 | 50 38,3 |
| 48 35,5 | 50 55,9 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Del 13 | Dicembre | $18^h$ | $20^m$ | $17^s, 69$ | correzione | | $-58^m\ 47^s, 37$ |
| » 14 | » | 18 | 24 | 46, 82 | » | | $-58\ \ 51, 37$ |
| | | | | | Ritardo in un giorno | | $-4, 00$ |
| » 17 | » | 17 | 39 | 11, 36 | correzione | | $+1, 09$ |
| » 18 | » | 17 | 43 | 40, 31 | » | | $-1, 75$ |
| | | | | | Ritardo in un giorno | | $-2, 84$ |
| » 18 | » | 17 | 43 | 40, 31 | correzione | | $-1, 75$ |
| » 19 | » | 17 | 48 | 10, 28 | » | | $-5, 43$ |
| | | | | | Ritardo in un giorno | | $-3, 68$ |
| Del 10 | Gennaio | 19 | 26 | 46, 03 | correzione | | $-1^m\ 27^s, 93$ |
| » 11 | » | 19 | 31 | 8, 29 | » | | $-1\ \ 31, 49$ |
| | | | | | Ritardo in un giorno | | $-3, 56$ |
| » 19 | » | 20 | 5 | 59, 06 | correzione | | $-1\ \ 59, 58$ |
| » 20 | » | 20 | 10 | 17, 19 | » | | $-2\ \ 2, 97$ |
| | | | | | Ritardo in un giorno | | $-3, 39$ |

Chiamerò $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ i tempi dei contatti successivi del 1° lembo del Sole colle quattro periferie dei due anelli, e colle stesse lettere, con un accento, i tempi corrispondenti ai medesimi del 2° lembo.

Risulta dalle osservazioni che il tempo dal primo contatto all'ultimo, ossia $H'-A$, eccede di poco nove minuti, e che il ritardo del pendolo in tal tempo ha appena il valor numerico di due centesimi e mezzo di secondo, quantità anche trascurabile nell'attuale ricerca.

Ponendo adunque successivamente

$$\begin{aligned} \tau &= H'-A\ ; & \tau' &= H-A' \\ &= G'-B\ ; & &= G-B' \\ &= F'-C\ ; & &= F-C' \\ &= E'-D\ ; & &= E-D'\ , \end{aligned}$$

si potranno calcolare i raggi delle quattro periferie degli anelli nel modo stesso che si è fatto per l'anello semplice, colle formole [2] e [3] dell'articolo che precede.

Trascrivo qui, nella sua integrità, il calcolo che ho fatto coll'osservazione del 14 Dicembre.

*leolo dei raggi del doppio anello micrometrico colle osservazioni del 14 Dicembre*

**Ricerca della declinazione e dell'angolo orario del Sole per l'istante medio dell'osservazione a mezzodì vero di Torino.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tempo dell'ultimo contatto | | $17^h 10^m 14^s, 5$ | a mezzodì vero di Torino | $18^h 24^m 46^s, 82$ |
| » primo » | | 17 0 57 , 9 | ritardo in $24^h$ — 4 , 00 | |
| Istante medio | | 17 5 36 , 2 | » 1, 32 — 0 , 22 | 17 5 36 , 2 |
| Correzione del pendolo | | — 58 51 , 15 | correzione a mezzodì — 58 51 , 37 | — 1 19 10 , 62 |
| Tempo siderale | $\theta =$ | 16 6 45 , 05 | | $= -1, 32$ |
| Longitudine da Gr. | | — 30 48 , 4 | — 58 51 , 15 | |
| | $\theta_0 =$ | 15 35 56 , 65 | | |
| $AR\Theta$ a mezzodì vero di Gr. | | 17 26 1 , 12 | sua variazione orario $11^s, 053$ | |
| npo siderale a trascorrere di Gr. per arrivare a mezzodì | | 1 50 4 , 47 | | |
| Id. solare » | $T_0 =$ | 1 49 46 , 44 | | |
| Var. dell'$AR\Theta$ in tal tempo | | 20 , 22 | | |
| $AR\Theta$ al tempo $\theta$, | $\alpha =$ | 17 25 40 , 90 | | |
| golo orario del Sole a Torino nell'istante dell'osservazione | $\theta - \alpha = t =$ | — 1 18 55 , 85 | | |
| | | $= -19^\circ 43' 57'', 75$ | | |
| el. $\Theta$ a mezzodì vero di Gr. | | —23 13 19 , 9 | sua variazione orario $8'', 98$ | |
| r. della decl. $\Theta$ nel tempo $T_0$ | | 16 , 43 | | |
| Decl. $\Theta$ corrispondente a $t$ | $\delta =$ | —23 13 3 , 47 | | |

*Correzioni di $\delta$ e t per la parallasse.*

$$- t = \frac{\rho\pi \cos\varphi' \operatorname{sen} t}{\cos\delta} \qquad \varphi' = \varphi - 690'', 65 \operatorname{sen} 2\varphi + 1'', 16 \operatorname{sen} 4\varphi$$

$$n\,\gamma = \frac{\tan\varphi'}{\cos t} \qquad 10 + \log\rho = 9,9992747 + 0,0007271 \cos 2\varphi - 0,0000018 \cos 4\varphi$$

$$- \delta = \frac{\rho\pi \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}(\delta - \gamma)}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \varphi = 45^\circ\ 4'\ 8'' \qquad \pi = 8'', 99 .$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| sen $2\varphi =$ log cos 8′ 16″ | 9,9999987 | log sen $4\varphi$ = — log sen 16′ 32″ | 7,6820849 $n$ |
| cos $2\varphi =$ — log sen 8′ 16″ | 7,3810561 $n$ | log cos $4\varphi$ = — log cos 16′ 32″ | 9,9999950 $n$ |

$\varphi = 45^\circ\ 4'\ 8''$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 11 30 , 65 | | | | | | |
| $\varphi' =$ | 44 52 37 , 35 | log tan $\varphi'$ | 9,99814 | log sen $\varphi'$ | 9,84855 | log cos $\varphi'$ | 9,85041 |
| $\delta =$ | — 23 13 3 , 5 | log cos $t$ | 9,97372 | — log sen $\gamma$ | 0,13865 | log sen $t$ | 9,52844 $n$ |
| $\gamma =$ | 46 36 36 | log tan $\gamma$ = | 0,02442 | log $\pi$ = | 0,95376 | log $\pi$ = | 0,95376 |
| $-\gamma =$ | — 69 49 39 , 5 | | | log $\rho$ | 9,99927 | log $\rho$ | 9,99927 |
| | | | | log sen $(\delta - \varphi)$ | 9,97251 $n$ | — log cos $\delta$ | 0,03668 |
| | | | | log $(\delta_1 - \delta)$ = | 0,91274 $n$ | log $(t_1 - t)$ = | 0,36856 $n$ |
| | | | | $\delta_1 - \delta$ = | — 8″, 2 | $t_1 - t$ = | — 2″, 33 |
| | | | | $\delta$ = | — 23 13 3 , 5 | $t$ = | — 19° 43′ 57 , 75 |
| | | | | $\delta_1$ = | — 23° 13′ 11″, 7 | $t_1$ = | — 19° 44′ 0″, 08 |
| | | | | | | = | — $1^h 13^m 56^s$ |

$x_1 = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos t_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| sen $\varphi$ | 9,85001 | log cos $\varphi$ | 9,84896 |
| sen $\delta_1$ | 9,55578 $n$ | log cos $\delta'$ | 9,96332 |
| | 9,14579 $n$ | log cos $t_1$ | 9,97372 |
| | — 0,27913 | | |
| | + 0,61095 | | 9,78600 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| cos $x_1$ = 0,33182 ; | log cos $x_1$ 9,52090 | $x_1$ = 70° 37′ 15″ ; | $t_1$ = $10^h 41^m$ matt. |

## *Correzioni di $\delta_1$ e $t_1$ per la rifrazione.*

### Tempo solare vero.

| | 9 mattina | mezzodì | $10^h\ 41^m$ matt. | $k = \alpha'(BT)^{A'}\gamma^{\lambda'}$ |
|---|---|---|---|---|
| Barometro | $739^{mm}, 74$ | $739^{mm}, 82$ | $B = 739^{mm}, 78$ | $\log B = -0,00683$ |
| Term. attacc. | $-1^\circ\ ,\ 0$ | $1^\circ\ ,\ 4$ | $T = 0^\circ\ ,\ 35$ | $\log T = -0,00002$ |
| Term. esterno | $-0\ ,$ | $3\ ,\ 2$ | $\gamma = 1\ ,\ 62$ | $\log \gamma = +0,01193$ |

$\log BT = -0,00$

$z = 70^\circ\ 37'\ 15''$ $\quad \log \alpha' = 1,75636$ $\quad A' = 1\ ;\ \lambda' = 1,0095$

$\log (BT)^{A'} = -0,00685$

$\log \gamma^{\lambda'} = 0,01204$

$k' = 57'', 7$ $\quad \log k' = 1,76155$

$\tan N = \cot \varphi \cos t_1$

$\tan z_1 \cos q = \cot(\delta_1 + N)$

$\tan z_1 \operatorname{sen} q = \dfrac{\operatorname{sen} N \tan t_1}{\operatorname{sen}(\delta_1 + N)}$

$d\delta_1 = k' \tan z_1 \cos$

$d t_1 = k' \dfrac{\tan z_1 \operatorname{sen}}{\cos \delta_1}$

| | |
|---|---|
| $\log \cot \varphi$ | 9,99896 |
| $\log \cos t_1$ | 9,97372 |
| $\log \tan N$ | 9,97268 |
| $\log \operatorname{sen} N$ | 9,83540 |
| $\log \tan t_1$ | 9,55473 $n$ |
| $-\log \operatorname{sen}(\delta_1 + N)$ | 0,46638 |
| $\log \tan z_1 \operatorname{sen} q$ | 9,85651 $n$ |
| $\log k$ | 1,76155 |
| $-\log \cos \delta_1$ | 0,03669 |
| $\log d t_1$ | $= 1,65485\ n$ |

$\delta_1 = -23^\circ\ 13'\ 11'', 7$

$N = 43\ 11\ 57$

$\delta_1 + N = 19\ 58\ 45$

$\delta_1 = 2\ 38\ ,\ 8$

$\delta' = -23^\circ\ 10'\ 32'', 8$

$t_1 = -19\ 44\ 0\ ,\ 08$

$d t_1 = -\ 45\ ,\ 16$

$t' = -19^\circ\ 44'\ 45'', 24$

$\log k = 1,76155$

$\log \tan z \cos q = 0,43943$

$\log d\delta_1 = 2,20098$

| | |
|---|---|
| $\log \tan z_1 \operatorname{sen} q$ | 9,85651 $n$ |
| $\log \tan z_1 \cos q$ | 0,43943 |
| $\log \tan q$ | 9,41708 $n$ |
| $\log \operatorname{sen} q$ | 9,40274 $n$ |
| $\log \cos q$ | 9,98566 |
| $\log \tan z_1$ | $= 0,45377$ |
| $q$ | $= -14^\circ\ 38'$ |
| $z_1$ | $= 70\ 37$ |

[2] $\quad \log Q = \log \dfrac{\cos^2 \delta'}{s'} + 1,14806 - 0,00001 \,.\, \Delta\alpha'$

$s' = 16'\ 17'', 4 = 977'', 4\ ;$ $\quad \Delta\alpha' = 265''$

$\log \cos \delta'$ 9,96346

| | |
|---|---|
| $\log \cos^2 \delta'$ | 9,92692 |
| $-\log s'$ | 7,00993 |
| | 1,14806 |
| | $-0,00265$ |
| $10 + \log Q$ | $= 8,08226$ |

$Q = 0,01209$

[3]

$r = Q(\tau + \tau')(\tau - \tau$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H'$ | $10^m 14^s, 5$ | $H$ | $7^m 52^s, 5$ | $G'$ | $9^m 57^s, 3$ | $G$ | $7^m 32^s, 7$ | $F'$ | $8^m 45^s, 7$ | $F$ | $6^m 23^s, 0$ |
| $A$ | $0\ 57\ ,\ 9$ | $A'$ | $3\ 22\ ,\ 3$ | $B$ | $1\ 16\ ,\ 7$ | $B'$ | $3\ 39\ ,\ 5$ | $C$ | $2\ 29\ ,\ 3$ | $C'$ | $4\ 53\ ,\ 2$ |
| | $9\ 16\ ,\ 6$ | | $4\ 30\ ,\ 2$ | | $8\ 40\ ,\ 6$ | | $3\ 53\ ,\ 2$ | | $6\ 16\ ,\ 4$ | | $1\ 29\ ,\ 8$ |
| | $\tau = 556\ ,\ 6$ | | $\tau' = 270\ ,\ 2$ | | $= 520\ ,\ 6$ | | $= 233\ ,\ 2$ | | $= 376\ ,\ 4$ | | $= 89\ ,\ 8$ |
| | $270\ ,\ 2$ | | $556\ ,\ 6$ | | $233\ ,\ 2$ | | $520\ ,\ 6$ | | $89\ ,\ 8$ | | $376\ ,\ 4$ |
| | $\tau + \tau' = 826\ ,\ 8$ | | $\tau - \tau' = 286\ ,\ 4$ | | $753\ ,\ 8$ | | $287\ ,\ 4$ | | $466\ ,\ 2$ | | $286\ ,\ 6$ |
| | 2,91740 | | | | 2,87726 | | | | 2,66857 | | |
| | 2,45697 | | | | 2,45849 | | | | 2,45728 | | |
| | 8,08226 | | | | 8,08226 | | | | 8,08226 | | |
| | $\log r = 3,45663$ | | | | 3,41801 | | | | 3,20811 | | |
| | $r = 47'\ 41''\ 7$ | | | | $43'\ 38''\ 2$ | | | | $26'\ 54''\ 8$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E'$ | $8^m 27^s, 3$ | $E$ | $6^m$ |
| $D$ | $2\ 48\ ,\ 2$ | $D'$ | $5\ 1$ |
| | $5\ 39\ ,\ 1$ | | 4 |
| | $= 339\ ,\ 1$ | | 339 |
| | $48\ ,\ 3$ | | |
| | $387\ ,\ 6$ | | 290 |
| | 2,58838 | | |
| | 2,46330 | | |
| | 8,08226 | | |
| | 3,13394 | | |
| | $22'\ 41''\ 3$ | | |

Come accennai nell'articolo precedente il maggiore dei quattro raggi è di poco inferiore a $48'$; e che sia possibile nel medesimo un errore di due terzi di primo, per lo sbaglio di un secondo nei tempi dei contatti, si può adesso vedere; poichè, essendo qui $\tau+\tau'=826^s,8$ e $Q=0,01209$, dalle [4] si ha $dr=39''.98$, ossia assai prossimamente due terzi di primo. La possibilità di un errore così grande per lo sbaglio di un solo secondo nei tempi dei contatti induce a studiare l'influenza che può avere su $r$, un piccolo cambiamento nella declinazione, per vedere se non sia il caso di sostituire ai calcoli prolissi, di cui ho dato un esempio, operazioni più brevi ed abbastanza precise.

Dalle [2] e [3] si ricava, pel calcolo della variazione $dr$, proveniente da un cambiamento $d\delta$, fatto nella declinazione lasciando invariati i tempi, la formola

$$[7]\ldots \qquad dr=-2r\,\mathrm{sen}\,1''\tan\delta\,.\,d\delta\ .$$

Cerchiamo il valore che ne risulta trascurando la parallasse. Abbiamo pel maggiore dei quattro raggi:

| | |
|---|---|
| $d\delta=\delta_1-\delta=-8'',2$ | $0,91274\,n$ |
| $\tan(\delta=-23^\circ 10' 38'',8)$ | $9,63154\,n$ |
| $\mathrm{sen}\,1''$ | $4,68557$ |
| $r$ (maggiore) | $3,45663$ |
| $-2$ | $0,30103\,n$ |
| $dr=-0'',097$ | $8,98751\,n$. |

L'errore non arriva adunque ad un decimo di secondo; in modo che, tenendo conto solamente dei decimi come faccio, è inutile applicare la parallasse. E si ha dal coefficiente $57'',7$ della rifrazione, trovato nello stato atmosferico attuale, che sostituendovi il medio $57''$, si commette un errore ancora più piccolo in $r$.

Dalla [7] risulta che gli errori costanti che si commettono trascurando la parallasse e facendo uso del coefficiente medio della rifrazione, saranno più piccoli per gli altri raggi, ed *a fortiori* per quelli dell'anello dell'altro oculare; perchè proporzionali al valore di questi raggi, tutti minori del raggio che ho considerato per applicare la formola [7]. Sta quindi il metodo che dissi, nel precedente articolo, di avere seguito pei raggi dell'oculare con un solo anello; ed è anche così che ho proceduto

al calcolo dei raggi dell'oculare micrometrico, di cui parlo adesso. Prima di dare i risultamenti ottenuti per questi raggi, ripeterò il calcolo colle osservazioni del 14 Dicembre, nella maniera molto più breve ed abbastanza precisa che ho detto:

| | |
|---|---|
| A mezzodì vero di Torino | $18^h\ 24^m\ 46^s,\ 82$ |
| Istante medio dell'osservazione | $17\ \ 5\ \ 36\ ,\ 2$ |
| Tempo siderale a trascorrere per arrivare a mezzodì | $1\ \ 19\ \ 10^s,\ 6$ |
| » solare » | $1\ \ 18\ \ 57\ ,\ 6$ |
| Angolo orario $t = -19^\circ\ 44\ 24''$ | |
| longitudine | $-30\ \ 48\ ,\ 4$ |
| Tempo solare a trascorrere prima del mezzodì di Gr. | $T_0 = 1^h\ 49^m,\ 46^s$ |
| Decl. ☉ a mezzodì vero di Gr. | $\delta = -23^\circ\ 13'\ 19'',\ 9$ |
| Variaz. id. nel tempo $T_0$ | $16\ ,\ 4$ |
| | $\delta = -23\ \ 13\ \ \ 3\ ,\ 5$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\tan N =$ | $\cot\varphi \cos t$ | $\log\cot\varphi$ | $9{,}99896$ |
| $d\delta =$ | $57''\cot(\delta + N)$ | $\log\cos t$ | $9{,}97370$ |
| $N =$ | $43^\circ\ 11'\ 52''$ | $\log\tan N$ | $9{,}97266$ |
| $\delta =$ | $-23\ \ 13\ \ \ 3\ ,\ 5$ | $\log 57'' =$ | $1{,}75587$ |
| $\delta + N =$ | $19\ \ 58\ \ 48\ ,\ 5$ | $\log\cot(\delta_1 + N) =$ | $0{,}43940$ |
| $d\delta =$ | $2'\ 36\ ,\ 8$ | $\log d\delta =$ | $2{,}19527$ |
| $\delta + d\delta = \delta' =$ | $-23^\circ\ 10'\ 26'',\ 7$ | | |

La differenza fra questo $\delta'$ approssimato e l'esatto, essendo di $6'',\ 1$, inferiore alla parallasse $8'',\ 2$, risulta dal calcolo fatto colla [7] che, procedendo innanzi nelle operazioni, si avranno esattamente i medesimi valori di $r$ già stati calcolati. Ed infatti il logaritmo del coseno del $\delta'$ approssimato è 9,96346, come pel $\delta'$ esatto con cui si sono calcolati i raggi.

Applicando a tutte le osservazioni, trascritte in principio di questo articolo, il calcolo che applicai in ultimo a quelle del 14 Dicembre risultano dalle formole [2] e [3]. pei raggi delle quattro periferie dell'oculare con due anelli micrometrici, i valori seguenti:

**Valori angolari dei raggi delle quattro periferie nell'oculare con due anelli**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 Dicembre | 47′ 41″, 7 | + 9″, 0 | 43′ 38″, 2 | — 12″, 0 | 26′ 54″, 8 | + 10″, 3 | 22′ 41″, 3 | + 0″, 7 |
| 15 » | 47 20 , 0 | — 12 , 7 | 43 32 , 5 | — 17 , 7 | 26 35 , 9 | — 8 , 6 | 22 36 , 3 | — 4′ , 3 |
| 18 » Oss. 1 | 47 20 , 5 | — 12 , 2 | 43 32 , 9 | — 17 , 3 | 26 46 , 9 | + 2 , 4 | 22 31 , 1 | — 9 , 5 |
| » » 2 | 47 33 , 8 | + 1 , 1 | 43 43 , 2 | — 7 , 0 | 26 54 , 8 | + 10 , 3 | 22 56 , 8 | + 16 , 2 |
| 19 » | 47 10 , 9 | — 21 , 8 | 43 31 , 6 | — 18 . 6 | 26 41 , 4 | — 3 , 1 | 22 38 , 4 | — 2 , 2 |
| 24 » Oss. 1 | 46 58 , 0 | — 34 , 7 | 44 25 , 5 | + 35 , 3 | 26 20 , 0 | — 24 , 5 | 23 7 , 1 | + 26 , 5 |
| » » 2 | 47 13 , 9 | — 18 , 8 | 44 14 , 1 | + 23 , 9 | 26 34 , 9 | — 9 , 6 | 22 59 , 6 | + 19 , 0 |
| 10 Genn. Oss. 1 | 47 16 , 0 | — 16 , 7 | 43 49 , 0 | — 1 , 2 | 26 48 . 4 | + 3 , 9 | 22 38 , 6 | — 2 , 0 |
| » » 2 | 48 3 , 0 | + 30 , 3 | 44 1 , 9 | + 11 , 7 | 26 21 , 1 | — 23 , 4 | 22 38 , 6 | — 2 , 0 |
| » » 3 | 47 35 , 9 | + 3 , 2 | 44 . 1 , 7 | + 11 , 5 | 26 48 , 0 | + 3 , 5 | 22 46 , 9 | + 6 , 3 |
| » » 4 | 47 36 , 3 | + 3 , 6 | 43 50 , 4 | + 0 , 2 | 26 35 , 4 | — 9 , 1 | 22 46 , 9 | + 6 , 3 |
| » » 5 | 47 36 , 3 | + 3 , 6 | 43 43 , 4 | — 6 , 8 | 26 57 , 6 | + 13 , 1 | 22 48 , 1 | + 7 , 5 |
| » » 6 | 48 3 , 0 | + 30 , 3 | 44 8 , 7 | + 18 , 5 | 26 52 , 4 | + 7 , 9 | 22 46 , 9 | + 6 , 3 |
| » » 7 | 47 42 , 9 | + 10 , 2 | 44 1 , 7 | + 11 , 5 | 26 48 , 1 | + 3 , 6 | 22 46 , 9 | + 6 , 3 |
| » » 8 | 48 3 , 0 | + 30 , 3 | 43 57 , 0 | + 6 , 8 | 26 50 , 3 | + 5 , 8 | 22 48 , 1 | + 7 , 5 |
| 20 » Oss. 1 | 47 14 , 3 | — 18 , 4 | 43 44 , 3 | — 5 , 9 | 26 49 , 3 | + 4 , 8 | 22 26 , 4 | — 16 , 2 |
| » » 2 | 47 38 , 0 | + 5 , 3 | 43 37 , 8 | — 12 , 4 | 26 49 , 2 | + 4 , 7 | 22 31 , 2 | — 9 , 4 |
| » » 3 | 47 31 , 3 | — 1 , 4 | 43 42 , 9 | — 7 , 3 | 26 44 , 5 | 0 , 0 | 22 18 , 7 | — 21 , 9 |
| » » 4 | 47 41 , 3 | + 8 , 6 | 43 45 , 8 | — 4 , 4 | 26 44 . 3 | — 0 , 2 | 22 24 , 7 | — 15 , 9 |
| » » 5 | 47 34 , 5 | + 1 , 8 | 43 41 , 3 | — 8 , 9 | 26 52 , 1 | + 7 , 6 | 22 20 , 1 | — 20 , 5 |
| Medio | 47 32 , 7 | | 43 50 , 2 | | 26 44 , 5 | | 22 40 , 6 | |
| Coll'errore probabile ..... | 2 , 7 | | 2 , 2 | | 1 , 5 | | 2 , 0 | |
| Id. osservazioni | 12 , 0 | | 9 , 9 | | 6 , 9 | | 9 , 1 | |

Nessuna delle osservazioni risultò affetta da un errore superiore a quello che mostrai poter derivare dallo sbaglio di un secondo nei tempi dei contatti; ma alcuni residui non si scostano molto da questo limite. La serie contiene tutte le osservazioni che ho fatte.

Sebbene in maggior numero che per l'anello semplice risulta pei raggi del doppio anello meno precisione che per quelli dell'altro. Ciò si può attribuire a più circostanze. Una è che i raggi del doppio anello sono maggiori di quelli dell'anello semplice, il che fa sì che si fanno le osservazioni dei contatti più verso il limite del campo del cannocchiale. Un'altra consiste in ciò che col doppio anello si osserva per tre periferie attraverso al vetro che porta gli anelli, e coll'anello semplice per una soltanto. Una terza circostanza, la quale ha un'influenza sulla precisione con cui si determinano i raggi, è l'ingrandimento dell'oculare, maggiore in quello con un anello, che nell'altro con due.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia, per l'annessione agli *Atti* in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni meteorologiche* del mese di Gennaio e Febbraio 1884, coi rispettivi riassunti e diagrammi, dell'Assistente Prof. Angelo CHARRIER.

**Anno XIX** **1884**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Gennaio.

Il valor medio delle altezze barometriche osservate in questo mese è di 43, 14; supera il valor medio degli ultimi diciotto anni di mm. 3, 49.

La tabella seguente contiene i massimi ed i minimi osservati:

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese. | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 1 . . . . . | 50,66 | 7 . . . . . | 36,07 |
| 10 . . . . . | 51,92 | 12 . . . . . | 35,09 |
| 14 . . . . . | 44,66 | 15 . . . . . | 38,62 |
| 19 . . . . . | 51,36 | 24 . . . . . | 30,59 |
| 26 . . . . . | 38,55 | 28 . . . . . | 28,58 |
| 30 . . . . . | 46,85 | | |

Le temperature osservate nel mese dànno per valor medio 3°, 1; superiore di 2°, 2 al valor medio degli ultimi diciotto anni.

Le temperature estreme furono — 3°, 1 nel giorno 15, e 10°, 0 nel giorno 16.

Non si ebbe pioggia, ma frequentemente nebbia nel mattino.

Il seguente quadro dà il numero delle volte che spirò il vento nelle singole direzioni:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 7 | 7 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 9 | 17 | 34 | 6 | 0 | 1 |

**Anno XIX** **1884**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Febbraio.

La pressione barometrica in questo mese ha per valor medio 41, 36; superiore di mm. 2, 31 del valor medio degli ultimi diciotto anni.

Nel seguente quadro sono contenuti i valori estremi osservati:

| Giorni del mese. | Minimi. | Giorni del mese. | Massimi. |
|---|---|---|---|
| 2 . . . . . | 39,44 | 4 . . . . . | 49,83 |
| 9 . . . . . | 39,71 | 13 . . . . . | 47,04 |
| 15 . . . . . | 37,82 | 18 . . . . . | 46,47 |
| 25 . . . . . | 31,81 | | |

I valori estremi della temperatura — 1°, 5 e 14°, 0, si ebbero nei giorni 18 e 26; il valor medio delle temperature osservato fu di 5°, 5, superiore di 1°, 1 del medio degli ultimi diciotto anni.

Si ebbero tre giorni con poca pioggia, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 5, 8.

Il quadro seguente indica la frequenza dei venti:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 24 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 12 | 6 | 4 | 1 | 0 | 1 |

Gli altri lavori sopra accennati vedranno la luce nel solito fascicolo annuale pubblicato per cura dell'Accademia, che va unito agli *Atti*.

Il Socio Comm. Prof. Michele LESSONA presenta un lavoro manoscritto del Dott. L. CAMERANO intitolato: « *Ricerche intorno alla distribuzione dei colori nel regno animale* ». Secondo il desiderio dell'autore, dovendosi questo lavoro pubblicare nei volumi delle *Memorie*, viene consegnato ad una Commissione Accademica incaricata di esaminarlo e riferirne in una prossima adunanza.

In quest'adunanza il signor Presidente annunzia che il signor H. Rassam, per dimostrare la sua riconoscenza all'Accademia che gli aggiudicò il premio Bressa, le mandò in dono parecchi oggetti da lui trovati negli Scavi di Ninive e di Babilonia. Tali sono un bassorilievo del palazzo di Sennacherib in Ninive, un mattone del palazzo di Sennacherib re di Assiria, un altro mattone del palazzo di Nabucodonosor, re di Babilonia; e un pezzo di cedro del palazzo di cedro di Nabucodonosor trovato a Bu Nemrod, o tempio di Belus, la supposta città della Torre di Babele. Questi oggetti che stavano esposti in fondo al banco dell'adunanza, saranno conservati nel Museo d'Antichità della R. Università di Torino.

---

*Gli Accademici Segretari* { Ascanio Sobrero
Gaspare Gorresio.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

Marzo

1884.

# CLASSE

## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza del 23 Marzo 1884.**

PRESIDENZA

DEL SOCIO ANZIANO SIG. COMM. PROF. ANGELO GENOCCHI

Il Socio Comm. Giacinto Berruti presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. G. Piolti, Assistente al Museo mineralogico della R. Università di Torino:

# IL PORFIDO

DEL

## VALLONE DI ROBURENT.

Il Dottore Alessandro Portis nel suo lavoro sui terreni stratificati di Argentera (1) accennava come nel vallone di Roburent, fra strati di quarzite e calcari brecciati, s'incontri *una roccia porfirica. . . . . che ben merita d'essere studiata a parte.*

Ho creduto utile di seguire il consiglio del mio amico Dottore Portis, applicandomi ad uno studio puramente petrografico, perchè le conclusioni che se ne possono dedurre offrono al geologo un qualche aiuto nelle determinazioni cronologiche e non potendo fondarsi sopra alcun concetto preventivo, che talora può fuorviare lo studioso nella ricerca del vero, hanno per tal ragione un notevole valore scientifico.

(1) *Sui terreni stratificati di Argentera (valle della Stura di Cuneo)* — Memoria paleontologico-geologica del Dott. Alessandro Portis, p. 74. Estratto dalle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tom. XXXIV.

La roccia ha una densità media di 2,663 ricavata da tre differenti campioni: tale quota coincide colla densità media di 2,6 data dallo Zirkel (1) pei porfidi quarziferi.

Nell'insieme il colore è violaceo tendente al rossastro, interrotto da chiazzette bianche di quarzo e da altre leggermente rosee di feldspato, nelle superficie non di fresca rottura. In varie direzioni osservansi venuzze di quarzo bianco che assume talora un aspetto affatto macrocristallino, potendosi perfino notare (benchè raramente) le faccie del prisma esagono, nonchè quelle delle piramidi esagonali terminali. Questo quarzo, impregnato spesso di minutissimi cristalli d'ematite, è di seconda formazione per rispetto alla consolidazione dei rimanenti elementi della roccia: la sostanza silicea infiltrossi posteriormente alla formazione della roccia stessa, adattandosi e cristallizzandosi nelle screpolature fattesi. Ciò d'altronde è provato dal rompersi i vari esemplari in frammenti prismatici, rottura dovuta a soluzioni di continuità, alle fenditure riempite dal quarzo.

La struttura è affatto porfirica: nella massa fondamentale vedonsi disseminati cristalli di feldspato (spesso alteratissimo, caolinizzato, tale che non sempre sono visibili i piani di sfaldatura) del diametro massimo di 4 millimetri, splendenti nei piani di rottura freschi, ora amandorliformi, ora con contorni quadratici, ora a mo' d'esagoni allungati o di losanghe, riferibili all'*ortosio*, poichè anche coll'aiuto d'una lente non è possibile riconoscere la presenza dell'oligoclasio, le cui caratteristiche strie di geminazione lo fanno distinguere abbastanza con facilità in molti graniti.

Pure porfiricamente sparsi trovansi frammenti di *quarzo* arrotondati, più spesso incolori, raramente affumicati.

Qua e là notansi macchie d'un color verde-oliva, determinate da una sostanza che, pel suo aspetto come di cera, per la sua poca durezza (talchè si lascia facilmente intaccare con una lama di coltello), per il colore bianco della sua polvere, pel suo fondere sui margini in uno smalto di color verdastro, per l'essere difficilissimamente attaccabile dall'acido cloridrico, io riferisco a *pinite* alterata, quasi completamente decomposta. Tale minerale però quantunque abbondante, non puossi tuttavia considerare come elemento essenziale della roccia, bensì deve essere riguardato come accessorio e lo stesso dicasi dell'*ematite* presen-

(1) Zirkel, *Lehrbuch der Petrographie.* Erster Band, p. 554.

tantesi sotto forma di pagliuzze, ora disseminate, ora radunate nelle venule di quarzo su mentovate.

Dal complesso dei caratteri suddetti, cioè dal solo esame macroscopico, parmi di potere con una certa probabilità stabilire l'ipotesi che la nostra roccia sia un porfido petrosiliceo o quarzifero, i cui elementi principali sparsi nel magma fondamentale sono il quarzo e l'ortosio ed i cui elementi accessori sono la pinite e l'ematite.

Prima di procedere all'osservazione delle preparazioni microscopiche destinate a fornirmi dati più sicuri intorno alla natura della roccia, ho creduto utile di rompere la medesima (non triturarla) in minutissimi frammenti e far passare la polvere ottenuta attraverso ad un setaccio di tela metallica i cui quadretti hanno un diametro di $^2/_{10}$ di millimetro.

Il prodotto raccolto osservato al microscopio lascia scorgere frammenti di piramidi esagone di quarzo, frammenti d'ortosio con piani di sfaldatura ben evidenti, granuli violacei del magma della roccia, granuli d'una sostanza verde-chiara (pinite), lamelle d'ematite talora iridescente per un'alterazione superficiale avvenuta, lamelle di *mica* nera alterata fortemente policroiche e finalmente qualche piccolo cristallo di *pirite* parzialmente decomposta, talora addirittura nera, radunata, anzi racchiusa in piccole druse: mi fu anche possibile di verificare la presenza delle faccie del pentagono dodecaedro, ora solo, ora combinato con quelle dell'ottaedro.

Dall'esame, colla luce polarizzata, di otto preparati microscopici, risulta che il magma è in parte amorfo ed in parte costituito da frammenti minutissimi di quarzo e d'ortosio: è attraversato in varie direzioni da vene che chiarisconsi come rotture riempite anch'esse dei due minerali detti o dell'uno o dell'altro soli. È riconoscibile talora la fluidalità, meglio accusata da vere striscie di un color giallo-rossastro, dovuto alla presenza di limonite proveniente dalla decomposizione dell'ematite.

Il *quarzo* presentasi sotto due aspetti ben distinti e non difficilmente riconoscibili l'uno dall'altro, cioè di prima e di seconda consolidazione.

Il quarzo bipiramidato di prima formazione mostrasi in grandi frammenti, a contorni corrosi, spesso compenetrati dal magma ambiente, con frequenti linee di rottura: non ho trovato alcun cristallo intiero.

Poco frequenti sono le inclusioni vetrose e quando si trovano sono incolore: questa rarità d'inclusioni è caratteristica pel quarzo dei porfidi quarziferi, come è indicato dal Rosenbusch (1), il quale precisamente osserva che il minerale suddetto nei porfidi si presenta con molto maggiore povertà d'inclusioni che non nei graniti. Alcune hanno un perimetro rombico, altre elissoideo, altre quadrato ed infine talune si riconoscono per diesaedri: talora sono munite di bolla e questa è sempre fissa, non cambiando posizione assoggettandola a diversi movimenti mediante il microscopio di Hirschwalde non scomparendo anche col portare la temperatura a + 120°. Anche questo carattere della fissità della bolla è nella maggior parte dei casi speciali alle inclusioni del quarzo dei porfidi quarziferi, sempre secondo il Rosenbusch (2).

Fra i quarzi di seconda formazione è da annoverarsi il quarzo granoso (3) che fra i prismi incrociati presenta i vari colori d'un aggregato cristallino granulare; trattasi cioè di vari piccoli frammenti cristallini uniti insieme ed orientati in diverse maniere; tali frammenti presentano rarissimamente linee di rottura. Questa specie di quarzo riempie le fessure che si trovano nella roccia ed anche per ciò è riferibile ad una seconda formazione.

Raramente s'incontrano piccole aree circolari, inquinate da sostanza ferruginosa, che danno luogo fra i prismi incrociati a croci nere i cui bracci vanno aumentando in grossezza dal centro dell'area alla periferia e riferibili quindi a sferoliti di calcedonia: tale specie di quarzo calcedonioso assume quindi un aspetto ondeggiante; non è in larghe plaghe, ma mostrasi piuttosto come una sostanza infiltratasi fra i vari elementi della roccia. Eziandio questa varietà è da riferirsi ad una seconda formazione.

L'*ortosio* spesso è alterato, spessissimo deformato, talchè alcune sezioni sono addirittura circolari, in minor numero presentansi le rettangolari appartenenti a cristalli semplici, rarissime sono quelle in cui scorgansi contorni cristallini ben netti, come vedesi nella tavola: frequenti sono i geminati secondo la legge

---

(1) H. Rosenbusch, *Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine*, Band II, p. 53.

(2) H. Rosenbusch, *Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine*, Band II, p. 53.

(3) Fouqué et Michel Lévy, *Minéralogie micrographique - Roches éruptives françaises*, p. 196.

di Carlsbad. In causa della decomposizione avvenuta, non sempre la linea di geminazione è riconoscibile; però è facile incontrare cristalli che si manifestano come geminati in causa del presentare aree con aspetto diverso nel medesimo individuo cristallino, plaghe che alla luce polarizzata si comportano precisamente come le due parti di un geminato, mentre tutto il resto è quasi caolinizzato.

La decomposizione è avvenuta tanto dall'esterno verso l'interno quanto viceversa (vedi tavola) e nel primo caso si possono seguire coll'occhio piccole fenditure che, come era prevedibile, pare seguano le linee di sfaldatura e si anastomizzino con esse.

Sono comuni infiltrazioni di quarzo nell'ortosio e scorgesi la traccia dell'entrata della sostanza silicea; meno frequenti sono le infiltrazioni dell'ortosio nel quarzo. Comunissime poi sono le infiltrazioni del magma cristallino nell'ortosio, formandovi specie di saccoccie, strette al punto d'entrata, allargantisi nell'interno: talvolta pare che il magma inoltratosi sia come incluso, non scorgendosi traccia di esso sui margini del cristallo. In qualche raro grosso cristallo il piano di geminazione è diventato una fenditura ripiena del magma cristallizzato che attraversa l'individuo cristallino da una estremità all'altra.

Rarissimamente osservasi qualche cristallo semplice d'ortosio, rotto, ma col suo frammento a poca distanza, per cui si può mentalmente ricostrurre l'intiero cristallo, ciò che accenna a movimenti avvenuti nella massa della roccia.

Non ho trovato traccia di feldspati triclini e questo fatto è molto caratteristico per la determinazione della roccia, come vedremo meglio in seguito.

Il quarzo e l'ortosio sono dunque gli elementi essenziali della roccia: passiamo ora all'esame degli elementi accessori, che considererò per ordine di frequenza.

La *pinite* presentasi in larghe plaghe verdiccie o giallastre e si comporta alla luce polarizzata come una sostanza anisotropa; manca di quel certo aspetto fibroso comune alle piniti, fatto che attribuisco all'essere il detto minerale affatto alterato, talchè all'esame macroscopico appare come una specie di steatite. La pinite può derivare dalla decomposizione della cordierite, in parte anche del feldspato stesso e ciò che avvalorerebbe quest'opinione è l'incontrare sezioni rammentanti quelle di cristalli d'ortosio e che includono geminati d'ortosio molto evidenti.

L'*ematite* è in lamelle esagonali talvolta intiere, più spesso rotte; anche questo minerale ha subíto una decomposizione parziale, presentandosi per lo più d'un color nerastro, raramente un po' trasparente. Sono pure riferibili all'ematite macchie d'un color rosso-cocciniglia sparse qua e là nella roccia.

La *mica* nera (biotite) mostrasi in piccole plaghe fibrose di color bruno oscuro: è spesso molto alterata.

La *pirite*, rara, presentasi in sezioni cubiche di color nerastro ed è quasi affatto trasformata in limonite.

Se l'esame macroscopico m'aveva fatto supporre che la roccia da me esaminata fosse un porfido quarzifero o petrosiliceo, ora l'esame microscopico, come vedesi, annulla qualsiasi dubbio che ancora si possa avere al riguardo; per cui, non tenendo conto degli elementi accessori più rari, devesi ammettere che la roccia porfirica indicata dal Dottore Portis non è altro che un porfido quarzifero, i cui componenti essenziali sono il quarzo e l'ortosio ed i cui componenti accessori sono la pinite e l'ematite.

Ma v' ha di più: i signori Fouqué e Michel Lévy accennano (1) che nelle serie *permiane* l'oligoclasio si fa molto raro ed il Rosenbusch (2) nella classificazione dei porfidi considera come *permiani* quelli in cui i più antichi componenti frammentari sono il quarzo, l'ortosio (più raramente l'oligoclasio), poscia la cordierite e la pinite. Ora il fatto del mancare i feldspati triclini nei porfidi, come accade nella roccia da me esaminata, non è eccezionale, dal momento che il Rosenbusch stesso accenna come non si trovi il plagioclasio in molti porfidi quarziferi (3) ed anche il Zirkel (4) ne cita alcuni privi di oligoclasio. Per me tale mancanza ha un valore geologico, indicandomi (unitamente agli altri caratteri) che il porfido del vallone di Roburent è *permiano*. Difatti, l'essere raro l'oligoclasio nelle serie *permiane* non prova che tal minerale non possa mancare addirittura, come anche il fatto di non averne incontrato in otto distinte preparazioni microscopiche non prova, che non se ne possa trovare forse qualche traccia nell'intiera formazione porfirica; poichè evidentemente

(1) Fouqué et Michel Lévy, Op. cit., p. 161.
(2) Rosenbusch, Op. cit., p. 96.
(3) Id. Op. cit., p. 56.
(4) Zirkel, Op. cit., p. 537.

l'osservazione dei signori Fouqué e Michel Lévy non si riferisce a preparati microscopici, ma bensì all' intiero complesso delle serie *permiane*. Inoltre, se è vero che nel porfido del vallone di Roburent manca la cordierite, conviene però notare che quello è profondamente alterato, per cui la pinite può benissimo rappresentare la cordierite decomposta Quindi, siccome i caratteri litologici della roccia in questione concordano, come s'è visto, con quelli dei porfidi permiani, parmi di essere in diritto di conchiudere che il porfido quarzifero del vallone di Roburent è *permiano*.

Terminando, ringrazio il Professore Giorgio Spezia che mi fornì importanti suggerimenti nel corso delle suesposte ricerche.

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Ingrandimento: 28 volte — Luce polarizzata: prismi paralleli.

*a*. . . . . Grosso cristallo d'ortosio con contorni in parte ben definiti.

*b*. . . . . Cristallo d'ortosio in cui la decomposizione ha cominciato dall'interno.

Fototip. F.lli Doyen Torino

Il Socio Cav. Prof. G. Basso presenta e legge il seguente lavoro del sig. Cav. G. Luvini, Prof. nella R. Accademia Militare di Torino,

SULLO

# STATO SFEROIDALE.

1. *Scopo della Nota.* — Io mi propongo di dimostrare sperimentalmente che la temperatura di ogni liquido allo stato sferoidale, sotto una pressione qualunque, è prossimamente eguale alla temperatura minima di ebollizione del liquido stesso sotto la pressione attuale, e di spiegare il meccanismo e la ragione per cui tale fatto avviene.

N.B. Io chiamo *temperatura minima di ebollizione* di un liquido quella, a cui il liquido bolle allorchè non ha luogo il fenomeno che dicono di *surriscaldamento*. La temperatura minima di ebollizione dell'acqua pura sotto la pressione di un'atmosfera è di 100°.

2. *Denominazione del fenomeno.* — Alcuni a questa condizione, che presentano i liquidi su metalli ed altri corpi abbastanza caldi danno la denominazione di *fenomeno di Leidenfrost*. Io preferisco quella di *stato sferoidale* per tre motivi: 1° perchè universalmente nota e più generalmente adoperata, 2° perchè se al fatto vogliasi attribuire il nome di chi primo ne trattò per iscritto, più veritieramente dovremmo dirlo di Outhier, di Musschembroek, di Boerhaave o di non so chi altri di più antica data; 3° in omaggio al venerando vegliardo Boutigny (1) (d'Évreux), che la propose e l'intiera vita passò, e ancora continua nello studio di questo fenomeno.

(1) Nato ad Harfleur il 17 maggio 1798. Rendo qui pubbliche grazie al signor Boutigny del bel dono che mi fece della 4ª ediz. de' suoi *Études sur les corps à l'état sphéroidal*, Parigi, 1883, i quali molto mi giovarono nel presente lavoro (*).

(*) Morì ad Évreux il 17 marzo corrente, del che ricevetti notizia durante la stampa del presente lavoro.

Io dirò pure sovente alcool *sferoidale*, acqua *sferoidale*, liquidi *sferoidali*, ecc. in vece di alcool, acqua, liquidi, ecc. *allo stato sferoidale*.

3. *Un po' di storia.* — Lo stato sferoidale è noto probabilmente da tutta l'antichità. Chi di noi da giovane, non si è divertito a lasciar cadere gocce di acqua o di saliva sui ferri caldi da lisciare i panni? Spallanzani volendo verificare le sperienze di Deslandes intorno allo stato sferoidale dell'acqua nelle bolle di vetro fuso, presentatosi alla fornace vetraria, parlò con uno dei fornaciai, e lo trovò informatissimo del fatto. « Vidi, dic'egli (*Viaggi alle due Sicilie e in alcune parti dell'Apennino*, Pavia, 1793, 3° vol., pag. 324), essere questo uno di quei molti fenomeni che dai fisici si pubblicano per nuovi, e che lo sono effettivamente pel mondo erudito, ma che da diversi del popolo sono conosciutissimi da molto tempo ».

Musschembroek, nell'edizione del 1739 delle sue *Institutiones physicae*, già parla dell'acqua gettata sui metalli ed altri corpi caldi, su alcuni dei quali, come sull'olio bollente o sul piombo fuso, produce esplosione, e nell'edizione del 1748 (pag. 390) aggiunge che l'esplosione non avviene quando le scorie dal non ancora ben fuso rame si tolgono (*quod tamen non fit quando scoriae ab immaturo cupro tolluntur*), e cita in proposito Outhier, *Voyage au nord*, pag. 285. La pubblicazione dell'abate Outhier è del 1746, e dev' essere uno dei migliori lavori del genere per quel tempo. Non mi fu dato di trovarla (1).

---

(1) Ecco ciò che dice Outhier nelle pag. 284 e 285 dell'Opera citata, che si pubblicò ad Amsterdam nel 1746. « On commença par mettre dans une espèce de grand creuset, formé dans la terre, un lit de charbon, et par dessus ce lit un tas de gros lingots ou saumons de cuivre, jusqu'à ce qu'il y en eut du poids de huit ou neuf mille livres, avec beaucoup de charbon par dessus. On y mit le feu, que l'on poussa par le vent de deux grands soufflets, que l'eau faisait jouer continuellement, jusqu'à ce que les lingots fussent entièrement fondus; les soufflets jouèrent encore longtemps après, on fournissait toujours de charbon, de temps en temps on découvrait le creuset, en tirant le charbon qui était dessus; et on écumait, pour ainsi dire, le cuivre fondu, en ôtant de dessus sa surface ce qui se trouvait d'impur. Enfin un peu avant dix heures on ôta entièrement tout le charbon, et les soufflets cessèrent d'agir. On jetta sur le cuivre fondu un peu d'eau, qui, *ne pouvant s'évaporer tout à coup, roulait en petites boules de côté et d'autre :* cette eau ayant refroidi la superficie du cuivre, il s'y forma une croûte qu'on enleva avec des crochets

Carradori (*Ann. di Chim.* di Brugnatelli, vol. X, pag. 145) dice esplicitamente che: « Musschembroek osservò che l'acqua gettata sopra un metallo o altro corpo candente evapora più adagio, che sopra il medesimo corpo dotato di un calore poco più grande di quello che ha l'acqua che bolle ».

Boerhaave ha pure osservato lo stato sferoidale e studiato i globuli di spirito di vino gettato sul ferro rosso di fuoco, come ne fa fede Bose d'Antic nel *Journal de Physique de Rozier* del 1778, citando il trattato del fuoco di Boerhaave (traduzione francese, parte 1ª, pag. 281), opera che non mi riuscì di trovare (1).

Leidenfrost parla di questo fenomeno nella pubblicazione che ha per titolo *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*, la cui prima edizione comparve a Duisbourg nel 1756, e fu susseguita da altre più tardi. Per quante ricerche io abbia fatto nelle nostre biblioteche e per mezzo dei giornali bibliografici, io non ho potuto trovare questo lavoro, che veggo da molti citato, ma quasi nessuno dice qual parte l'autore abbia avuto nel promuovere lo studio dello stato sferoidale (2). Chi ne dice qualche cosa è Carradori (luogo citato), il quale, dopo di aver parlato di Musschembroek, aggiunge: « Questo fenomeno che merita senza dubbio l'attenzione dei fisici, si può dire, che poco fino ai giorni nostri è stato considerato, ancorchè si voglia far menzione delle osservazioni del signor Leidenfrost, che sono simili a quelle di Musschembroek ».

---

et d'autres ferrements; on jetta une seconde fois de l'eau, et on leva une seconde croûte, et ainsi jusqu'à ce que le creuset fut vide; ce qui donna, si je ne me trompe, quarante croûtes ou plaques rondes de cuivre, dont les dernières furent toujours les plus pures et les plus belles ».

L'operazione descritta è stata fatta a Afsta a sette miglia da Falun (Fahlun) nel lunedì 8 luglio 1737. Tengo questa notizia dal signor Carlo Arbarello, Tenente nel Genio, il quale trovò l'Opera di Outhier nella Biblioteca dell'Università di Pavia, e gliene rendo pubbliche grazie (*).

(1) Nella Biblioteca Vaticana a Roma esistono di Boerhaave le *Opera Omnia* tra le quali però, non ostante tutte le ricerche, non si trovò il *De Igne tractatus*.

(2) Si è rilevato dai cataloghi che questo libro esiste nella Biblioteca Vaticana; esso però appartiene alla Collezione Feliciani, ultimamente acquistata, della quale si stanno facendo le classificazioni, lavoro pel quale si richiede un anno.

(*) Il libraio Loescher riuscì a trovare in Germania una copia dell'Opera di Outhier, la quale fu comperata dal gentilissimo signor Colonnello Zanotti-Bianco per la biblioteca del Duca di Genova. È un bel volume, edizione di Parigi 1744; arrivò a Torino quando le cose precedenti erano già stampate. Il brano citato trovasi a pag. 184-185. Quella di Amsterdam è una contraffazione.

Ma Carradori probabilmente non ha letto, od ha dimenticato la pag. 580 del 2° volume della *Introductio ad Philosophiam Naturalem* di Musschembroek (Lugduni Batavorum, 1762, pubblicata dopo la morte dell'autore). Musschembroek, dopo di aver riferito le sperienze di Eller (*Histoire de l'Acad. de Berlin*, 1746, pag. 42) intorno alla durata dell'evaporazione totale di una goccia d'acqua su di un vetro piano e pulito a diverse temperature, cominciando dall'ordinaria fino a quella dell'acqua bollente, cita le sperienze della pagina 30 del libro del chiaro *(clarus)* Leidenfrost, il quale *pulchris experimentis phoenomena guttarum aquearum*, *quae vehementiori igni exponuntur*, *promovit*, e conta come Leidenfrost in un cucchiaio di ferro incandescente per fuoco, ed allontanato dal focolare, versava una goccia d'acqua distillata, la quale da prima si divideva in piccoli globuli, che tosto si riunivano in un solo. Questo globo non tocca il ferro, sta quieto senz'alcun moto visibile od ebollizione, trasparentissimo e vertiginosamente agitato intorno. Il ferro candente intorno alla goccia diventa nerissimo. Passano 34 o 35″ prima che la goccia intieramente svanisca, e lascia una piccola particella di terra. Una seconda goccia messa al posto della prima, svanisce in 9 a 10″; la terza è fortemente agitata e scompare in 3″ senza lasciar terra; la quarta aderisce al cucchiaio, lo bagna, bolle e svanisce in un secondo o meno, nè lascia terra. L'acqua versata sull'ottone riscaldato offre somiglianti fenomeni.

Questo è quanto ho potuto apprendere degli studi di Leidenfrost sullo stato sferoidale. Egli, giusta l'espressione di Musschembroek, fece avanzare *(promovit)* la dottrina relativa, ma il fenomeno principale era già prima noto (1).

Belli (*Corso elementare di Fisica sperimentale*, vol. 2°, pagina 490, Milano, 1831) cita Eller come il primo che si sarebbe occupato dello stato sferoidale, ma nel giornale dell'*Istituto Lombardo* del 1844 si corregge e dice che va annullata la citazione del Corso di Fisica. Probabilmente egli era stato indotto in errore o dalla citazione di Musschembroek, che pre-

---

(1) Plateau, nella Nota postuma intitolata *Quelques expériences sur les lames liquides minces*, presentata dal signor Van der Monnsbrugghe all'Accademia di Bruxelles (*Bulletin de l'Acad.*, 3me série, t. VI, n° 12, 1883, et *extrait*, p. 5) cita l'Opera di Leidenfrost, che nel § 78 tratta di particolari fenomeni delle bolle d'acqua di sapone, e la chiama *un curieux Mémoire.* Sono ben riconoscente alla signora Vedova Plateau pel prezioso dono di questo e di altri estratti di lavori postumi dell'illustre e compianto suo Marito.

cede quella di Leidenfrost, o da ciò che nell'*Histoire de l'Acad. de Berlin*, 1746, pag. 42, come nel libro di Musschembroek, le temperature osservate da Eller sono espresse in gradi inglesi, da pochi gradi fino a 212. Con una lettura superficiale, e senza badare che la grandezza di questi numeri dipende dalla divisione del termometro, è facile sbagliarsi. Noto particolarmente questa cosa, perchè l'errore è stato ripetuto da Boutigny (Opera citata, pag. 1), da Daguin (*Traité élémentaire de Physique*, 4$^{me}$ *édition*, Paris, 1878, 2° vol. pag. 374) e da altri, e potrebbe aver seguito.

Deslandes, direttore della Manifatura reale di Saint-Gobain, nel *Journal de Physique de Rozier* del 1778 (primo semestre) pubblica, come novità, quanto apprese dai fornaciai posti sotto la sua direzione intorno allo stato sferoidale dell'acqua sul vetro fuso, e dentro masse di vetro mentre si stanno soffiando. Presa una massa di vetro fuso in punta della canna, e gonfiatavi una bolla della grossezza di un uovo d'oca, l'operaio colla bocca vi spinge dentro dell'acqua e chiude col pollice la canna. L'acqua vi si riduce subito allo stato sferoidale, si evapora lentamente e per la forza elastica del vapore la bolla si dilata e si forma un globo che talvolta raggiunge i tre piedi di diametro.

L'abate Lazzaro Spallanzani (*Viaggio alle due Sicilie*, luogo citato) descrive molte sperienze sue proprie sullo stato sferoidale. Oltre all'effetto dei metalli fusi o roventi, egli studiò quello dei vetri fusi, e più specialmente dei prodotti vulcanici, donde con mirabile perspicacia dedusse delle conseguenze molto fondate intorno alle cause delle eruzioni vulcaniche. Tra le altre cose egli notò che il più delle volte l'acqua gettata sul piombo e sullo stagno fuso esplodeva, la qual cosa non avveniva sugli altri metalli sperimentati. Carradori (luogo sopra citato) dimostrò che questa differenza cessa di manifestarsi quando la superficie dello stagno e del piombo fusi sia pulita da encausti, com'egli dice, o pellicole di materie estranee, osservazione e sperienza già fatta fin dal 1737 e pubblicata nel 1744 da Outhier e nel 1748 da Musschembroek.

Stabilito in tal modo l'ordine ed il merito dei primi osservatori di questo fenomeno, non mi soffermerò a descrivere le sperienze o le teorie più o meno ragionevoli di Bosc d'Antic, Dietrich, Lichtemberg, Bellani, Orioli, Belli e qualche dozzina di altri autori, venendo giù fino a Boutigny, che grandemente promosse lo studio di questi fenomeni, ed eccitò altri ad imitarlo.

Prima però di chiudere questo cenno storico, debbo citare una sperienza molto importante e pel mio scopo preziosissima, la quale non è ricordata in nessun trattato di Fisica a me noto, ed una congettura di gran peso pubblicata fin dal 1841, la quale avrebbe dovuto condurre a nuove sperienze, ed alla quale, che io mi sappia, nessuno badò punto nè poco. La prima è di Despretz, di Avogadro la seconda. Le riferisco entrambe colle proprie parole degli autori, e ne farò conoscere la portata dopo l'esposizione delle mie esperienze.

Despretz, dopo aver detto come il protossido d'azoto liquido passa allo stato sferoidale anche nel vuoto e si volatilizza lentamente, aggiunge: « Dans la même leçon ayant versé du protoxide (d'azote) dans une capsule d'argent, posée sur une brique chaude, et placé le tout sous le récipient de la machine pneumatique, on a vu, dès les premiers coups de piston, le liquide se couvrir d'une couche blanche et bientôt se transformer en une masse légère, semblable à des flocons de neige. L'élasticité était réduite, sous le récipient, à deux centimètres environ » (Despretz, *Comptes Rendus* 1849, 1° semestre, e *L'Institut*, 1849, pag. 67).

Avogadro poi (*Fisica dei corpi ponderabili*, IV vol., pagina 367) dice: « Quindi pare doversi supporre che, se il vaso fosse chiuso, la pressione esercitata dal vapore (del liquido allo stato sferoidale) già formato accrescendosi, e richiedendosi conseguentemente per la vaporizzazione dell'acqua una temperatura più elevata, l'acqua così rinchiusa giungerebbe pure alla temperatura corrispondente dopo un tempo sufficiente per lo stabilimento dell'equilibrio a tale riguardo ».

4. *Una prima esperienza.* — La lettura delle sperienze di Deslandes destò in me una grande curiosità di vedere l'effetto di una goccia d'acqua in una bolla di vetro fuso. Pregai il signor Duroni di soffiarmi una bolla e di farvi penetrare una goccia d'acqua. Egli, molto più istrutto di me di questa cosa, mi disse subito: che per ottenere l'effetto, che io desiderava di osservare, conviene soffiare il vetro con canne di ferro e ricorrere perciò alle fornaci, non bastando il semplice cannello ferruminatorio; che nelle fabbriche di vetro si usa gonfiare i grandi cilindri, che si distendono poi in lastre, facendovi entrare dello spirito di vino, che passa allo stato sferoidale; che introducendo una goccia di acqua in una bolla che si soffia in un tubo di vetro,

il tubo si rompe vicino alla bolla, il che avviene a tutti i soffiatori, quando lasciano sfuggire un po' di saliva. Ciò nondimeno io lo pregai di provare, e soffiata una bolla di tre o quattro centimetri di diametro, intanto che essa era ancora caldissima, egli vi spinse dentro con forza un po' di saliva, la quale stentò a penetrarvi, ma entratavi si ridusse subito in un bel globo chiaro e ben visibile, del diametro di un centimetro circa, e la bolla, senza più soffiarvi dentro, si gonfiò e divenne della grossezza di otto a dieci centimetri in un minuto secondo all'incirca, poi, per essersi raffreddato il vetro, successe uno scoppio e la bolla saltò intorno in minuzzoli. Esaminato il tubo di vetro, si trovò tutto screpolato nella parte vicina alla bolla. Allora io non aveva ancora letto Spallanzani, e fui meravigliato quando dal suo racconto appresi che anch'egli trovò i vetrai bene informati del fenomeno.

5. *Materiale per le sperienze.* — Per abilitarmi a questo genere di ricerche cominciai a fare un grandissimo numero di sperienze nell'aria libera. I vasi da me adoperati consistono in un crogiuolo di platino di forma ovale della capacità di $37^{cc.}$ e del peso di 31 gr., con relativo coperchio, una capsula emisferica pure di platino della capacità di $71^{cc.}$ e del peso di 45 gr., una capsula di rame battuto di forma sensibilmente emisferica di $46^{mm}$ di diametro interno con due di spessezza, e tre altre capsule di rame, di bronzo e di ottone, formate di getto e tornite, inferiormente in forma di emisfero del diametro interno di $14^{mm}$, e superiormente in forma di tronco di cono divergente di $30^{mm}$ di altezza e di 35 di diametro interno nella base superiore, con una spessezza media di $3^{mm.}$. Tutte erano accuratamente pulite, e le faceva ripulire ad ogni sperienza.

Pel riscaldamento dei vasi adoperai indifferentemente lampade ad alcool e lampade di Bunsen a gas.

I soli liquidi, sui quali sperimentai, sono l'acqua distillata, l'acqua potabile, l'acqua di sapone, l'etere solforico e l'alcool.

Ho ripetuto le principali sperienze conosciute, ma non dirò che delle poche, nelle quali mi parve di vedere qualche cosa di nuovo per me, o che serve alla teoria, che esporrò dopo le sperienze.

6. *Bolle soffiate sui liquidi sferoidali.* — Sospettano alcuni che la mancanza d'ebollizione dei liquidi allo stato sferoidale nasca da ciò che, in un vaso incandescente, essi debbono venir prontamente privati dell'aria che tengono in soluzione,

ed un liquido privo d'aria non bolle. Io ho fatto la prova di soffiare dell'aria a traverso le gocce liquide in quello stato con tubi di vetro diritti ed uncinati, di vario diametro, in modo che io poteva dirigere il soffio con varia forza e con varia quantità d'aria in tutte le direzioni ed in tutte le parti della goccia. Il movimento che ne nasceva in questa non aveva niente di comune con quello dovuto all'ebollizione. Era puramente meccanico e dipendente dalla direzione e dalla forza del soffio. Ma talvolta, allorquando io soffiava contro il fondo del vaso sotto la goccia, questa mandava un sibilo e friggeva, il che io attribuiva al raffreddamento del vaso.

In queste sperienze avviene un fenomeno, che pare straordinario nelle circostanze in cui si manifesta. Sui liquidi allo stato sferoidale si formano delle bolle, come quelle di acqua di sapone, dotate di una stabilità grandissima, e la cui grandezza supera spesso, anche di molto, quella della massa liquida sottostante. Talvolta invece di una sola bolla, se ne formano varie, piccole, in forma di schiuma, le quali finiscono quasi sempre per riunirsi in una. Queste bolle si ottengono coll'acqua pura, coll'acqua di sapone, coll'alcool, coll'etere, e probabilmente con tutti i liquidi. Esposte ai dardi di una violenta irradiazione calorifica nel crogiuolo ardente, stanno impassibili e per lo più immobili, senza partecipare ai movimenti periferici della goccia sottostante, come si riconosce dalla luce delle finestre riflessa sulle medesime; talvolta sono anch'esse agitate, e girano intorno alla verticale che passa pel loro centro, come apparisce dal moto di qualche bollicina, appena visibile intorno ad esse. Alcune scompariscono appena formate, altre durano quasi fino all'intera consumazione della goccia liquida. Nelle capsule di getto, sopra descritte, ne ottenni alcune il cui volume era per lo meno tre o quattro volte quello della massa liquida. La loro base era ristretta, e nella parte del loro massimo rigonfiamento laterale rasentavano la parete del vaso, ma non la toccavano; in altri termini, la loro mole, di forma sferica, era maggiore dell'emisfero. Esse si formano e si conservano in vasi chiusi, come in vasi aperti, ed anche su dischi metallici piani.

Nei primi giorni delle mie sperienze su queste bolle (era il mese di novembre) mi si presentò otto o dieci volte un fenomeno, che non mi fu mai più dato di ottenere in seguito. La bolla non appariva durante il soffio, ma dopo che era già estratto

dal liquido il cannello; veniva a galla, e se ne stava per qualche tempo nel mezzo della goccia. Il suo diametro era la metà circa del diametro di questa; ma non presi misure. L'insieme della goccia e della bolla non dava all'occhio l'aspetto di maggior volume di quello della goccia sola. Ho provato molte volte con tubi di vetro, o con asticciuole di altre sostanze, di romperla, ma non mi fu mai possibile.

Ho detto che la bolla stava per qualche tempo nel mezzo della goccia, ma talvolta scompariva ad intervalli, e pareva che si affondasse sotto la goccia stessa rendendosi invisibile, poi ricompariva ora totalmente ora parzialmente in varie parti della goccia, nella quale si aggirava tortuosamente senza mai disfarsi; poi ritornava nel mezzo e nella posizione di prima, che era la sola in cui essa rimaneva come in equilibrio. Osservai questo fenomeno su di una capsula di ottone sottile e quasi piana, e sulla capsula di rame battuto, sopra descritta, prima ch' essa fosse tornita, adoperando acqua potabile. Dirò di più, che per quanto attentamente io abbia osservato il fenomeno, non ho potuto scoprire se esso nascesse proprio da una bolla con aria interna, come quelle di sapone, il che parmi più verosimile, ancorchè difficile a spiegarsi in quel rimescolio e colle agitazioni che artificialmente io produceva senza mai poterla distrurre. Il suo aspetto pareva anche quello di un globulo liquido, separatosi dalla restante massa e nuotante in essa, senza che l'insieme delle due parti perdesse la forma e la grandezza apparente che aveva la goccia prima che la bolla si fosse formata. Ad ogni modo questo fatto parmi degno dell'attenzione dei fisici, e forse vi tornerò sopra in miglior tempo.

Tutti sanno che dando fuoco all'alcool od all'etere allo stato sferoidale, si produce la fiamma secondo cui questi liquidi sogliono bruciare, ed intanto i medesimi conservano nel vaso lo stato sferoidale e si evaporano lentamente come se non abbruciassero. Ma quello che forse non tutti sanno, e che pare straordinario, è che sui liquidi stessi, mentre bruciano allo stato sferoidale, in mezzo alla fiamma, si possono soffiare delle bolle, che resistono al fuoco. La durata di queste è una frazione di secondo, ed anche un secondo e più, dipendentemente dalla loro mole. Esse più facilmente si formano, e durano di più se all'alcool od all'etere si aggiunge un po' di acqua di sapone. Ne ottenni alcune quattro o cinque volte più grandi che la goccia liquida sottostante.

In tutti i casi la grandezza delle bolle è in apparenza costante, ma esse presentano anche talvolta dei rigonfiamenti abbastanza sensibili e dei restringimenti, che potrebbero nascere da cambiamenti di temperatura dell'aria interna, o da variazioni nella pressione esterna.

Tutte queste cose paionmi provare che i liquidi allo stato sferoidale non perdono, o perdono ben poco l'aria che tengono in soluzione.

7. *Tentativo di studio dei movimenti interni delle gocce e delle bolle.* — Nel 1881, quando Plateau pubblicò la sua Nota *Sull' assottigliamento spontaneo delle lamine liquide* (*Mondes*, III vol. del 1881, p. 61) deducendo la spiegazione di questo fatto dal ritiro lento della polvere di licopodio dalle parti centrali verso la periferia di una lamina circolare orizzontale, io pensai di studiare il medesimo fenomeno proiettando l'immagine, o per meglio dire, l'ombra delle lamine liquide, curve o piane, col mezzo di un fascio di luce solare divergente che le attraversava, a quel modo stesso che il Prof. Govi aveva reso visibile e studiato in una camera oscura il movimento vibratorio dei getti gassosi della natura di quello delle fiamme cantanti (*Atti dell'Accad. delle scienze di Torino*, vol. V, p. 475). Se si trattava delle bolle, io le faceva attraversare dal cono luminoso ad asse orizzontale, e ne proiettava l'ombra sopra un foglio di carta verticale, e per le lamine orizzontali, dirigeva con un prisma a riflessione totale l'asse del cono luminoso verticalmente all'insù, proiettandone l'ombra sopra un foglio superiore orizzontale. In questo modo ogni movimento delle polveri, di cui cospergeva le lamine, e delle minime goccioline liquide alla periferia delle lamine orizzontali e nella parte inferiore delle bolle diveniva mirabilmente chiaro e visibile. Io aveva già preparato i materiali di una Nota relativa, alla quale poi non diedi seguito. Ora io pensai che questo medesimo modo di studio con piccola modificazione, potesse applicarsi alle bolle ed alle gocce allo stato sferoidale.

Per questo fine mi feci preparare tre dischi di ottone, del diametro di $60^{mm.}$ e della spessezza di 2·5, con una leggerissima concavità nel mezzo, e nel centro della concavità due dei tre dischi sono attraversati da un forellino di diametro differente l'un dall'altro. Il liquido allo stato sferoidale non esce dal forellino, e facendo passare per questo di basso in alto un

fascio di raggi solari paralleli, condensati colle lenti del microscopio solare, la goccia liquida li rifrange, li concentra nel suo foco, e li manda al di là divergenti, ed essi portano l'ombra, o l'immagine della goccia su di un foglio di carta orizzontale posto superiormente.

Feci questa sperienza sovra semplici gocce, e con gocce aventi la bolla soffiatavi sopra, ma fino ad ora non mi fu dato di veder nulla d'importante. Quando avrò meglio disposti gli apparecchi, ritenterò la prova. Intanto ho creduto bene di far conoscere questo tentativo, ancorchè senza risultato, potendo esso suggerire ad altri di me più abili qualche modo di miglior riuscita.

8. *Temperatura dei liquidi sferoidali nell'aria libera.* — Misurai la temperatura dei liquidi sferoidali con termometri a mercurio fatti costrurre espressamente. Ho fatto qualche centinaio di determinazioni per diversi liquidi. Dall'insieme delle mie misure una sola cosa ricavo, ed è che la temperatura di ciascun liquido sferoidale varia di alcuni gradi secondo il vario stato di purezza del liquido e la maggiore o minor pulitezza del vaso. Basta una minima circostanza, spesso impercettibile, per produrre una variazione in questo elemento. Per l'acqua distillata trovai temperature varianti da 95 a 99°. In ogni caso queste furono sempre, per tutti i liquidi cimentati, prossime a quella dell'ebollizione del liquido.

La pressione atmosferica deve avervi un' influenza, poichè cambia con essa la temperatura dell'ebollizione. Per accertarmene confrontai tra loro i risultati corrispondenti a giornate di pressione barometrica differente; ma nulla potei dedurne. Ciò vuol dire che le variazioni che dirò accidentali, sono maggiori di quelle dipendenti dalle variazioni di pressione atmosferica, e queste ultime sono mascherate dalle prime. Quindi si spiega la gran varietà dei risultati ottenuti da differenti sperimentatori a questo riguardo.

L'acqua contenente sali in soluzione, secondo il vario grado di concentrazione di questi, presenta fenomeni differenti. Se la proporzione del sale eccede un certo limite, la goccia d'acqua cadendo sul metallo lascia, si può dire istantaneamente, su questo una macchia od un deposito che quasi sempre impedisce la riduzione del liquido allo stato sferoidale. Se la quantità del sale è piccola, allora si ottiene questo stato e si può misurare la temperatura. In queste operazioni io lasciava una fiammella

accesa sotto il vaso per mantenerne la temperatura costante, e a misura che il liquido andava evaporandosi, io ne aggiungeva nuove gocce in modo che il bulbo del termometro fosse sempre intieramente immerso.

Al cadere di ogni goccia il liquido si raffreddava alquanto ed il mercurio nel termometro discendeva di due, tre, fino a sette gradi, ma risaliva tosto ad altezza superiore di prima, mai ad altezza inferiore. Continuando a questo modo, si giunge ad un punto in cui la temperatura si eleva tutto ad un tratto, il liquido si mette a bollire, ed è difficile salvare il termometro dalla rottura. Sul fondo del vaso rimane uno strato considerevole dei depositi lasciati dall'acqua evaporata. L'effetto si spiega facilmente: a misura che l'acqua si evapora, la soluzione salina va concentrandosi, e quando giunge al limite in cui lo stato sferoidale non è più possibile, succede il fatto descritto.

Operando con acqua potabile, o con acqua tenente poco sale di cucina sciolto, osservai talvolta la temperatura salire gradatamente da 95 fino a 100° o poco più e poi arrestarsi, non ostante l'aggiunta di nuove gocce. Qualche rara volta mi avvenne di far giungere la temperatura fino a 105 e 106°. Questa elevazione di temperatura deve dipendere da ciò, che la temperatura di ebollizione dell' acqua cresce col crescere della proporzione dei sali sciolti in essa.

**9**. *Durata degli abbassamenti e delle elevazioni di temperatura.* — Nell'aggiungere le nuove gocce al modo che ho detto, si osserva un fatto, al quale io attribuisco una grande importanza. L'abbassamento di temperatura, che avviene al cadere di una goccia fredda è rapidissimo, mentre l'elevazione di essa, che succede immediatamente, è in proporzione lenta. Non ho mai trovato il tempo dell'abbassamento maggiore di due secondi, ed è spesso minore di uno, mentre l'elevazione dura da 12 a 20 secondi.

**10**. *Influenza del calor raggiante sulla temperatura.* — Alcuni attribuiscono all'influenza del calor raggiante dalle pareti del vaso l'incertezza della determinazione della temperatura dei liquidi allo stato sferoidale. Io ritengo che tale influenza non abbia luogo. Ecco le sperienze che appoggiano la mia opinione. Determinata la temperatura col bulbo termometrico tutto immerso nel liquido, si sollevi il termometro in modo che il bulbo ne esca poco a poco. Avviene spesso che il bulbo già sporge

fuori dal liquido di un sesto od un quinto del suo diametro, e tuttavia la temperatura ch'esso indica rimane ancora invariata. Debbo notare che i miei termometri sono a piccolo bulbo ed a sottilissima colonna di mercurio. Per un maggiore innalzamento, essa comincia a crescere, e quando il bulbo è tutto fuori, l'aumento è grande e rapidissimo.

11. *Temperatura delle bolle sui liquidi sferoidali.* — Ho cercato di determinare la temperatura dell'interno delle bolle soffiate sui liquidi sferoidali; non vi riuscii completamente, ma posso giudicare che essa sia la medesima che quella del liquido sottostante. La difficoltà consiste nel far entrare il bulbo del termometro nell'interno delle bolle. Ho provato a mettere prima il termometro nel liquido, per soffiarvi dopo la bolla, e poi sollevarlo in questa. Così facendo avviene spesso che il tubo termometrico si rompe a piccola distanza dal bulbo, all'altezza delle bolle che si formano. Questa cosa spiega precisamente, secondo me, che la temperatura delle bolle non può essere gran che differente da quella del liquido. Invero questa temperatura si può dire molto bassa rispetto a quella dell'ambiente nel vaso. Il gambo termometrico a poca distanza dal bulbo, e prima della formazione delle bolle, è caldissimo, e toccato da queste, relativamente fredde, si rompe. Del resto non sempre succede la rottura, ma in tal caso le bolle si formano intorno al termometro, e non mi riuscì mai di farne nascere una che circondasse il tubo. Questa stessa cosa avviene soffiando prima le bolle ed introducendovi poscia il termometro. Ma si supera la difficoltà soffiando sul liquido non una semplice bolla, ma una specie di schiuma formata di piccole bolle. Il termometro immerso in tale schiuma, ed anche quasi totalmente fuori del liquido, segna la temperatura di questo o ben poco di più.

12. *Temperatura dell'alcool e dell'etere infiammati allo stato sferoidale.* — Introduco il bulbo del termometro nel liquido allo stato sferoidale e quando la temperatura segnata è stazionaria, do fuoco al liquido. Per pochi istanti non si vede indizio di variazione di temperatura, ma ben presto questa comincia a crescere lentamente di tre o quattro gradi, poi tutto ad un tratto di altri cinque o sei, alla quale altezza il movimento si arresta per poco, e si divide la colonna di mercurio in più parti. Ecco i risultati numerici di due sperienze fatte

l'una coll'alcool, l'altra coll'etere, dei quali io non saprei dire il grado di purezza. Era l'alcool allo stato sferoidale, ed il termometro segnava 68°. Dato fuoco, dopo un secondo circa cominciò ad alzarsi lentamente la colonna di mercurio, che salì fino a 72, poi quasi d'un salto essa raggiunse i 78°, e la colonna di mercurio si divise. L'etere passò allo stesso modo lentamente da 38 a 40°, poi d'un salto a 43. In queste sperienze io mi aspettava di rompere vari termometri, ma la mia aspettazione fortunatamente fu delusa; essi non si rompono, ma nel salto della temperatura si divide, come dissi, la colonna di mercurio in più parti, e non si può più continuare la sperienza.

Dall'insieme delle sperienze io deduco che la temperatura del liquido acceso allo stato sferoidale non è differente da quella dello stesso liquido non acceso. Il lento aumentare della temperatura appena acceso il liquido ha la sua ragione di essere nel grande riscaldamento del mercurio nel tubo del termometro. Il salto poi di temperatura succede appena il liquido cessa di coprire il bulbo termometrico. La fiamma in contatto col bulbo produce il salto e la divisione del mercurio.

**13.** *Temperatura dell'acqua sferoidale in vasi chiusi.* — Belli e Kramer (*Giornale dell'Istituto Lombardo*, 1844) trovarono che la temperatura dell'acqua sferoidale variava da 78 ad 80° R. secondo che il vaso era aperto oppure chiuso con una lamina di mica. Io ho ripetuto questa sperienza chiudendo i vasi con un cartone orizzontale attraversato dal tubo del termometro e scorrevole a dolce strofinio lungh'esso. La temperatura, col cartone sollevato, era quella che si osserva comunemente nell'acqua allo stato sferoidale; abbassato il cartone, essa cresceva più o meno, secondo che il cartone copriva intieramente o parzialmente il vaso. Con piccole aperture di esalazione di varia grandezza, praticate nel cartone, otteneva temperature varianti da 100 a 102°; col cartone intiero, il termometro segnava talvolta fin 105°. In quest'ultimo caso il vapore aveva ancora un piccolo sfogo pel foro centrale e tra il cartone e l'orlo del vaso. Questi risultati provano la giustezza della congettura di Avogadro (n° 3).

**14.** *Stato sferoidale nel vuoto.* — Lo stato sferoidale nasce e perdura nel vuoto, e lascia campo a svariate sperienze, mà non tutti i liquidi permettono che si veda ciò che succede nella campana in causa dei loro vapori. Collocata la campana sul li-

quido, e fatto il vuoto a qualunque grado, se, dopo un tempo non troppo lungo, si lascia rientrare l'aria, e si toglie la campana, si vede ancora la goccia sferoidale impicciolita che si mantiene in questo stato. Nel vuoto ha termine la condizione sferoidale in due modi, come nell'aria libera, o per evaporazione totale del liquido, o per diminuita temperatura del vaso, per cui questo viene dal liquido bagnato. Si prolunga la durata della stessa condizione coll'adoperare masse di liquido più grandi e collocando il vaso in un vano di forma conveniente scavato in un pezzo di mattone fortemente riscaldato.

15. *Temperatura dei liquidi sferoidali sotto il recipiente della macchina pneumatica.* — La campana in cui si dirada l'aria ha il fondo traforato e munito di un'armatura di ottone chiusa da un turacciolo di gomma, che porta il termometro. Il primo preparativo da fare è quello di fissare l'altezza del termometro in modo che, allorquando si coprirà colla campana il liquido sferoidale, il suo bulbo s'immerga totalmente in esso. Per tal fine si colloca a freddo il vaso metallico, che dovrà contenere il liquido, sul piatto della macchina nella posizione che gli si darà quando conterrà il liquido, e si fa discendere il termometro finchè il suo bulbo rasenti il fondo del vaso senza toccarlo. Allora scaldato il vaso, e messo in posizione col liquido allo stato sferoidale, si può operare colla macchina. È naturale che la parte graduata del termometro deve essere fuori della campana.

Collocata a posto la campana col bulbo del termometro nel liquido sferoidale, si vede il mercurio segnare la temperatura propria del liquido sotto la pressione ordinaria e frequentemente anche una temperatura superiore. Ma ai primi colpi di stantuffo, immediatamente la temperatura discende, e diventa tanto minore, quanto è maggiore la rarefazione dell'aria interna. Ciò avviene per tutti i liquidi, ma io ho studiato più particolarmente la relazione tra la pressione e la relativa temperatura per l'acqua distillata.

Non è tanto facile come potrebbe apparire a prima vista, di misurare la temperatura corrispondente ad una pressione fissa, o per meglio dire, è estremamente difficile e forse impossibile di mantenere una pressione costante sotto la campana. Per poco che si lasci in riposo la macchina, immediatamente la pressione cresce per l'aumentata tensione dei vapori, e cresce insieme la

temperatura indicata dal termometro. Facendo agire convenientemente gli stantuffi della macchina, si riesce, dopo qualche esercizio, ad ottenere una pressione oscillante tra limiti abbastanza ristretti da poter fare utili osservazioni. Egli è in questo modo che io ho sperimentato sotto un grandissimo numero di pressioni differenti, determinai per ciascuna di esse i limiti d'oscillazione della pressione e della temperatura corrispondente. Il risultato di tutte le osservazioni è che sempre la temperatura del liquido è prossima a quella a cui esso nelle condizioni normali bollirebbe sotto la pressione a cui si trova. È inutile che io riferisca qui i numerosi risultati numerici che ottenni; mi limiterò a darne due, tanto per far conoscere il grado d'importanza dei medesimi.

Messa la campana a posto col bulbo del termometro nell'acqua allo stato sferoidale, la temperatura salì rapidamente fin oltre a 90, poi lentamente fino a 100°. Allora feci dare i primi colpi di stantuffo, e giunta la temperatura a 40°, feci rallentare il moto in modo da ottenere la massima costanza possibile nella pressione. Il manometro m'indicava una pressione saltellante e tale che nelle escursioni superiori raggiungeva dai 56 ai $60^{mm}$ e nelle inferiori dai 45 ai 50. Notisi che è impossibile contare sull'esattezza del millimetro. La temperatura poi oscillò da 37 a 40° prossimamente. Anche qui non si può assicurare l'esattezza nel grado. La media delle pressioni mi diede $53^{mm}$ e la media temperatura 38°·5. Nelle tavole di Regnault a questa temperatura minima di ebollizione corrisponde la pressione di $50^{mm}$ ed una frazione ed alla pressione di $53^{mm}$ la temperatura di 39 a 40°.

Un'altra volta operai a tale altezza della scala manometrica, che la media delle pressioni oscillanti mi venne di $420^{mm}$ e la media temperatura di 82°, invece di 84 ed una frazione, come darebbero le tavole. Non sempre ottenni risultati così concordanti colle tavole come questi, ma le differenze sono sempre state abbastanza piccole da poter conchiudere, senza tema di errare, che la temperatura dell'acqua allo stato sferoidale nell'aria rarefatta è prossima a quella minima della sua ebollizione alla pressione corrispondente.

Analoghe, ma molto più grossolane determinazioni ho fatto per l'alcool e per l'etere, le quali mi condussero allo stesso risultato che quelle relative all'acqua, cosicchè dall'insieme di queste sperienze, e da quelle del n. 13, io mi credo autorizzato a con-

chiudere che *la temperatura di ogni liquido allo stato sferoidale, sotto una pressione qualunque, è prossimamente eguale alla temperatura minima di ebollizione del liquido stesso sotto quella medesima pressione.* Appare quindi quanto giudiziosa fosse la congettura del venerato mio Professore Avogadro, riferita alla fine del n. 3.

**16.** *Osservazione importante.* — In tutte le sperienze eseguite colla macchina pneumatica ho sempre notato che la discesa della temperatura, a misura che l'aria va rarefacendosi, è pronta e si manifesta al primo colpo di stantuffo, e badando al solo termometro, si può all'ingrosso giudicare del grado di rarefazione ad ogni momento. Al contrario l'aumento di temperatura, allorchè si cessa di far agire gli stantuffi, è lento, ed anche lento in proporzione, allorchè si lascia rientrare l'aria nella campana. Questo fatto, analogo a quello del n. 9, serve per la spiegazione di questi fenomeni, ed ha un gran peso nella teoria della formazione della grandine, come farò vedere in apposita Nota.

**17.** *Temperature bassissime ottenibili coi liquidi sferoidali nel vuoto.* Ammettendo che la temperatura di un liquido allo stato sferoidale sia eguale alla minima della sua ebollizione sotto la pressione a cui si trova (essa è in generale un po' minore), le tavole della tensione massima dei vapori di ogni liquido danno, senz'altro, la temperatura dello stesso liquido allo stato sferoidale sotto la pressione eguale alla tensione dei vapori suoi. Quindi stando ai risultati trovati da Regnault, la temperatura nello stato sferoidale sarebbe

| per | sotto la pressione di | di gradi |
|---|---|---|
| l'acqua | $4^{mm}\cdot6$ | 0 |
| » | 2 ·08 | — 10 |
| » | 0 ·91 | — 20 |
| l'alcool | 12 ·8 | 0 |
| » | 6 ·6 | — 10 |
| » | 3 ·3 | — 20 |
| l'etere solforico | 183 ·3 | 0 |
| » | 113 ·3 | — 10 |
| » | 67 ·5 | — 20 . |

Per liquidi più volatili, come sarebbero, ad esempio, l'acido solforoso, l'etere metilitico, l'acido carbonico, il protossido d'a-

zoto, ecc, le temperature ottenibili collo stato sferoidale sarebbero grandemente più basse. Per darne un'idea pigliamo le mosse dalla sperienza di Despretz descritta alla fine del n. 3. Egli aveva il protossido d'azoto allo stato sferoidale sotto la pressione di $20^{mm.}$ Quale doveva essere la temperatura di questo corpo? Il protossido d'azoto bolle a $-88°$, alla quale temperatura la tensione del suo vapore è di $760^{mm.}$. Se la legge proposta da Dalton, per cui le tensioni dei vapori dei diversi liquidi sono eguali a temperature egualmente distanti dai loro punti rispettivi di ebollizione, fosse vera, confrontando il protossido d'azoto coll'acqua, si troverebbe pel primo, a $20^{mm.}$ di pressione, la temperatura di $-165°$. Il confronto coll'alcool e coll'etere darebbe invece la temperatura inferiore a $-180°$ pel primo e a $-200$ pel secondo.

**18.** *Congelazione di un liquido sferoidale.* — L'acqua allo stato sferoidale sotto la pressione di uno a due millimetri ha, come si è visto, la temperatura di 10 a 20 gradi sotto lo zero, e può gelare, anzi, può dirsi, gela, poichè è poco probabile che rimanga liquida a quella temperatura e coll'agitazione a cui è soggetta in quello stato. A questo modo, probabilmente, congelossi il protossido d'azoto nella sperienza di Despretz, e si congelerebbe qualunque liquido sotto una pressione eguale o minore della tensione che hanno i suoi vapori alla temperatura della sua congelazione.

In mancanza di adatte macchine non potei tentare, come avrei voluto, la congelazione dell'acqua allo stato sferoidale; occorre, per questo scopo, una rarefazione di uno a due millimetri di mercurio.

**19.** *Congelazione dell'acqua nell'alcool e nell'etere allo stato sferoidale.* — Facilmente si riesce a far congelare l'acqua nell'etere allo stato sferoidale; ecco in qual modo io ottenni questo risultato. Collocai la capsula di platino, riscaldata nell'acqua bollente, entro un'apposita cavità di un mattone ad altissima temperatura, e dentro alla capsula versai 12 a 15 centim. cubici di etere.

L'acqua chiusa in una bolla di vetro, si mette nell'etere. Si copre il tutto colla campana e si fa il vuoto. In questa sperienza, colla mia vecchia macchina, non ha mai potuto ottenere più che 100 a $120^{mm.}$ di rarefazione. Ciò non di meno in un minuto circa l'acqua si congela. Lasciata penetrare l'aria e tolta

la campana, trovo nel vetro il ghiaccio. La sperienza riesce anche bene con l'acqua in un tubo di vetro.

Con una macchina che dia il vuoto a sei o sette millimetri si otterrebbe lo stesso fenomeno nell'alcool.

**20**. *Congelazione del mercurio nell'etere sferoidale.* — Coi mezzi, che io aveva a mia disposizione, non ho potuto tentare la congelazione del mercurio. Tuttavia ben si comprende che con un vuoto di 8 a $10^{mm.}$ il mercurio nell'etere allo stato sferoidale deve solidificarsi.

Ognuno ben vede che questi risultati sono di un ordine ben differente da quelli analoghi ottenuti da Boutigny e da Faraday.

**21**. *Congelazione nel vuoto in liquidi non allo stato sferoidale.* — Gli agghiacciamenti ottenibili in liquidi allo stato sferoidale si ottengono assai più comodamente negli stessi liquidi non allo stato sferoidale e sotto la medesima pressione. Così l'acqua gela nell'alcool alla pressione di 10 a 12 millimetri, e nell'etere a quella di 175 a 180; egualmente il mercurio gela nell'etere alla pressione di 8 a $10^{mm.}$ e questi fenomeni avvengono senza che l'etere o l'alcool siano allo stato sferoidale. Su questo principio sono fondati differenti metodi di fabbricazione del ghiaccio. Ma la congelazione dell'acqua e del mercurio nell'acido solforoso e nell'acido carbonico allo stato sferoidale, quale fu ottenuta da Boutigny e da Faraday rispettivamente, e dell'acqua nell'etere, come la ottenni io stesso, presenta qualche cosa di sorprendente, perchè fatta, per così dire, nel fuoco.

**22**. *Passaggio dei liquidi dallo stato sferoidale allo stato naturale.* — Abbassandosi la temperatura del vaso al di sotto di un certo limite, il liquido cessa di essere nella condizione sferoidale. Se esso è in piccola quantità, una goccia, ad esempio, si evapora ad un tratto e scomparisce, ma se è in quantità considerevole, l'evaporazione, da prima rapida, va rallentandosi per la diminuita temperatura del vaso, ed il liquido non iscomparisce che lentamente. Il passaggio da una condizione all'altra non si fa d'un salto, ma vi ha continuazione, come avviene in tutti i fenomeni naturali. Accade bene spesso che questo passaggio, per masse considerevoli, nell'aria, e più ancora nel vuoto, si faccia quasi tacitamente e senza che l'operatore se ne avvegga.

Quindi allorchè si fa congelare l'acqua od il mercurio, ad esempio, nell'etere allo stato sferoidale, non bisogna credere di

aver riuscito la sperienza per ciò che i due liquidi passarono allo stato di solidità. Potrebbe l'etere, durante l'operazione, perdere lo stato sferoidale, ed il congelamento sarebbe ottenuto nel senso spiegato al n. 21, e non in quello dei n.i 19 e 20. Del resto è facile, alla fine dell'operazione, di riconoscere il senso dell'avvenuto congelamento: se il vaso è ancora caldo, lo stato sferoidale continuò fino alla fine, in caso contrario, no.

23. *Quistione di priorità.* — Qui termina la parte sperimentale del mio lavoro. Prima di passare a considerazioni teoriche intorno ai fenomeni osservati, piacemi far notare che nessuno avanti di me, per quanto io mi sappia, salvo Avogadro, non ha mai dichiarato esplicitamente che la temperatura dei liquidi allo stato sferoidale debba variare colla pressione, e nessuno ha mai fatto sperienze per verificare questa proposizione. Il signor Boutigny, soltanto, vi si è aggirato intorno, e si propose di fare *poi* in proposito sperienze, che, almeno fino alla pubblicazione dell'ultimo suo volume (1883) non ha mai fatto.

Egli ha traveduto che la temperatura di un liquido allo stato sferoidale varia colle *condizioni* in cui esso trovasi, ma tra queste condizioni non ha mai annoverato la pressione. Così a proposito della sperienza di Belli e Kramer, che ho citato nel n. 13, egli dice che essendo la capsula coperta colla lamina di mica, « le condizioni nelle quali si sperimenta non sono più le stesse. Al fondo delle miniere l'acqua non bolle alla stessa temperatura che sul Monte Bianco; essa è solida ai poli, e sempre liquida all'equatore (vol. citato, p. 18) ». E più giù nella stessa pagina aggiunge: « Allorchè io ripeterò queste differenti sperienze nel vuoto con un apparecchio adatto, mi aspetto di trovare altre temperature, e la ragione ne è ben semplice: i corpi sottoposti alla sperimentazione *non saranno più nel medesimo mezzo* ». E non soddisfatto di queste ragioni, accagiona ancora delle differenze osservate, le difficoltà quasi invincibili che presenta la termometria, dappoichè Bellani dimostrò lo spostamento dello zero.

Il signor Boutigny ritornò sulla questione nell'ultimo alinea della pag. 264 della sua opera, ove dice: *Il reste par exemple toute la série d'expériences à faire dans le vide. . . Mais quelle est la température des corps à l'état sphéroidal dans le vide? quelle est celle de leur vapeur? et vingt autres questions comme celles-là restent à résoudre.* Anche qui non si trova cenno dell'influenza della pressione.

24. *Due errori da evitare.* — La massima parte di coloro che scrissero dello stato sferoidale attribuiscono la bassa temperatura del liquido relativamente a quella dell'ambiente, nel vaso caldo, alla evaporazione superficiale. Ma costoro, senza avvedersi, cadono nell'errore di Volta, che spiegava il raffreddamento delle nubi temporalesche colla loro evaporazione nelle parti superiori, generata dai raggi solari, o di coloro che credono che il ghiaccio si conservi meglio al sole, che in luogo chiuso, per ragione consimile. I vapori che nascono alla superficie dei liquidi allo stato sferoidale ricevono, per irradiazione, dal vaso il calore necessario alla loro formazione, e non dalla massa del liquido, alla quale piuttosto che sottrarre, somministrano calore, come vedremo.

Un altro errore sovente ripetuto è quello che riguarda l'equilibrio di temperatura, il quale alcuni dicono non verificarsi secondo le note leggi della fisica. Costoro ritengono che vi sia un salto deciso di temperatura tra il liquido e l'ambiente, mentre, come si vedrà, il cambiamento si fa per gradi, rapidi sì, ma continui. Tenendo conto di tutte le circostanze del fenomeno, io credo possibile, nello stato attuale della scienza, di determinare la funzione che esprime l'andamento della temperatura, o le variazioni di potenziale calorifico, procedendo dal liquido all'ambiente. Tale funzione non è discontinua; offro ai fisici matematici un campo d'esercizio nella sua ricerca.

25. *Equilibrio di temperatura dal liquido alle pareti del vaso.* — La pressione che sopporta il liquido allo stato sferoidale in un vaso aperto è quella dell'aria esterna; quindi se non intervengono circostanze straordinarie, la temperatura dello strato liquido superficiale, che si evapora, è uguale alla temperatura minima d'ebollizione del liquido stesso sotto la pressione attuale. Il vapore, a misura che si va formando, si allontana dal liquido per far luogo ai vapori che gli succedono, e si porta verso le pareti del vaso e verso l'apertura di esso. In questo suo cammino egli incontra sempre nuovo calore irraggiato dal vaso, e acquista man mano maggior temperatura, diradandosi, e per così dire, assottigliandosi. In conseguenza la temperatura nel vaso va crescendo in modo continuo dalla superficie del liquido, ove il suo valore è uguale alla minima di ebollizione, fino alla parete del vaso, ove essa è quella della parete medesima.

26. *Temperatura del liquido.* — La massa liquida riceve calore in due modi: per irradiazione e per contatto. Una parte

del calor raggiante l'attraversa senza scaldarla; l'altra parte viene assorbita, e concorre ad elevarne la temperatura. Il calore che il liquido riceve per contatto è quello che mantiene lo strato superficiale di esso alla temperatura minima di ebollizione, e si propaga nell'interno della massa per conduttività e per convezione. La parte dovuta alla conduttività è minima, se non nulla, e possiamo conchiudere che la massima parte del calore che riceve l'interna massa del liquido è d'irradiamento e di convezione.

Ora il liquido perde calore in due modi: per irradiazione e per sua propria evaporazione, e l'equilibrio della temperatura di esso avrà luogo quando la somma dei calori perduti eguaglierà la somma dei ricevuti.

Notisi che ho detto la sua propria evaporazione, e non la superficiale, la quale come già avvertii, non si fa a spese del calore interno.

Ora io dico che la temperatura del liquido, sempre stando nelle condizioni ordinarie, non può eccedere la minima di sua ebollizione. Infatti, se ciò avvenisse, il liquido bollirebbe, e non avremmo lo stato sferoidale. Ecco dunque che noi possiamo conchiudere a priori che la temperatura di un liquido allo stato sferoidale non è mai superiore a quella della sua ebollizione.

**27.** *Surriscaldamento dei liquidi sferoidali.* — Uscendo dalle condizioni normali, possono i liquidi surriscaldarsi, cioè acquistare una temperatura maggiore della minima di ebollizione, sieno essi allo stato sferoidale, o no, e ciò in due modi: *per riscaldamento e per diminuzione di pressione.* Riscaldate un liquido tranquillo e fuori del contatto di sostanze che ne facilitino l'ebollizione; la sua temperatura può salire anche di molti gradi sopra quella minima della sua ebollizione, e di ciò possiamo avvederci sia coll'osservazione termometrica, sia da un subitaneo sbalzo e quasi esplosione che succede nel liquido al cessare delle cause che lo mantengono nella condizione di surriscaldamento. Questo fatto osservai io più volte misurando la temperatura dell'acqua, dell'alcool e dell'etere allo stato sferoidale sotto la campana della macchina pneumatica senza operare il vuoto. La campana si riscalda, la temperatura indicata dal termometro va crescendo, e poi tutto ad un tratto succede uno sbalzo del liquido, e la temperatura ricade all'altezza ordinaria.

Più facilmente e più frequentemente avviene il surriscaldamento per diminuita pressione. Rarefacendo l'aria col liquido allo

stato sferoidale sotto la campana, avviene spesso che il mercurio cessa momentaneamente di discendere nel termometro, per ripigliare il suo corso discendente dopo uno sbalzo del liquido.

28. *Causa per cui il termometro col bulbo non intieramente immerso nel liquido sferoidale, oppure circondato da bolle, continua a segnare la temperatura del liquido.* — Ciò nasce da una causa semplicissima. Il liquido che bagna il vetro, per capillarità, sale e riveste ancora l'intiero bulbo anche allorchè questo è già parzialmente fuori della massa liquida. La lamina liquida, che sale intorno al vetro, o che chiude le bolle, si evapora continuamente e continuamente si rifornisce di nuovo liquido che sale per capillarità, nel primo caso, e per una specie di soluzione nel secondo. Dico per una specie di soluzione, nè saprei come esprimere diversamente la cosa. Nelle mie sperienze del 1881, citate nel n° 7, io vedeva distintamente nell'immagine delle lamine liquide, a misura che queste si assottigliavano, partire dalle gocce liquide, che stavano in contatto, delle correnti continue che andavano ad alimentarle. Intorno alla goccia, che pende da una bolla di sapone, e da tutti i punti del filo di ferro che chiude una lamina orizzontale, si osserva un'eruzione incessante di filetti fluidi, che scorrono verso le parti più sottili della lamina, e giunti alla distanza di alcuni millimetri dal punto di partenza, si rallentano, s'incurvano e paiono retrocedere dopo aver formato una piccola testa grossa come quella di un ago, che scomparisce tosto, rappresentando a chi li osserva, l'aspetto di migliaia di razzi accesi e rapidamente succedentisi in ristretto spazio. È un fenomeno di diffusione reciproca, che in molti liquidi si manifesta allorchè essi sono a mutuo contatto, e differiscono anche di pochissimo l'uno dall'altro.

# INDICE

N.° 1. Scopo della Nota . . . . . *Pag.* 445
» 2. Denominazione del fenomeno . . . . . » 445
» 3. Un po' di storia . . . . . » 446
» 4. Una prima sperienza . . . . . » 450
» 5. Materiale per le sperienze . . . . . » 451
» 6. Bolle soffiate sui liquidi sferoidali . . . . . » 451
» 7. Tentativo di studio dei movimenti interni delle gocce e delle bolle . . . . . » 454
» 8. Temperatura dei liquidi sferoidali nell'aria libera . . . . » 455
» 9. Durata degli abbassamenti e delle elevazioni di temperatura » 456
» 10. Influenza del calor raggiante sulla temperatura . . . . . » 456
» 11. Temperatura delle bolle sui liquidi sferoidali . . . . . » 457
» 12. Temperatura dell'alcool e dell'etere infiammati allo stato sferoidale . . . . . » 457
» 13. Temperatura dell'acqua sferoidale in vasi chiusi . . . . . » 458
» 14. Stato sferoidale nel vuoto . . . . . » 458
» 15. Temperatura dei liquidi sferoidali sotto il recipiente della macchina pneumatica . . . . . » 459
» 16. Osservazione importante . . . . . » 461
» 17. Temperature bassissime ottenibili coi liquidi sferoidali nel vuoto . . . . . » 461
» 18. Congelazione di un liquido sferoidale . . . . . » 462
» 19. Congelazione dell'acqua nell'alcool e nell'etere allo stato sferoidale . . . . . » 462
» 20. Congelazione del mercurio nell'etere sferoidale . . . . . » 463
» 21. Congelazione nel vuoto in liquidi non allo stato sferoidale . » 463
» 22. Passaggio dei liquidi dallo stato sferoidale allo stato naturale » 463
» 23. Quistione di priorità . . . . . » 464
» 24. Due errori da evitare . . . . . » 465
» 25. Equilibrio di temperatura dal liquido alle pareti del vaso . » 465
» 26. Temperatura del liquido . . . . . » 465
» 27. Surriscaldamento dei liquidi sferoidali . . . . . » 466
» 28. Causa per cui il termometro col bulbo non intieramente immerso nel liquido sferoidale, oppure circondato da bolle, continua a segnare la temperatura del liquido . . . . . » 467

Il Socio Cav. Prof. Giulio Bizzozero presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. C. Mondino, incaricato della direzione del Laboratorio Anatomo-patologico del R. Manicomio di Torino,

# SULLA STRUTTURA

DELLE

# FIBRE NERVOSE MIDOLLATE PERIFERICHE.

La fina anatomia delle fibre nervose midollate periferiche fu oggetto di studio per parte di molti e valenti osservatori, ma quando si leggono le loro monografie si è sorpresi dal vedere quanto sia ancora il disaccordo fra di loro. Se tutte le parti costituenti le fibre nervose midollate periferiche furono oggetto di diversa interpretazione pei diversi studiosi, quella fra di esse che diede luogo ai maggiori disaccordi è la guaina mielinica e si capisce: se le opinioni già si divisero riguardo alle parti più semplici e meglio accessibili alla osservazione, questa che possiede particolarità di struttura le quali si rivelano solo parzialmente cogli ordinari mezzi tecnici e che subisce modificazioni diverse per opera dei diversi reagenti non solo, ma di uno stesso reagente a seconda le varie condizioni di sua applicazione, doveva essere causa di dispareri maggiori.

Non rianderò la storia dell'argomento: è troppo nota, e qui sarebbe ozioso il ripeterla; ricorderò solo che dopo la scoperta di Ewald e Kühne della sostanza cornea nella guaina midollare la questione suscitata dello studio suo dal punto di vista morfologico pareva finalmente risolta dalle osservazioni del Golgi (1)

(1) Golgi, *Sulla struttura delle fibre nervose midollate, periferiche e centrali.* Arch. Scienze med., 1881.

quando il Pertik (1) prima ed il Waldstein ed il Weber (2) poco dopo la richiamavano a nuova vita.

Il Pertik sostenne che gli imbuti scoperti dal Golgi erano un prodotto artificiale dovuto all'acido osmico; devo dire che esaminato il lavoro del Pertik due impressioni se ne ricevono: la prima è che in tale lavoro l'autore più che non dello studio della fina anatomia delle fibre in questione si è preoccupato di stabilire le alterazioni che in esse inducono i varii reagenti; la seconda è che egli non conosce i metodi dei quali si atteggia a giudice.

È evidente che se egli attribuisce all'acido osmico la formazione delle fibre spirali ignora che nel metodo che per primo valse a dimostrarle, l'acido osmico non c'entra.

Il Waldstein ed il Weber conoscono anche meno del Pertik il lavoro di Golgi e dicono che egli *credette vedere fibrille spirali a livello delle incisure di Schmidt Lantermann.* Essi poi mettono bene in evidenza fino dalle prime pagine del loro lavoro come tutte le fibre da essi studiate col loro metodo presentassero, senza eccezione, come primo fenomeno i *cambiamenti dovuti all'azione inevitabile dell'acqua.*

Si può trovare per dimostrare la nullità di un lavoro un più valido argomento di questo che gli autori stessi hanno esposto?

La lettura di tali monografie di una sola cosa persuade, ed è la necessità di insistere sull'argomento, vedendolo giudicare senza che sia conosciuto. Egli è per tal motivo che in questa communicazione prima di parlare delle particolarità da me osservate nelle fibre nervose reputo necessario ripetere con cura i metodi coi quali esse si mettono in evidenza essendo essi quegli stessi che valgono a dimostrare le fibrille spirali.

I metodi sono due e servono perciò di prova l'uno all'altro pei risultati ottenuti.

Ecco le norme del 1°: tolto un nervo (e servono bene lo sciatico del cane e del coniglio) da un animale appena ucciso, avendo massima cura di non fargli subire il menomo stiramento, lo si taglia in pezzetti non più lunghi d'un centimetro, ser-

(1) Pertick, *Untersuchungen über Nervenfasern*, Arch. für mikr. anat, 1881, t. 19.

(2) Waldstein et Weber, Arch. de physiologie norm. et path. 1882, s. 2ª, t. 10.

vendosi di un affilato rasoio per evitare gli spostamenti longitudinali della mielina che causerebbe la pressione delle forbici, e lo si pone in liquido di Müller.

In un tempo che varia fra due ore e due giorni, a seconda delle condizioni di grossezza del pezzo, di temperatura, ecc., il nervo ha subito l'induramento richiesto e allora viene passato in una soluzione all'1 % di nitrato d'argento: per trasportare dal bicromato al nitrato d'argento dei nervi, che si trovino in opportune condizioni per la riuscita della reazione, è indispensabile mettere in liquido di Müller molti pezzetti e portarne successivamente nel bagno d'argento incominciando 2 ore dopo l'immersione e seguitando a brevi intervalli fino al fine del secondo giorno. In tal modo si ottengono infallantemente pezzi in cui la reazione è riuscita bene.

In nitrato d'argento può bastare che i pezzi restino 24 ore, ma è meglio se si lasciano un maggior tempo. Quando si tolgono vengono dilacerati e chiusi in Dammar colle ordinarie norme: quelli in cui la reazione è avvenuta mostrano degli anelli, dei manichetti, delle strie trasversali di colore rosso mattone. Esponendo al sole tali preparati in un tempo che varia da una settimana fino a due mesi si vanno man mano disegnando le fibrille spirali descritte dal Golgi.

Il secondo metodo dà più rapidi risultati: in questo i pezzetti di nervo, tolti colle suddette cautele, vengono immersi in una miscela di 10 parti di liquido di Müller ed una parte di una soluzione all'1 % d'acido osmico e quando sono sufficientemente induriti si trasportano in un bagno di nitrato d'argento.

L'indurimento opportuno avviene fra 24 ore e 9 giorni: seguendo le norme sopra descritte per passare il materiale dalla miscela osmio-bicromica in nitrato d'argento è impossibile non ottenere molte fibre in cui la reazione è perfettamente riuscita.

Il bagno d'argento è anche qui all'1 %: bastano 24 ore per la colorazione delle fibrille spirali, ma la reazione avviene più completa se si lasciano più a lungo immersi i pezzi.

La differenza che corre fra questo secondo processo ed il primo sta in ciò che in quest'ultimo le fibrille spirali sono completamente colorate quando si tolgono i nervi dal bagno d'argento e si possono subito studiare preparando i nervi in Dammar.

Siccome la reazione ottenuta con quest'ultimo metodo si altera rapidamente, così è buono tenere i nervi in cui le fibrille

siano bene riuscite in nitrato d'argento ove si conservano perfettamente e fare preparati estemporanei quando essi occorrono. Ho trovato che si poteva prolungare la conservazione delle fibrille ottenute con questo secondo processo passando i nervi in creosoto puro prima di far subire loro l'azione della essenza di terebentina.

Con questi metodi si pongono in evidenza nella guaina midollare delle fibrille avvolte a spira con volute progressivamente più strette e che vanno man mano allontanandosi l'una dall'altra in senso longitudinale per modo da rappresentare altrettanti imbuti: l'estremo largo dell'imbuto corrisponde alla periferia della guaina mielinica: l'estremo ristretto abbraccia il cilindro dell'asse: d'ordinario in una fibra non si colorano tutti gli imbuti; però quelle in cui ciò succede dimostrano che l'estremo largo di ciascun imbuto riceve qualche spira dell'estremo stretto di quello che precede per cui la serie riesce non interrotta (V. fig. 2ª).

A livello dei nuclei della guaina di Schwann i due imbuti che loro corrispondono si volgono le estremità strette (V. fig. 1ª *a*).

Gli accennati metodi tecnici non mettono però soltanto in evidenza gli imbuti: stante il diverso modo di comportarsi del nitrato d'argento, a seconda del differente grado d'indurimento acquistato dai nervi, si svelano ancora altre particolarità.

Si incontrano infatti spessissimo nei preparati ottenuti col secondo metodo fibre in cui il cilindrasse ha ottenuto per tratti più o meno lunghi un colore rosso castagno identico a quello delle fibrille spirali: da questo colore si passa talora bruscamente, talora per sfumature all'ordinario colore pallido che assume il cilindrasse in questo genere di preparazioni.

Lungo questi tratti colorati si osservano strie nere decorrenti obliquamente in direzioni varie e all'esterno di essi stanno gli imbuti che su di loro si inseriscono colla estremità ristretta (V. figure 3ª e 4ª).

Altre volte la colorazione in discorso si nota nello strato più periferico della guaina midollare, ove si presenta cogli stessi caratteri: in quest'ultimo caso però non si possono più vedere nè imbuti nè cilindrasse, chè dallo strato oscuro restano nascosti.

Per la reazione, che offrono questi due strati è ovvio ritenerli costituiti della stessa materia degli imbuti, ed ove gli imbuti rappresentino, come pare, la sostanza cornea descritta da Ewald e Kühne essi pure sarebbero stati cornei. Le fibre

spirali vengono a poggiare colla voluta esterna sulla membranella peri-mielinica; colla voluta interna si inseriscono sulla membranella peri-assiale.

Che qualche mezzo di contenzione per la mielina esista all'infuori della guaina di Schwann lo si vede anche nei preparati ottenuti con l'azione successiva dell'acido osmico e del carmino; quando la colorazione nera della mielina e quella rossa della membrana di Schwânn sono intense, spicca bene fra le due guaine un leggero spazio chiaro (V. fig. 5ª).

Siccome l'acido osmico fissa gli elementi nel loro reciproco rapporto ciò vuol dire che normalmente la mielina non è tenuta assieme dalla guaina di Schwann, ma mantiene la sua forma in virtù di qualche altro mezzo contentivo.

Riguardo alle due membranelle sorge la questione del modo loro di comportarsi a livello degli strozzamenti di Ranvier.

Nei preparati ottenuti col secondo dei descritti metodi si osservano spesso fibre nervose nelle quali si sono colorate le membranelle peri-mieliniche in quella porzione loro che avvolge gli estremi delle due guaine midollari concorrenti alla formazione di uno strozzamento di Ranvier (V. fig. 9ª).

In tal caso la colorazione cessa tutto attorno al cilindrasse il quale rimane pallido.

Altre fibre offrono colorato il cilindro assiale durante il suo passaggio attraverso allo strozzamento: allora, arrivando al punto in cui il cilindro si impegna nelle guaine midollari dei due segmenti interannulari, la colorazione non si seguita sulle membranelle peri-mieliniche, ma si continua lungo il cilindrasse per breve tratto le guaine peri-mieliniche conservandosi pallide (V. fig. 8ª).

Mi pare che tale modo di comportarsi della reazione significhi, che mentre la membranella peri-assile si continua non interrotta dall'uno all'altro segmento, quella peri-mielinica cessi agli estremi di ciascun segmento inserendosi sulla prima.

Nella fig. 8ª si vede che il cilindrasse conserva lo stesso calibro attraversando uno strozzamento di Ranvier, e solo si rigonfia un poco dopo la sua entrata nella guaina mielinica: questi preparati, che ognuno può con massima facilità ripetere seguendo le norme del secondo metodo, escludono il rigonfiamento biconico di Ranvier: ciò mi obbliga a fermarmi alquanto sulla struttura degli strozzamenti annulari.

La figura 7ª, disegnata da un preparato ottenuto dal Professore Golgi col primo metodo, rappresenta due immagini della stessa fibra vista in *a* con obbiettivo avvicinato, in *b* con obbiettivo allontanato.

Si scorge che mentre in *b* si ha la figura della croce latina di Ranvier non solo ma si riceve ancora l'impressione dell'esistenza del rigonfiamento biconico, in *a* tale effetto si appalesa dato dalla colorazione dei capi delle membranelle peri-mielinichei quali, avendo una direzione un po' obliqua, sovrappongono le loro immagini quando viene allontanato il fuoco del microscopio.

Per poco che cresca l'obliquità del preparato o che diffonda la colorazione al nitrato d'argento riesce quasi impossibile distinguere una tale disposizione.

Sui preparati poi ottenuti con acido osmico e carmino si vede che lo spazio biconcavo circoscritto a livello degli strozzamenti annulari dai capi delle due guaine mieliniche è occupato da due triangoletti, uno per parte, colorati in rosso, la base dei quali si continua nei suoi estremi colla sezione ottica della guaina di Schwann, mentre l'apice corrisponde al cilindrasse (V. fig. 5ª): evidentemente essi rappresentano la sezione ottica di un diaframma biconcavo forato al centro che è dipendenza di tal guaina.

Nei preparati al nitrato d'argento che hanno assunto la colorazione descritta a proposito della fig. 9ª si vede che il cilindrasse durante il passaggio nello strozzamento annulare è attraversato nella sua parte mediana da una stria nera trasversale (V. figura): qui si tratta della deposizione del nitrato d'argento sopra una sostanza cementante e noi abbiamo in sezione ottica la immagine del foro centrale del diaframma biconcavo, foro pel quale passa il cilindro dell'asse.

Devo parlare ancora dello speciale aspetto che offrono gli strozzamenti annulari nei nervi ove si sono colorate in modo completo le membranelle peri-mieliniche.

Qui vediamo (V. fig. 6ª) che le due estremità delle guaine midollari terminano come di solito con un capo arrotondato; esse sono orlate da una striscia ora pallida ora colorata in giallastro per leggera diffusione del nitrato d'argento e che rappresenta la sezione ottica della membrana di Schwann: siccome i due capi delle guaine mieliniche distano poco fra di loro, così pare che le striscie che le orlano si avanzino leggermente ciascuna

sulla guaina mielinica del lato opposto per modo da descrivere una piccola elissi.

Evidentemente qui si tratta del descritto diaframma che ha assunto una direzione un poco obliqua: allora ciascun semicerchio pare essere la continuazione della membrana di Schwann di quel segmento al quale volge la concavità: le parti laterali del disco, le quali rappresentano appunto lo spessore di due semicerchi sovrapposti, sembrano essere il punto di intersezione di due guaine distinte: una per ciascun segmento interannulare.

---

# SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. Fibrille spirali ottenute colla miscela osmio-bicromica e nitr. d'argento: in *a* si vede la loro disposizione a livello di un nucleo della guaina di Schwann.

» 2. Fibrille ottenute col metodo precedente: si vede, per un tratto della fibra nervosa, il rapporto che contraggono fra di loro.

» 3 e 4. Colorazione della membranella peri-assile. Attorno a tale membranella si vedono fibrille spirali.

» 5. Disposizione dello strozzamento di Ranvier in fibra preparata con acido osmico e carmino.

» 6. Disposizione dello strozzamento di Ranvier in fibre nelle quali si è colorata la membranella peri-mielinica.

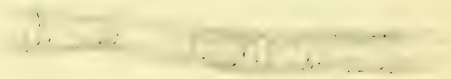
» 7. Aspetto dello strozzamento di Ranvier in una fibra preparata col bicromato di potassa e nitrato d'argento. In *a* vista con obbiett. avvicinato, in *b* con obbiett. allontanato.

» 8. Colorazione del cilindrasse mentre attraversa lo strozzamento di Ranvier (miscela osmio-bicromica e nitrato d'argento).

» 9. Colorazione dei capi delle membranelle peri-mieliniche a livello di uno strozzamento di Ranvier ottenuta con miscela osmio-bicromica e nitrato d'argento: deposizione di questo sale nella sostanza cementante il cilindro dell'asse col margine del foro centrale del sepimento dello strozzamento stesso.

1

Fig. 1

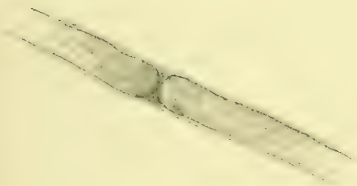


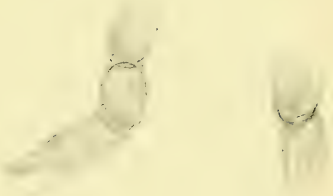
3

Fig. 4

5

Fig. 6





g. 7

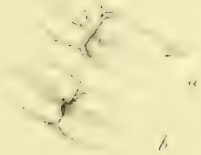



Fig. 8

Fig. 9

Lit. F.lli Doyen - Torino

Il Socio Conte Prof. T. Salvadori, condeputato col Socio Cav. Prof. L. Bellardi ad esaminare il lavoro del sig. Dottore L. Camerano, intitolato « *Ricerche intorno alla distribuzione dei colori nel regno animale* », presentato nell'adunanza del 9 Marzo 1884, legge la seguente

# RELAZIONE

Lo studio dei colori dei viventi ha acquistato una reale importanza dopo che i lavori classici del Darwin e del Wallace hanno dimostrato come i colori non siano fatti accidentali, ma legati a condizioni determinate di esistenza. Questo argomento non è ancora stato trattato con quella larghezza che la sua importanza richiede: il Dott. L. Camerano ha voluto rivolgere i suoi studi anche intorno al medesimo, colla memoria che ha per titolo: *Ricerche intorno alla distribuzione dei colori nel regno animale.*

Nella prima parte della memoria, l'Autore tratta dei colori degli animali per sè e delle classificazioni che se ne diedero, e discute le teorie del Magnus, dell'Allen, del Wallace e di altri intorno all'origine ed allo svolgimento dei colori nel regno animale. La classificazione dei colori degli animali seguita dall'Autore è quella del Wallace con qualche modificazione. Egli divide i colori degli animali in *esterni* ed *interni*, e si occupa particolarmente dei primi. I colori esterni vengono divisi in *ipodermici* ed *epidermici* e possono essere prodotti da pigmento o da interferenze luminose. — I colori esterni si dividono, secondo l' interpretazione loro, in colori *utili*, *indifferenti*, *rudimentali* e *accidentali*. Fra i colori utili si hanno i colori *protettori*, *attrattivi*, *conservatori*, *deviatori*, ecc.: l'ultima categoria di colori è quella

dei colori *sessuali*. L'Autore discute queste varie categorie di colori riferendo esempi presi nei vari gruppi di animali. Egli si ferma a lungo intorno alle colorazioni delle parti che sono meno in vista negli animali, e dimostra come in molte specie, appartenenti a quasi tutte le divisioni zoologiche, le parti sopradette siano spesso vivacemente colorite, quantunque il resto dell'animale abbia colorazioni oscure e poco spiccate. La tavola 1, unita a questo lavoro, mostra vari esempi di tal sorta di colorazioni.

L'Autore studia pure le colorazioni sessuali e fa vedere come si trovino spesso differenze sessuali di colore anche in animali molto semplici, come ad esempio nei *celenterati* e come sia poco sostenibile, nella massima parte dei casi, l'ipotesi darwiniana di una scelta sessuale produttrice di speciali colorazioni.

Nella seconda parte della memoria l'Autore passa in rassegna, rispetto alla colorazione, i *protozoi*, i *celenterati*, gli *echinodermi*, i *vermi*, i *crostacei*, gli *aracnidi*, i *miriapodi*, gli *ortotteri*, i *neurotteri*, i *rincoti*, i *ditteri*, i *lepidotteri*, i *coleotteri*, gli *imenotteri*, i *molluschi*, i *tunicati*, i *pesci*, gli *anfibi*, i *rettili*, gli *uccelli* e i *mammiferi*.

L'Autore mostra nella tavola II l'andamento dei vari colori nelle diverse classi animali. I dati numerici che servono alla costruzione delle curve sono calcolati in rapporto a 20 specie di ciascun gruppo di animali, per cui questa tavola dà il tanto per 20 in ciascuno di essi.

Lo studio della distribuzione dei colori nel regno animale mostra che vi si trovano per ordine di frequenza i colori seguenti: 1° bruno, 2° nero, 3° giallo, grigio, bianco, 4° rosso, 5° verde, 6° azzurro, 7° violetto. Il nero, il bruno ed il grigio sono più abbondanti nei vertebrati e negli artropodi; il rosso ed il giallo sono più abbondanti negli animali inferiori; il verde è frequentissimo negli animali inferiori, lo è meno nei molluschi, ma torna ad essere frequente nei vertebrati. L'azzurro ed il violetto sono i colori più scarsi, soprattutto il secondo, quantunque si trovino in quasi tutti i gruppi di animali; il bianco è sparso poco regolarmente e abbonda soprattutto nelle forme acquaiuole.

L'Autore riferisce in ultimo le conclusioni alle quali egli è giunto studiando la colorazione rispetto al mezzo, nel quale gli animali vivono, rispetto alla quantità di luce, al clima ed alla distribuzione geografica.

Nel lavoro del Dott. L. Camerano sono ordinatamente raccolti e studiati molti fatti, i quali anch'essi sono elementi del grande problema che è la vita, giacchè lo studio dei colori del regno animale cerca di dimostrare le cause che li producono e gli effetti che ne derivano, cause ed effetti che, studiati accuratamente, ci debbono guidare allo scoprimento delle origini.

I vostri Commissari sono lieti di proporre alla Classe la lettura della memoria del Dott. Camerano.

Luigi Bellardi.
T. Salvadori, *Relatore.*

La Classe approva la conclusione dei Commissari, e udita la lettura del lavoro del sig. Dott. L. Camerano, con regolare votazione, ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie.*

In quest'adunanza si dà comunicazione di parecchie lettere di Soci nazionali ed esteri che partecipano al lutto comune per la deplorata morte dell'illustre QUINTINO SELLA, che era aggregato all'Accademia di Torino dal 7 Dicembre 1856. Hanno inviato direttamente lettere di condoglianza all'Accademia, il Socio nazionale non residente Cesare CANTÙ, ed i Soci corrispondenti, Senatore Conte Giovanni GOZZADINI, Alberto de KOELLIKER Professore all'Università di Wurzbourg, Bernardo STUDER Professore all'Università di Berna, Giorgio CURTIUS Professore all'Università di Lipsia, Augusto DAUBRÉE Direttore della Scuola delle Miniere e Membro dell'Istituto di Francia. Inoltre il Socio GENOCCHI comunica la lettera di condoglianza del Socio straniero Carlo HERMITE, ed il Socio COSSA legge quelle de' Soci corrispondenti Carlo FRIEDEL e Alfredo de CLOIZEAUX, membri dell'Istituto di Francia.

*L'Accademico Segretario*
A. SOBRERO.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

Aprile

1884.

# CLASSE

## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza del 6 Aprile 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Cav. Prof. Andrea Naccari presenta e legge il seguente lavoro del signor Professore Antonio Ròiti, Socio Corrispondente dell'Accademia:

## DETERMINAZIONE

DELLA

# RESISTENZA ELETTRICA DI UN FILO

## IN MISURA ASSOLUTA.

Assecondando le raccomandazioni della Conferenza internazionale di elettricità, il nostro Governo mi ha fornito i mezzi necessari per determinare in misura assoluta la resistenza elettrica di un dato conduttore; ed io mi vi sono applicato indefessamente per sedici mesi. Ad onta della miglior volontà mia e dello zelo illuminato con cui sono stato assistito continuamente dal Dott. Annibale Stefanini pel primo anno, ed in seguito dal signor Adolfo Heydweiller; non che ad intervalli dal Dott. Luigi Pasqualini, non sono ancora giunto al termine del lavoro che mi era prefisso. Tuttavia sento il dovere di pubblicare subito una relazione sommaria di quanto s'è fatto fino ad ora; perchè il 28 d'aprile si deve adunare per la seconda volta la Conferenza a Parigi.

Il metodo da me seguíto è quello che ho indicato or son due anni (1). Si può considerare come una modificazione del metodo di Kirchhoff,

(1) *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XVII. Adunanza del 30 Aprile 1882.

in quanto che si fonda sull'induzione voltaica. Si tratta cioè di confrontare fra loro l'intensità d'una corrente, e la quantità di elettricità ch'essa può far circolare in un conduttore prossimo, avendo misurato il coefficiente d'induzione mutua dei due circuiti.

Kirchhoff provocava l'induzione spostando i due circuiti, Fr. Weber interrompendo il circuito primario, Rowland prima e Glazebrook poi, invertendovi la corrente. Altre applicazioni di questo metodo io non conosco.

La determinazione di Kirchhoff non aspirava certamente al grado di esattezza che ora si pretende.

Rowland misurava l'inducente e l'indotta con due reometri distinti; talchè gli occorreva determinare le costanti dei due strumenti, oltre che il coefficiente d'induzione neutra di due rocchetti: e di più doveva fare una determinazione speciale per ridurre le due bussole ad uno stesso campo magnetico.

Fr. Weber, quantunque facesse agire alternativamente sopra uno stesso ago tanto l'inducente quanto l'indotta, e così si risparmiasse di tener conto del magnetismo terrestre, doveva pure misurare le dimensioni di due reometri.

Glazebrook si liberava da siffatta misura; perchè nello stesso galvanometro, che gli serviva per l'indotta, mandava una debolissima derivazione dell'inducente. Ma in cambio doveva sottostare all'operazione delicatissima di confrontare fra loro due resistenze molto, ma molto, diverse, in tempi diversi ed a diverse temperature.

Tutti osservavano la deviazione definitiva dell'inducente e la impulsiva dell'indotta: e però tutti avevano bisogno d'una scala divisa esattamente ed esattamente collocata di fronte allo specchietto del galvanometro: e dovevano studiare lo smorzamento delle oscillazioni, che segue leggi non ancora bene stabilite con tutto il rigore desiderabile: e tutti erano esposti agli errori, non assegnabili rigorosamente, derivanti dalle proprietà magnetiche dei metalli onde son composte le bussole. — Per tutti la determinazione del tempo, che figura nel denominatore dell'espressione d'una resistenza assoluta, si riduceva a contare le oscillazioni dell'ago, il che riesce lungo e non può essere concomitante colle osservazioni; cosicchè il campo magnetico terrestre doveva essere sorvegliato per un tempo molto rilevante. — Tutti prendevano la misura assoluta dell'intero circuito indotto, ne-

cessariamente di rame, e quindi molto impressionabile ai cambiamenti di temperatura: e più tardi dovevano confrontare questa resistenza, sempre grande, col filo campione, uguale all'unità Siemens od all'unità dell'Associazione Britannica. — Tutti hanno preso per sistema inducente e per sistema indotto due rocchetti cilindrici, composti di più strati di filo, ed affacciati a qualche distanza, cogli assi sopra una stessa retta: ed è ben nota la difficoltà di dedurre da misure geometriche coll'approssimazione di $^1/_{5000}$ (che tale dovrà essere almeno, se si vorrà lasciar margine agli altri errori possibili, per poter contare sul millesimo nel risultato finale) il coefficiente d'induzione di un sistema così fatto.

Da questa rapida enumerazione apparirà manifestamente quanto sia diversa la via da me battuta.

Uno stesso galvanometro serve per l'inducente e per l'indotta. Per osservare l'inducente (fig. 1), la pila $P$ è chiusa dal filo inducente $I$

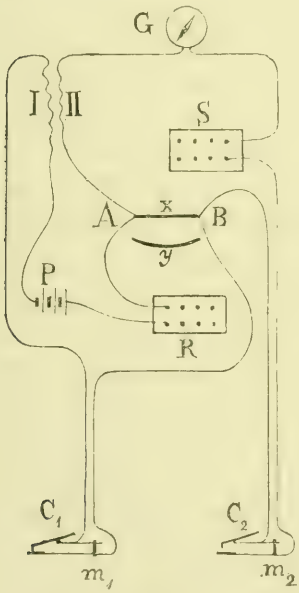



Fig. 1.

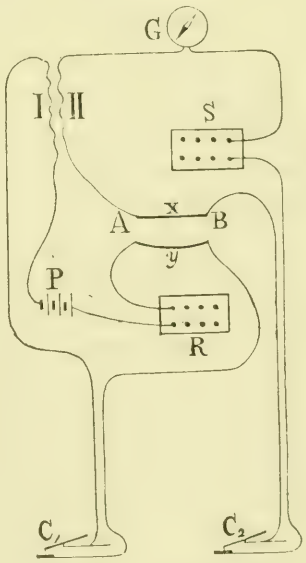



Fig 2.

ed al campione $x$ da misurare, oltre che dai necessari fili di congiunzione e da una cassetta di resistenza $R$. Dalle estremità $A$, $B$ del campione parte un ramo derivato che comprende il filo indotto $II$, il galvanometro $G$, una cassetta di resistenza $S$ ed i fili di congiunzione.

Quando s'osserva l'indotta (fig. 2), il circuito secondario è costituito dai medesimi conduttori che dianzi formavano i due rami di derivazione fra $A$ e $B$: e cioè del campione $x$, e dal galvanometro $G$ col filo indotto $II$ e cogli accessori $S$. — Basta sostituire a questo fascio un conduttore $y$ equivalente fino ad $^1/_{25}$, perchè la resistenza del circuito primario, mentre esercita l'induzione, sia uguale a meno di 0,0001 a quella che presentava all'atto della misura dell'inducente.

Un interruttore acconcio $C_1$, $C_2$ permette di mandare nel galvanometro, in rapida successione, una serie di correnti indotte tutte di chiusura, oppure tutte d'apertura; cosicchè l'ago assuma la medesima posizione che aveva quando circolava nel galvanometro la derivazione della corrente inducente. Si conta il numero esatto delle interruzioni che devono effettuarsi al secondo per raggiungere questo intento: ed un tal numero, moltiplicato pel coefficiente d'induzione mutua dei due sistemi inducente ed indotto, esprime senz'altro in misura assoluta la resistenza del campione sottoposto ad esame.

Invece dei due soliti rocchetti, io vagheggiava l'idea di adoperare un solenoide neutro, col quale fosse concatenato un certo numero di volte il circuito indotto; perchè l'espressione del potenziale mutuo sarebbe riuscita quanto mai semplice, e le lunghezze da misurare sarebbero state tre sole. Ma mi sono lasciato spaventare da chi riteneva insormontabili le difficoltà meccaniche per costruire un anello di sufficiente grandezza colla precisione voluta: ed ho avuto ricorso ad un grande cilindro, sul quale è avvolto uniformemente un solo strato di filo di rame sottile e senza veruna rivestitura. Questo è il mio sistema inducente, del quale posso determinare le dimensioni con tutta l'esattezza desiderabile. Il sistema indotto è un rocchetto in bronzo, che abbraccia il cilindro, e sul quale ho avvolto del filo di rame rivestito di seta, non mancando di prendere le più minute precauzioni, sebbene, nel caso mio, un errore commesso nella misura di questo sistema indotto abbia un'influenza affatto secondaria sul risultato finale.

Se il cilindro fosse di lunghezza infinita, il suo potenziale sul rocchetto che lo circuisce sarebbe, come si sa:

$$M = \pi^2 D^2 n N,$$

ove $D$ è il diametro del cilindro, $n$ il numero delle spire che ne ricoprono l'unità di lunghezza ed $N$ il numero totale delle spire sul rocchetto indotto. Pel caso della lunghezza finita, il potenziale è più complicato; ma l'ho ricavato espresso in funzioni sferiche dalle formole contenute nel trattato di Maxwell: e d'altro canto ne ho potuto ottenere facilmente l'espressione per integrali ellittici, mercè la squisita gentilezza colla quale il Professore Kirchhoff mi ha favorito un manoscritto che faceva parte della sua Memoria sulla determinazione della costante di Neumann; ma che non è stato pubblicato insieme col resto negli Annali di Poggendorff. I calcoli numerici, condotti da me e dal sig. Heydweiller, sull'una e sull'altra formola, hanno dato risultati identici.

Riservo ad un'ulteriore comunicazione le formole, i disegni degli apparati e tutti i minuti particolari delle mie determinazioni, senza di cui nessuno potrebbe assegnare il grado di fiducia che meritano. Ora, nella ristrettezza del tempo, devo accontentarmi d'un cenno alla sfuggita. Comincierò dagli apparati.

Il **cilindro inducente** è del miglior marmo di Carrara, ha la lunghezza complessiva di circa $127^c$; ma è coperto di filo solamente per un tratto di $116^c,7$: ha il diametro medio di $30^c,9588$. È stato tornito sotto i miei occhi, e colla cooperazione attivissima del Dott. Stefanini, superando difficoltà non lievi per ottenere, a forza di tentativi e di misurazioni, che in tutta la lunghezza la differenza fra il diametro massimo ed il diametro minimo non superasse $0^{mm},06$. Si è dovuto pensare poi a congegni adatti per trasportare ed orientare opportunamente questa mole di $260^{kg}$ senza toccarla punto sulla superficie tornita, la quale si era inzuppata con una soluzione limpida di paraffina nell'essenza di trementina.

Ho stimato indispensabile indagare le **proprietà magnetiche del cilindro** di marmo, tanto più che è qua e là leggermente macchiato. A tal fine mi sono costruito una bilancia d'induzione, composta di due paia di rocchetti fra loro uguali. Ciascun paio consta d'una ciambella esterna (diametri $39^c,48$ e $35^c,79$) con 140 giri di filo di

rame grosso $1^{mm},9$, ed una interna (diametri $34^c,55$ e $33^c,28$) con 442 giri di filo di $0^{mm},5$. L'altezza comune è di $3^c$.

Una stessa corrente (di circa $^1/_2$ ampère) passava dall'una all'altra ciambella interna per una bussola. Le due ciambelle esterne erano inserite nel circuito d'un galvanometro sensibilissimo e prontissimo, per modo che le forze elettromotrici in esse indotte fossero contrarie. Ma, affinchè si bilanciassero destando nel galvanometro la più piccola deviazione possibile, è stato mestieri aggiungere altri 8 giri ad una delle ciambelle interne, cosicchè essa risultò di 450 giri, mentre l'altra rimase di 442.

L'aggiunta o la sottrazione d'un giro solo produceva una variazione di $136^{mm}$ nella deviazione del galvanometro, in guisa che $1^{mm}$ della scala corrispondeva ad una variazione della forza elettromotrice minore di $^1/_{60000}$.

Un paio restava sempre fisso; mentre l'altro, infilato nel cilindro, veniva portato nei vari punti della lunghezza di questo, o rimosso lontano. Furono 39 i punti esplorati: e le variazioni della deviazione rimasero fra i valori estremi $-1^{mm},2$ e $+0^{mm},9$, essendo negative in 20 casi, positive in 17 casi, nulle in 2 casi. La somma algebrica di tutte queste variazioni fu $7,7 - 9,1 = -1^{mm},4$, indicando che, se mai, il cilindro è paramagnetico; ma non per questo può produrre sul potenziale elettromagnetico un aumento maggiore di $1,4 : 60000 = 0,000024$.

Il **filo inducente** è di rame di $^1/_5$ di millimetro, tutto d'un pezzo per quasi 2 chilometri: ed affinchè avesse per tutto la medesima sezione, abbiamo dovuto farlo passare, qui in gabinetto, attraverso una trafila di rubino; la quale al microscopio non s'è mostrata propriamente circolare, ma si è mantenuta costante. Questo filo è stato avvolto sul marmo, e nello stesso tempo misurato con ogni scrupolo immaginabile, da me medesimo aiutato dal Dott. Stefanini.

Da un grande cilindro di legno, dov'era stato raccolto uniformemente, fu passato poi al cilindro di marmo, sotto tensione costante. Fra i due cilindri rimaneva teso verticalmente un tratto di $9^m$, davanti a tre microscopi muniti di micrometro oculare e fissati ad un muro maestro dell'edificio. Con apposita macchinetta si tracciavano

sul filo dei segni finissimi, che si facevano via via collimare coi reticoli dei microscopi: e che nell'avvolgimento venivano a distribuirsi lungo delle eliche, la cui regolarità faceva fede della regolare distribuzione del filo: e servivano di riprova al numero delle spire, determinato con un contatore applicato all'asse del cilindro.

Il filo di rame, come ho detto, era scoperto: e per isolarne le spire vi si avvolgeva contemporaneamente frammezzo del filo di cotone, perfetto, il quale si dipannava da un rocchetto immerso continuamente nell'essenza di trementina satura di paraffina.

La distanza fra i reticoli dei due microscopi si è misurata esattissimamente, col mezzo d'un **metro campione** della Società Ginevrina, confrontato dal Prof. Pisati col metro campione di Roma. Ed a questo metro sono state riferite tutte le lunghezze.

A correzioni fatte, il **diametro del solenoide**, quale si deduce dalla lunghezza del filo di rame, è . . . . . 30c, 99334;
mentre il diametro medio del marmo, osservato direttamente col catetometro, era di . . . . . 30c, 9588

La differenza . . . . . 0c, 03454
coincide colla grossezza media del filo, la quale fu trovata al microscopio di . . . . . 0c, 0341

Quindi, assumendo pel diametro del solenoide il valore:

$$D = 30^c, 9933,$$

l'errore sarebbe inferiore a $1/_{500000}$: ad ogni modo sempre trascurabilissimo, quantunque il diametro comparisca al quadrato nell'espressione del potenziale.

La **lunghezza del solenoide**, che comparisce nel denominatore di quell'espressione, non si è potuta finora misurare con un' esattezza maggiore di 0c,01, ed è risultata di 116c, 700. Conto però, se non mi mancherà il tempo, di arrivare ad ottenerne l'espressione con una cifra di più.

Il **numero totale delle spire** è 1871 e così:

$$n = \frac{1871}{116,7}.$$

Il **rocchetto indotto** è, come ho detto, di bronzo: e fu ottenuto nell' Officina Galileo dalla fusione di rame galvanico e di stagno Branca. È formato da due parti uguali separate da uno strato d'ebanite: ed è in tutto simile a quei rocchetti che hanno servito a lord Rayleigh per ripetere la determinazione fatta dall'Associazione Britannica. È verniciato colla gommalacca, ed ha la sponda solcata da una fenditura foderata di ebanite, per la quale passano i capi del filo. Finora vi sono avvolti due fili soli, rivestiti di seta bianca, entrambi grossi $1^{mm}$. Il più interno è coperto di seta una sola volta, ed è stato inzuppato con essenza di trementina satura di paraffina: vi forma sei strati alternativamente di 77 e di 78 giri, così che in tutto ha 465 spire. Il suo diametro medio fu dedotto, come pel solenoide inducente, sì dalla lunghezza del filo, come anche mediante il catetometro, ed è di $40^c,540$, con un'esattezza esuberante, perchè entra nella formola come termine di correzione. L'altezza media di questo rocchetto, ossia la distanza media fra gli assi dei fili estremi, è di $8^c,383$. Il secondo filo non è stato inzuppato di paraffina, ma è doppiamente coperto di seta bianca: occupa altri sei strati, formando un secondo rocchetto di 432 spire, alto $8^c,428$, col diametro medio di $41^c,759$.

I quattro capi di questi due conduttori sono assicurati ad acconci serrafili, talchè si possono adoperare o separatamente od in congiunzione.

All' atto dell' avvolgimento non si è mancato di esaminare se la resistenza si manteneva quale era richiesta da un buon isolamento.

Il cilindro riposa sopra un tripode di legno ed ottone, con robuste viti di livello per metterlo in posizione verticale. Il rocchetto indotto vi è infilato, e può venir fissato a varie altezze, allivellato ed orientato da apposite viti a scrupolo. Tutto il sistema è racchiuso in una vetrina, nel costruire la quale si è evitato tutto ciò che potesse esercitare un'azione magnetica.

Il potenziale del cilindro sul primo rocchetto, posto a metà altezza si è calcolato, nel modo indicato dianzi, di

$$669133 \times 10^2 \qquad C.\ G.\ S.$$

Quello del cilindro medesimo sul secondo rocchetto, collocato come sopra, di

$$619666 \times 10^2 \qquad C.\ G.\ S.$$

E l'errore relativo di questi numeri credo che non superi gli 0,00008.

Dei cordoni a sette capi di filo di rame con grosso involucro di guttaperca congiungono i vari apparati, sono per ogni dove accoppiati e ritorti, così che non esercitino veruna azione elettrodinamica; e sono sospesi per mezzo di fili di guttaperca.

I commutatori sono tutti di rame e mercurio sull' ebanite, tirata a pulimento speculare; meno uno, che ha i pozzetti di porcellana ben lavata ed asciutta, ed appoggiata sulla paraffina.

Il **galvanometro** è del modello di Magnus, costruito da O. Plath di Berlino; ma i suoi rocchetti sono stati avvolti qui di nuovo: in tutto constano di 804 spire e presentano la resistenza di circa 11 ohm. Il sistema astatico dei due aghi è stato qui pure modificato, ed impiega 17 secondi a fare un'oscillazione completa. Lo smorzatore di rame agisce mediocremente.

La scala col cannocchiale è distante dallo specchietto $6^m$: e nulla di meno vi si possono apprezzare bene i decimi di millimetro. Le deviazioni utilizzate non sono mai state inferiori a $74^c$; e venivano moderate mediante la cassetta di resistenza $S$, inserita nel ramo del galvanometro.

La **pila** era composta di elementi Daniell (da 1 a 20, secondo i casi), colle due soluzioni della densità 1,15, rinnovate ogni giorno, e collo zinco ogni giorno rimalgamato. Il solfato di zinco era stato bollito col carbonato e ne teneva sempre in sospensione.

La corrente che circolava nel solenoide inducente (di circa 352 ohm), ha avuto intensità diverse: da 0,001 a 0,1 di ampère.

Talvolta la pila veniva chiusa da un filo metallico, così che si mandava nel solenoide una corrente derivata. Più spesso vi si man-

dava la corrente totale, indebolita o no da una resistenza $R$ aggiunta alla pila.

Un commutatore è applicato alla pila, uno al galvanometro, uno al rocchetto indotto: e si adoperano colla vicenda più acconcia per eliminare, se mai vi fosse, l'effetto di qualsiasi dissimmetria.

**L'interruttore** si trova in un'altra stanza, lontano dal galvanometro sul quale non esercita azione di sorta. È infitto in un blocchetto di pietra, murato nel suolo. È formato da due robuste leve di rame: una $C_1$ pel circuito inducente, l'altra $C_2$ per l'indotto: entrambe hanno ad un estremo un martelletto di rame amalgamato, che è premuto fortemente da tre molle contro un piano sottostante, pure di rame amalgamato. Sotto al fulcro le leve hanno un' appendice che pesca continuamente in un pozzetto di rame contenente mercurio. Ai loro estremi liberi agiscono due eccentrici fissati sopra un asse comune e che operano due (talvolta quattro) interruzioni ad ogni rivoluzione. Spostando i due eccentrici, si possono raccogliere le correnti di chiusura ed escludere quelle d' apertura, o viceversa.

La resistenza di questo apparato si può dire propriamente nulla.

In sulle prime dei pozzetti a mercurio, sostituiti poi da forti morsette $m_1$, $m_2$ di rame amalgamato (perchè il mercurio spruzzava spesso per effetto del tremore), servono a mantener chiusi, all'occorrenza, i due circuiti, nel mentre che i martelletti picchiano furiosamente sulle loro incudini.

Un **idromotore** Schmid, a due cilindri, fa ruotare, mediante una corda tenuta in tensione costante, l'albero degli eccentrici: ed affinchè il moto sia abbastanza regolare ho dovuto munire quest' albero di due volani del peso complessivo di $58^{kg}$ e del diametro di $80^{c}$: ed inoltre di una ruota a grandi ali.

Un freno, applicato direttamente alla ruota dell'idromotore, serve a graduare la velocità, la quale è accusata approssimativamente da un tachimetro di Schäffer e Budenberg.

M'era prefisso di mantener costante la velocità coll'artificio usato da lord Rayleigh, o mercè la ruota fonica di Poul La Cour, che posseggo; ma finora, preoccupato di continuo dalla ristrettezza del tempo, non vi sono riuscito. E tale malaugurata preoccupazione m'ha sempre fatto procedere per via di compensi e di spedienti, rendendo doppiamente faticoso ed incerto il mio lavoro.

Per determinare il numero delle correnti indotte, che dovevano passare al secondo nel galvanometro, a fine di produrvi una data deviazione, mi sono valso finora di un **cronografo** Hipp con tre elettrocalamite. Una è comandata da un interruttore apposito, applicato all'asse degli eccentrici, ed isolato da tutto il resto. La seconda funziona sotto l'azione diretta dell'orologio astronomico n.° 96 di F. Gutkaes in Dresda, collocato nella specula del R. Istituto geografico militare, e comunicante col mio Laboratorio per mezzo d'una linea telegrafica di 210$^{m}$. La terza obbedisce ad un tasto prossimo al cannocchiale d'osservazione, e segna un punto allorchè la deviazione del galvanometro è quella desiderata.

L'intervallo corrispondente ad un secondo ha variato sulla zona dai 7 agli 8$^{c}$. Si misurano due tratti: uno di 10$^{s}$, l'altro di 20$^{s}$, che comprendano nel mezzo il punto impresso dalla terza elettrocalamita: e si prende il valor medio delle due letture, la cui differenza non arriva mai ad $^{1}/_{1500}$. Talchè si può ritenere che l'errore di questa determinazione non oltrepassi per ciascun numero i 0,0005: e viene poi notevolmente attenuato col ripetere le osservazioni e col prenderne le medie.

L'orologio ha un buon andamento, avanza di circa mezzo secondo al giorno sidereo: quindi per passare al tempo medio solare basta senz'altro accrescere il risultato finale di 0,00273. Il lato debole è la maniera in cui vien chiusa la corrente; perchè il contatto si stabilisce fra un filino di platino portato dal pendolo ed una gocciolina di mercurio.

In generale, non sono ancora pienamente contento nè di questo modo di contare le correnti indotte, che è troppo lungo e tedioso; nè del motore Schmid, che non ha l'andamento regolare che vorrei: e, se

sarà il caso d'insistere in queste ricerche, migliorerò questi due punti. Ma ad ogni modo credo che, anche così come stanno ora gli apparati, sul mezzo millesimo ci si possa contare con piena fiducia.

Un'altra circostanza, per me ben dolorosa, ha reso incerte delle lunghe serie d'esperienze. La mia stanza da lavoro è spaziosa, a pian terreno, molto stabile, esposta a tramontana; ma è contigua col laboratorio di chimica: cosicchè ho la disgrazia d'avere per vicino il Prof. Ugo Schiff. Il quale (pare incredibile!) è andato portando qua e là dei lunghi pezzi di ferro, sebbene m'avesse promesso formalmente di astenersene. Ed ora che, con questa denunzia pubblica, ho inflitto allo Schiff la pena che merita, passo a dire succintamente come si fanno le osservazioni.

Ogni giorno, prima di principiare, si riamalgamano i martelletti dell'interruttore, si prova se i contatti sono perfetti e, mediante il cronografo, si prende il tracciato delle aperture e chiusure operate dai martelletti dell'inducente e dell'indotto, per verificare se la posizione relativa degli eccentrici è la migliore.

Fatto ciò, si dà all'interruttore, guardando il tachimetro, una velocità che poco si scosti dalla normale. Poi si mettono le morsette $m_1$, $m_2$ (fig. 1) affinchè il circuito resti chiuso costantemente in ogni punto: e si legge la deviazione definitiva dovuta alla derivazione dell'inducente. In seguito si levano le morsette, si effettua la commutazione atta a mandare nel galvanometro le correnti indotte: e con appropriati segnali si dànno gli ordini al meccanico che rallenti o stringa il freno, che dia la via alla carta del cronografo, ecc. ecc. Quando la velocità dell'interruttore, e perciò la posizione del galvanometro, variano lentamente, si fanno tre letture alla distanza di circa $3^{mm}$ della scala, scegliendole in guisa che la seconda coincida colla deviazione prodotta in precedenza dalla corrente inducente. In fine si rimettono le morsette e si ripete la lettura dell'inducente.

Così è compiuto un gruppo d'osservazioni: e per ciascun gruppo si legge il termometro a decimi di grado (apprezzando i centesimi), che si trova infilato nel campione di resistenza, il quale è in un grande bagno d'acqua, fasciato di feltro.

Dopo aver misurato il tracciato del cronografo in corrispondenza

ai tre punti, si fa il calcolo ammettendo che le intensità delle correnti siano proporzionali alle deviazioni, il che è permesso fra limiti così ristretti: e dei tre numeri ricavati, si prende la media. Sei di queste medie (tre per velocità crescenti e tre per velocità decrescenti) costituiscono di solito una serie d'osservazioni, che si può fare in un'ora e mezzo, quando tutto va bene. Ma è difficile compiere più di due serie al giorno, se si vogliono eseguire i computi sul nastrino del cronografo e condurre a termine anche i calcoli relativi.

Le medie finali delle singole serie dovrebbero coincidere a meno del decimillesimo. E pure m'è forza confessare che ciò s'è verificato ben di rado. Nel primo mese d'osservazioni la cosa era giustificabile; perchè non conosceva ancora a pieno l'importanza delle varie cause perturbatrici. Ma in seguito le divergenze, sebbene minori, mi hanno dato molto da pensare.

E qui sarà opportuno enumerare le cause d'errore. Prescindendo da un errore costante nella determinazione del coefficiente d'induzione mutua, che è molto improbabile, citerò prima le varie cause che tendono ad assegnare un valore troppo piccolo alla resistenza del campione, e poi quelle che agiscono in verso opposto.

Si tenga presente la formola

$$x = \frac{M}{1 + ct} h \frac{\alpha}{\beta}$$

dove $x$ è la resistenza assoluta che avrebbe a 0° il campione, $ct$ è la correzione per la temperatura, $M$ il coefficiente d'induzione quale è dato dal calcolo, $\alpha$ la deviazione del galvanometro per effetto dell'inducente, $\beta$ quella, pochissimo diversa, determinata da $h$ correnti indotte al secondo. — E si vedrà che tendono a dare un numero troppo piccolo:

1° Il paramagnetismo del solenoide, per cui il coefficiente reale d'induzione sarebbe maggiore di $M$;

2° La polarizzazione della pila, la quale sarebbe più intensa nella chiusura permanente che dà $\alpha$, che non quando viene periodicamente aperta per determinare $\beta$;

3° Il calore svolto nel solenoide, che del pari tende ad indebolire la corrente primaria più quando vien misurata, che quando esercita l'induzione;

4° Lo smorzamento delle oscillazioni durante il moto ritardato che allora tende a mantenere $\beta$ più grande del dovere;

5° Il magnetismo indotto negli aghi del galvanometro, se è il più debole che si trova fra le spire; perchè questo, deviando, verrà più rinforzato dell'altro: e più rinforzato dalle correnti d'induzione che dalla corrente costante;

6° Il paramagnetismo della materia compresa fra le spire e l'ago del galvanometro, il quale, crescendo meno rapidamente della intensità della corrente, eserciterà la sua azione protettrice più per l'inducente che per l'indotta, rimpiccolendo $\alpha$ rispetto a $\beta$.

Tendono a dare un numero troppo grande:

7° Le sostanze paramagnetiche comprese fra il solenoide ed il rocchetto secondario; perchè funzionerebbero come schermo, e però il coefficiente $M$ sarebbe maggiore del vero;

8° Il calore svolto dalla corrente nella derivazione della pila, nei casi che non si utilizza tutta la corrente: maggiore quando l'inducente vien misurata, che quando esercita l'induzione; per cui $\alpha$ viene ad aumentare;

9° Il calore Joule svolto nel campione senza che abbia agio di trasmettersi al termometro; perchè aumenta $\alpha$ e fa scemare $\beta$. E così pure il calore Peltier, tendente a destare una corrente termoelettrica che si somma colla derivazione dell'inducente, e si sottrae dall'indotta;

10° Lo smorzamento delle oscillazioni quando la velocità va crescendo;

11° Il magnetismo indotto negli aghi del galvanometro, se quello compreso fra le spire comanda sull'altro;

12° Il difetto d'isolamento, come bene accentua Lord Rayleigh.

La causa 1ª temo che non sia stata considerata abbastanza dai miei predecessori; talchè mi sorge il dubbio che i loro numeri possano essere, per ciò, alquanto al di sotto del vero. Nel caso mio ho

mostrato come non debba esercitare influenza sensibile. -- Così pure ritengo che sia della causa 7ª, non tanto perchè ho impiegato rame elettrolitico nella fusione del rocchetto, quanto perchè col circuito indotto più esterno non ho ottenuto numeri maggiori che coll'interno, quantunque, come si sa, tutto il *filo* di rame contenga del ferro. Ma, per acquistare la piena fiducia su questo punto, mi riservo a fare la riprova suggerita da F. Kohlrausch, determinando per mezzo d'una bussola delle tangenti il potenziale magnetico dell'inducente e dell'indotto, e confrontandolo col potenziale calcolato. La mancanza di tempo me l'ha impedito finora.

L'effetto prodotto dalla polarizzazione della pila (2ª), o del conduttore troppo sottile che la chiude (8ª), ho avuto campo di constatarlo, e me ne sono schermito in seguito.

Il calore svolto nel solenoide, come quello svolto nel campione, (3ª e 9ª) non può esercitare influenza dannosa; perchè, avendo io adoperato ordinariamente delle correnti di $^1/_{100}$ d'ampère, esso è irrilevante: e sarebbe pure trascurabile nei pochi casi in cui ho spinto l'intensità della corrente fino ad $^1/_{10}$ d'ampère.

Quando la velocità varia lentamente, non si riscontra nessuna differenza fra i risultati delle osservazioni fatte durante il moto accelerato o ritardato, cosicchè cessa qualsiasi preoccupazione sul punto 4° e 10°.

Non ho potuto nemmeno constatare differenza alcuna, sia orientando il galvanometro in modo che l'ago fosse parallelo alle spire a circuito aperto, sia che vi venisse condotto dalla corrente. Dunque nemmeno il magnetismo indotto negli aghi, contemplato sotto i numeri 5° e 11°, non produce errore nel mio caso.

Per verificare se lo smorzatore di rame ed il filo stesso del galvanometro influiscano veramente (6°) in maniera sensibile, sto preparando un secondo galvanometro collo smorzatore ad aria. Ma, se questa causa d'errore può essere molto influente osservando le deviazioni impulsive, nel caso mio ha importanza di gran lunga minore: ed anzi ritengo che sia perfettamente trascurabile se penso all'estrema debolezza delle correnti che passavano pel mio galvanometro (da 0,0001 a 0,00001 di ampère), per le quali il magnetismo indotto è probabilmente proporzionale all'intensità delle correnti stesse.

L'isolamento imperfetto (12°), quale può derivare, per esempio, da un poco di polvere sull'ebanite, ecc., mi ha dato sempre numeri troppo grandi: e non è mai esagerato lo scrupolo col quale si bada a questo particolare. Ciò non di meno non mi pare che gli si debba dare una importanza esclusiva, preferendo senz'altro i numeri minori ai maggiori.

Ho fatto le esperienze prendendo via via pel ramo $x$ (fig. 1) quattro diversi **campioni di resistenza.**

*a)* Una copia dell'unità britannica, costruita da Elliott Brothers, e procuratami gentilmente da Lord Rayleigh col certificato del laboratorio di Cambridge dal quale appare che « addì 21 novembre 1883 il n. 95 di Elliott alla temperatura di 15°,3 C., aveva il valore di 0,99977 B.A.: ed alla temperatura di 10°,1 C. il valore di 0,99813 B.A.: e quindi, fra questi limiti di temperatura, il coefficiente 0,00031 per 1° C. ».

*b)* Una unità Siemens, cedutami ultimamente da Siemens e Halske coi seguenti dati del Dott. O. Frölich: « Il valore del rocchetto normale 1'.. è, a 20° Celsio, di 1,00014 unità Siemens; col coefficiente 0,00036 per 1° C. -- Berlino, 2 novembre 1883 ».

*c)* Un rocchetto Strecker, portante il n. 20 ed equivalente a $1^m$,00130 di mercurio, quand'è alla temperatura di 10°,0 C. Coefficiente medio 0,000655 per 1° C.

*d)* Un rocchetto n. 22 della resistenza, a 10°,0 C., di $0^m$,48026 di mercurio. Coefficiente medio 0,000655 per 1° C.

Questi due rocchetti, colle relative indicazioni, mi sono stati favoriti dal Dott. K. Strecker, assistente del Prof. F. Kohlrausch, il quale li ha confrontati direttamente colle sue colonne di mercurio, a Würzburgo dal 13 al 16 dicembre 1883.

Nel laboratorio di Firenze i rocchetti *a*, *b*, *c* sono stati confrontati fra di loro dal sig. Heydweiller col mezzo del ponte che ha servito a Siemens per la riproduzione della sua unità: ed ecco i rapporti fra l'unità dell'Associazione Britannica e la colonna di mercurio, a 0°, lunga $1^m$ e della sezione di $1^{mm2}$

$$(a, b)\ \text{Siemens} \begin{cases} 1^m \text{ di mercurio} = 0{,}95363 \text{ B. A.} \\ 1 \text{ Unità B. A.} = 1{,}04862 \text{ Unità Siemens.} \end{cases}$$

$$(a,\ c)\ \text{Strecker}\begin{cases} 1^{m}\ \text{di mercurio} = 0{,}95366\ \text{B. A.} \\ 1\ \ \text{Unità B. A.} = 1{,}04859\ \text{di mercurio.} \end{cases}$$

Mi sono valso di questi rapporti per rendere fra loro paragonabili le determinazioni fatte mettendo al posto di $x$ (fig. 1ª) successivamente i rocchetti *a, b, c, d.*

Or bene, senza contare le prove preparatorie: dal 12 gennaio al 30 marzo ho potuto fare delle determinazioni in 50 giorni; perchè gli altri sono andati impiegati a sistemare od a migliorare gli apparati. In questi 50 giorni ho eseguito non meno di 380 gruppi, da tre osservazioni l'uno, distribuiti in 74 serie, ricorrendo a diverse forze elettromotrici, ad intensità diverse di corrente, a velocità diverse dell'interruttore, adoperando come rocchetto indotto ora l'interno, ora l'esterno, ora entrambi riuniti insieme; ora valendomi dell'induzione alla chiusura, ora all'apertura.

Se, senza preoccuparmi del numero che dànno, elimino quei gruppi i quali evidentemente sono stati influenzati da qualcuna delle cause perturbatrici sopra citate, e quelle serie che (per l'instabilità del galvanometro, procuratami dal Prof. Schiff) sono riuscite irregolari, rimangono pur sempre 197 gruppi appartenenti a 35 serie distinte, a quali non saprei davvero attribuire pesi differenti.

Tutte le medie di queste 35 serie, spingendo pure la modestia molto più in là del dovere, prevedevo che concordassero fra loro almeno sino al mezzo millesimo: ed invece presentano delle differenze che salgono ai quattro millesimi! — Talchè ricaverei tanti valori distinti partendomi da Wild e arrivando fino ad H. Weber di Braunschweig, dopo essermi incontrato in Rowland, in Kohlrausch e, per una volta sola, anche in Lord Rayleigh, quand'egli lavorava con Schuster. E, per quanto io abbia fatto e riflettuto, non mi è riuscito di trovarne la cagione. Numeri ottenuti in condizioni disparatissime coincidono spesso; numeri derivanti da condizioni, che mi parevano perfettamente identiche, presentano spesso le discrepanze maggiori.

È tale lo studio da me posto in questa questione, che, se non temessi di peccare d'irriverenza, sarei tentato a pensare che anche

gli altri sperimentatori si sarebbero forse imbattuti in disaccordi analoghi, qualora avessero esagerato, come me, il numero delle loro osservazioni.

Fra tanta incertezza mi pare d'intravedere una cosa sola: ed è che i numeri, esprimenti la resistenza assoluta d'un campione, vadano via via diminuendo da un giorno all'altro, se nulla si cambia nel circuito secondario: e che riescano invece maggiori, allorchè entri a far parte di quel circuito un conduttore che non abbia servito in precedenza, oppure che da molti giorni sia rimasto inoperoso. Direi quasi che i fili di rame hanno bisogno d'abituarsi a condurre una successione rapida di correnti indotte. — Ma, per quanto un tal fatto possa armonizzare con altri fatti già noti, sento la necessità, prima di darlo come certo, d'intraprendere una lunga serie di esperienze opportunamente coordinate, e rivolte a questa mira.

Oggi, per finire la presente relazione preliminare, riferisco il valor medio ricavato dalle 591 osservazioni tenute per buone, come se le discrepanze (cosa inverosimile) fossero meramente fortuite.

Con le precedenti riserve, troverei:

$$1 \text{ B. A} = 0{,}99024 \text{ Ohm}$$

oppure:

$$1 \text{ Unità Siemens} = 0{,}94432 \text{ Ohm}$$

ossia:

$$1 \text{ Ohm} = 1^{m}{,}05896 \text{ di mercurio.}$$

Il così detto errore probabile di questo risultato finale sarebbe di 0,000076; il quale, sommato coll'errore costante possibile 0,000 08 (da cui è ancora affetto, come dissi, il coefficiente d'induzione mutua), diverrebbe:

$$\pm\ 0{,}00016.$$

Firenze, 4 Aprile 1884.

Il Socio Maggiore Professore F. Siacci presenta il seguente lavoro del sig. Dott. Enrico Novarese, Assistente alla Cattedra di Meccanica razionale nella R. Università di Torino,

# SULLE ACCELERAZIONI

## NEL MOTO DI UNA FIGURA PIANA NEL PROPRIO PIANO.

Data una retta mobile in un piano, è noto che le direzioni delle velocità de' suoi punti, per una posizione qualunque di essa, inviluppano una parabola (*). Tale proprietà si può estendere alle accelerazioni, cioè si può stabilire un teorema per le accelerazioni di ordine qualsivoglia, del quale la proposizione ricordata sia caso particolare quando si consideri la velocità come accelerazione di ordine zero. Il teorema poggia sul fatto che, ad un medesimo istante, è uguale per tutti i punti di una figura piana mobile nel proprio piano l'*angolo dell'accelerazione* (**), designando con tal nome l'angolo che la direzione dell'accelerazione (per un dato istante) di un punto qualsiasi fa con il raggio che lo unisce al centro delle accelerazioni (relativo a quell'istante). Enuncio senz'altro il teorema in discorso:

*Le direzioni delle accelerazioni dei punti di una retta mobile in un piano inviluppano una parabola che ha per fuoco il centro istantaneo delle accelerazioni e per tangente nel vertice la direzione dell'accelerazione del punto della retta, pel*

(*) V. Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, 2te Aufl., I. Bd., pag. 222.

(**) *Accelerationswinkel* (Dahlander); *Beschleunigungswinkel* (Rittershaus, Burmester).

Qui ed in seguito « accelerazione » sta sempre per « accelerazione di ordine $n$ ».

*quale quest'accelerazione è minima. La parabola tocca la retta in quello de' suoi punti, del quale l'accelerazione è disposta lungo la retta stessa.*

Se, in particolare, si considerano le accelerazioni di ordine zero, cioè le velocità, l'angolo dell'accelerazione riesce retto, il centro delle accelerazioni diviene il centro istantaneo delle velocità (o di rotazione), ecc., e si trova la proposizione conosciuta su mentovata.

Il teorema esposto conduce ad alcune conseguenze che, sebbene affatto ovvie, mi paiono meritevoli d'esser notate. Abbiasi una figura piana di forma invariabile mobile nel proprio piano: se si considerano le $\infty^1$ parabole corrispondenti alle rette della figura che passano per un punto, si ha quest'altra proposizione:

*Quando un fascio di rette si muove nel proprio piano, le direzioni delle accelerazioni dei punti de' suoi raggi inviluppano una schiera di parabole omofocali nel centro* C *delle accelerazioni ed aventi per tangente comune la direzione della accelerazione del centro del fascio.*

E si dimostra assai facilmente che:

*I vertici di queste parabole stanno sopra la circonferenza di un cerchio costrutto sulla distanza di* C *da quella tangente comune come diametro.*

Gli assi di tutte le parabole della schiera, le tangenti nei loro vertici, e le direzioni delle accelerazioni de' vertici stessi (*) formano tre fasci di rette, ognuno dei quali è congruente al fascio mobile considerato ed ha il centro sulla detta circonferenza.

Si vede così che ogni retta della figura mobile dà luogo ad una parabola avente il fuoco in $C$, e che ogni punto dà luogo ad un circolo passante per $C$. Considerando il sistema mobile come piano rigato e come piano punteggiato, ne segue che:

*Le direzioni delle accelerazioni dei punti di una figura piana mobile comunque nel proprio piano individuano un tessuto di parabole aventi il fuoco nel centro delle accelerazioni, ed una rete di circoli passanti per questo centro.*

---

(*) È manifesto che « le direzioni delle accelerazioni dei punti di un sistema piano, i quali giacciano sopra un circolo passante pel centro delle accelerazioni, concorrono in un punto di questo circolo ». Burmester, *Ueber den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme* (Hartig's Civilingenieur, Bd. XXIV, p. 153).

Nel tessuto sono contenute $\infty^2$ schiere di parabole corrispondenti agli $\infty^2$ fasci di rette esistenti nel piano. Due schiere qualunque hanno una parabola comune, che è quella relativa alla congiungente i centri dei due fasci corrispondenti: e questa parabola medesima appartiene ad $\infty^1$ schiere. Nella rete sono contenuti $\infty^2$ fasci di cerchi corrispondenti alle $\infty^2$ punteggiate esistenti nel piano. Due fasci qualunque hanno un cerchio comune, che è quello relativo al punto d'intersezione delle due punteggiate corrispondenti: questo circolo stesso appartiene ad $\infty^1$ fasci. In ogni schiera esiste una parabola che degenera in una coppia di punti, ed è quella relativa al raggio del fascio corrispondente passante per $C$: essa si riduce al punto $C$ ed al punto all'infinito comune alle direzioni delle accelerazioni di tutti i punti di quel raggio. In ogni fascio di cerchi ne esiste uno che degenera in una coppia di rette, ed è quello relativo al punto all'infinito della punteggiata corrispondente: esso si riduce all'asse radicale del fascio ed alla retta all'infinito. Ogni circolo della rete è il luogo dei vertici delle parabole di una schiera; e, dualmente, ogni parabola del tessuto è l'inviluppo delle tangenti ai circoli di un fascio nel punto diametralmente opposto al punto $C$.

Quanto precede è detto nell'ipotesi che la figura mobile sia di forma invariabile; ma esige soltanto l'esistenza del centro delle accelerazioni e l'uguaglianza pei varî punti della figura dell'angolo dell'accelerazione. Per conseguenza, siccome queste condizioni sono soddisfatte anche quando la forma del sistema mobile varii mantenendosi simile a sè stessa (*), i risultati stabiliti sussistono in questo caso più generale.

Torino, Febbraio 1884.

(*) Schell, op. cit., I. Bd., p. 574.

Il Socio Comm. Prof. Angelo GENOCCHI presenta, a nome del Principe Baldassarre BONCOMPAGNI, un opuscolo estratto dal *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*, dal medesimo pubblicato, col titolo seguente: *Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connait une première valeur approchée:* Memoire inédit de J.-A.-N.-CARITAT, Marquis de CONDORCET, publié avec une *Notice sur sa vie et ses écrits mathématiques* par M. Charles HENRY.

A nome dell'Autore sig. Carlo LE-PAIGE, Professore di Geometria superiore nell'Università di Liegi, presenta ancora i seguenti opuscoli stampati:

1° *Sur les involutions cubiques;*
2° *Sur les involutions biquadratiques;*
3° *Sur les courbes du quatrième ordre.*

**Adunanza del 27 Aprile 1884**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. P. RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio Cav. Prof. Andrea NACCARI presenta e legge la seguente Nota del sig. Dottore G. GUGLIELMO, Assistente alla Cattedra di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino,

# INTORNO AD ALCUNE MODIFICAZIONI

DELLE

# POMPE PNEUMATICHE A MERCURIO.

Fino a qualche anno fa la produzione di rarefazioni alcun poco superiori a quella di $1^{mm}$ di mercurio era cosa che non si poteva ottenere se non con mezzi speciali, che potevano essere a disposizione di pochissimi, e con grandissime cure.

Grazie alla pompa a mercurio di Töpler ed alle sue modificazioni, e specialmente nella forma datale dal Bessel-Hagen riesce invece facile di ottenere oggidì, anche senza molte cure, rarefazioni grandissime, che hanno solo per limite la tensione del vapore di mercurio.

Un inconveniente di queste pompe sta nella loro fragilità, diminuita ma non eliminata nella pompa citata del Bessel-Hagen, per cui un momento di distrazione in chi fa il vuoto, un' irregolarità nel movimento del corsoio che sostiene il recipiente mobile, potrebbe esser causa della rottura dell'apparecchio, non facile ad accomodare: ne consegue inoltre una grande lentezza nell'operazione.

Sono riuscito ad ottenere, senza il menomo pericolo di rotture e con molta prontezza e facilità, le rarefazioni occorrenti

per la produzione dei noti fenomeni di Hittorf e Crookes nel passaggio delle scariche elettriche nei gas rarefattissimi, e tali anche da impedire il passaggio della scarica con una comune pompa di Geissler ad una chiavetta, costruita da me. Anzitutto invece delle solite chiavette a tre vie ho usato la chiavetta che vedesi rappresentata in *C* (pag. 5). Essa trovasi al punto di congiunzione dei tre rami di un tubo a *T*; una scanalatura nella superficie del maschio, o meglio un foro nell'interno di esso serve a porre il tubo inferiore in comunicazione con quello a destra o con quello a sinistra, ossia il recipiente fisso della pompa con quello in cui si vuol fare il vuoto o coll'atmosfera.

Questa chiavetta ha il vantaggio non piccolo che l'interstizio fra le due superficie smerigliate non mette nell'atmosfera che da un lato, e l'entrata dell'aria pel medesimo si impedisce facilmente adattando alla parte superiore della chiavetta un tubo un po' largo di gomma elastica o di vetro in cui si versa del mercurio. In tal modo potei ottenere abbastanza rapidamente le rarefazioni alle quali si producono i fenomeni suddetti.

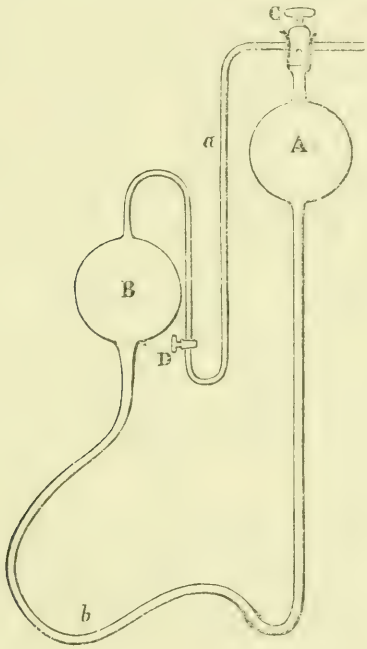
Un ulteriore vantaggio si ha usando un recipiente mobile uguale all'incirca a quello fisso e facendo comunicare il primo col tubo d'efflusso del secondo mediante un tubo di gomma elastica a pareti un po' spesse e a foro sottile.

In tali condizioni, supponiamo la rarefazione giunta ad un certo grado p. es. di qualche millimetro di mercurio, ed il recipiente mobile al basso della sua corsa e quindi pieno di mercurio; sollevando questo recipiente il mercurio in esso si abbassa generandovi un vuoto più o meno perfetto e la piccola quantità d'aria che si trova nel recipiente fisso, e che viene scacciata dal mercurio, viene ad espandersi in questo vuoto, conservando una pressione sempre assai piccola. Così se un po' d'aria rimanesse aderente alle pareti del recipiente fisso, essa si troverebbe ad una pressione assai piccola ed essendo il suo volume minimo riesce trascurabile.

Come vedesi, non è altro che il principio della chiavetta di Babinet applicata alla pompa di Geissler, ciò che si effettua molto facilmente, giacchè la chiavetta a tre vie in quest'ultima pompa serve allo scopo per cui fu introdotta nelle macchine pneumatiche a stantuffo la chiavetta di Babinet. Per quanto abbia cercato, non ho trovato che alcuno abbia proposto questa modificazione nè l'abbia applicata, anzi le pompe a mercurio che

m'è stato dato vedere avevano il recipiente molto maggiore di quello fisso, cosicchè era impossibile di applicare con facilità la modificazione che propongo.

Per maggior chiarezza vedesi nella figura rappresentata schematicamente detta pompa. Contro un' asse (omessa nella figura), trovasi fissato il recipiente fisso *A* cui è saldato, secondo il solito, al disotto un tubo di vetro di $80^{cm}$ circa, che in fondo è ripiegato all'insù e congiunto con un largo tubo di gomma elastica a pareti spesse che termina dall'altro capo col recipiente mobile. Questo è sostenuto da una fune piatta che si avvolge o si svolge intorno una manovella collocata in cima dell'asse.




Al disopra del recipiente fisso trovasi saldato il tubo a *T* che ha nel punto di congiunzione dei tre rami la chiavetta *C* che permette di stabilire la comunicazione di *A* col tubo a destra, ossia col recipiente in cui si fa il vuoto, oppure col tubo a sinistra, per cui si fa effluire l'aria che si scaccia. Questo tubo comunica, come si è detto, mediante un tubo di gomma *a* con *B*. Affinchè al sollevare di *B* vi si formi un vuoto possibilmente

perfetto, questo tubo di gomma è lungo circa 1 metro e porta a $20^{cm}$ dalla sommità di $B$ una chiavetta di scaricamento $D$, che può porre $A$ e $B$ in comunicazione fra loro o ciascuno di essi separatamente coll'atmosfera.

Per fare il vuoto in un recipiente si procede nel modo solito; però è da osservare che nel sollevare $B$ si pone la chiavetta $D$ in modo che $A$ e $B$ possano comunicare fra loro, e si solleva $B$ sintantochè il mercurio riempia $A$ ed il tubo di gomma sino alla chiavetta $D$ (ciò è possibile giacchè $D$, a causa della flessibilità del tubo di gomma, trovasi al disotto del recipiente $B$), che allora si gira di $45°$, e si gira $c$ di $90°$ in modo da chiudere il recipiente $A$. Si abbassa allora $B$ ed allorchè si crede che in esso la pressione dell'aria che è compressa dal mercurio che vi penetra sia poco diversa dall'atmosferica, si gira $b$ di altri $45°$ in modo che l'aria di $B$ viene scacciata nell'atmosfera; si continua ad abbassare $B$ finchè il mercurio giunga alla chiavetta $D$ ed allora questa si dispone nuovamente in modo che $A$ e $B$ possano comunicare. Si gira la chiavetta $C$ in modo da porre il recipiente in cui si vuol fare il vuoto in comunicazione col vuoto barometrico di $A$, e quindi si richiude colla chiavetta e si ripete di nuovo l'operazione.

In tal modo dunque l'aria che trovasi in $A$ viene scacciata al di là della chiavetta $D$ nel vuoto che si è formato in $B$, senza che venga compressa, da $B$ poi viene scacciata totalmente nell'atmosfera (salvo il sottile strato che può rimanere aderente alle pareti), cosicchè al sollevare di $B$ vi si forma quasi un vuoto perfetto.

In questa operazione del fare il vuoto sono opportune alcune avvertenze. Allorchè la rarefazione è molto spinta, la pressione dell'aria in $A$ è così piccola, che anche diminuendo il suo volume ad un terzo od un quarto, la sua pressione sarebbe sempre minore di quella che si trova in $B$, ed è quindi opportuno di non stabilire la comunicazione di $A$ con $B$ finchè non si crede che la pressione in $A$ sia press'a poco uguale o maggiore di quella di $B$. — Inoltre il tubo $b$ trovandosi pieno di mercurio questo si opporrebbe all'uscita dell'aria da $A$, quindi è indispensabile a circa metà della corsa di arrestare e sollevare il tubo in modo che il mercurio ne cada in $B$, ciò che avviene assai facilmente non essendovi l'ostacolo dell'aria. Si potrebbe rimediare a ciò usando un tubo largo in modo che il mercurio non vi si trat-

tenesse, ma allora converrebbe avere cura che il mercurio esca da $A$ con continuità in modo da non produrre delle bolle, ciò che non è facile.

Allorchè la rarefazione è un po' spinta non è necessario scacciare da $B$ la piccolissima bolla d'aria ad ogni colpo di pompa, giacchè la sua presenza non fa variare sensibilmente la pressione che si ha in $B$ allorchè esso è in alto; si può lasciare quindi per parecchi colpi la chiavetta $D$ in modo da permettere la comunicazione di $A$ con $B$ e si ha così il vantaggio che la corsa del recipiente mobile è molto limitata riducendosi nel mio caso a circa $20^{cm}$.

Come è noto, il tubo al disotto di $A$ si fa per $76^{cm}$ o più di vetro o ferro invece che di gomma elastica, affinchè i gas che potrebbero sviluppare da questa non vadano in $A$, ed anch' io ho usato un tubo di tal lunghezza; però un tal tubo potrebbe essere con grande vantaggio della semplicità e della trasportabilità della pompa di soli $35^{cm}$, ripiegato un poco all'insù nell'estremità inferiore ed il tubo di gomma di circa 50 o più cm., in tal modo i gas provenienti dalla gomma elastica non potrebbero mai giungere in $A$ neppure quando $B$ si trovasse al disotto della ripiegatura. In questo caso il recipiente $A$ coll'unito tubo potrebbe esser fissato su una tavoletta separata dal sostegno di $B$ e da fissarsi facilmente volta per volta con viti o in altro modo ove fa d'uopo.

L'aggiunta del tubo di gomma elastica fra il recipiente mobile ed il pozzetto in cui termina il tubo d'efflusso riuscirebbe utile non poco anche nelle pompe nel sistema Töpler specialmente nel caso in cui si vogliano ottenere grandi rarefazioni. Infatti in tal caso la bolla d'aria che si vuole espellere, che è già piccola allorchè si trova alla sommità del tubo d'efflusso ove si trova ad una pressione di pochi millimetri, diventa sempre più piccola a misura che s'abbassa in detto tubo e la sua pressione aumenta fino a divenire uguale ed alcun poco superiore all'atmosferica. Avviene quindi che le due colonne di mercurio fra le quali essa è compresa si ricongiungono ed essa non viene più trascinata che difficilmente (a causa anche del suo piccolo peso specifico) dal mercurio che effluisce e facilmente invece ritorna indietro allorchè si abbassa il recipiente mobile. Invece coll'aggiunta indicata, la pressione sul livello esterno del mercurio nel tubo d'efflusso sarebbe di pochi millimetri, il volume della bolla d'aria rimarrebbe sempre notevolmente più grande

e sarebbe espulso più facilmente ed inoltre sarebbe minore la pressione dell'aria che potrebbe rimanere aderente alle pareti. Di più sarebbe ridotta la lunghezza della corsa del recipiente mobile, poichè la pressione dell'aria, che si vuol scacciare e che bisogna vincere, rimane assai piccola.

In questo caso sarebbe inutile che nel recipiente mobile si formasse un vuoto possibilmente perfetto; non occorre quindi far giungere il mercurio nel tubo di gomma aggiunto donde come s'è visto occorre scacciarlo: l'operazione del far il vuoto quindi non sarebbe cambiato per l'aggiunta di questo tubo.

Credo non inutile osservare a vantaggio di coloro che avessero scarsi mezzi a propria disposizione, che ho costruito la macchina anzidetta con pezzi di poco costo che facilmente si possono trovare. Come serbatoi $A$ e $B$ ha preso due palloni di $250^{cm3}$ circa con tubulatura opposta al collo; ad uno di essi ho congiunto al disotto nelle prime prove con buona ceralacca, indi saldando il tubo di vetro di $80^{cm}$, al disopra prima mediante un buon tappo di sovero coperto di ceralacca e poi saldando il tubo a $T$ colla chiavetta descritta innanzi che si trova al n° 302 del catalogo di Zambelli di Torino e nel n° 449 del catalogo di Desaga di Heidelberg. Il maschio di questa chiavetta ha ordinariamente anche un foro normale all'asse, che sarebbe affatto dannoso nel nostro caso, ed io l'ho turato con un tubetto pieno di vetro e con ceralacca che riempiva bene gl'interstizi. A questo proposito è d'uopo notare che se si scalda direttamente il maschio per applicare la ceralacca, è facilissimo che esso, per quanta cura si usi, tutt'attorno al foro trasversale si fenda. È meglio quindi porlo dentro ad una stufa ad aria o scaldarlo con aria calda in modo che la sua temperatura salga lentamente e non oltre i 100°.

Nel caso che questo tubo si congiunga al pallone con un tappo, questo deve essere coperto di uno strato di ceralacca di circa mezzo centimetro (il tappo quindi non serve che di sostegno) e bisogna badare che il tubo non sporga dalla ceralacca altrimenti rimarrebbe uno spazio nocivo di volume abbastanza grande: bisogna quindi, quando la ceralacca è ancora fusa, tirare indietro detto tubo in modo da compensare anche la contrazione della medesima nella solidificazione. La chiavetta $D$ è una delle comuni chiavette di scaricamento.

Le congiunzioni colla ceralacca hanno il vantaggio di potere esser fatte e rinnovate, se occorre, facilmente, e tengono per-

fettamente; ma dato che subito o col tempo l'apparecchio non tenga il vuoto si rimane incerti se e quali delle congiunzioni siano difettose.

Riguardo alla rarefazione che potei ottenere con questa pompa osserverò anzitutto che la chiavetta, non essendo destinata allo scopo pel quale la usavo, non chiudeva molto bene, giacchè era visibile che le due superficie smerigliate non combaciavano perfettamente in ispecie nella metà inferiore, ed allorchè la pompa era costruita bastava sollevare il recipiente mobile in modo che la rarefazione in $A$ diminuisse perchè i fenomeni luminosi prodotti dal passaggio delle scariche elettriche in un tubo di Geissler variassero notevolmente in modo da indicare un aumento non piccolo di pressione anche quando le comunicazioni erano state interrotte mediante la chiavetta.

Conviene osservare che in generale, ma specialmente nel nostro caso, il maschio con scanalatura laterale è per sè difettoso in quanto diminuisce la superficie smerigliata che separa due spazi in cui l'aria può trovarsi a pressioni più o meno diverse e diminuisce anche la distanza fra questi due spazi.

Sarebbe quindi preferibile un maschio con canale centrale che a metà altezza si piegasse lateralmente in modo che la superficie smerigliata rimanesse intatta.

Ciononostante ho potuto ottenere in recipienti di 65 e $325^{cm3}$ un vuoto tale da ottenere una vivissima fosforescenza nel vetro colle apparenze delle ombre, ecc. Per ottenere queste rarefazioni occorsero circa otto colpi di pompa pel primo recipiente, venti per l'altro, nonostante che nell'eseguire le congiunzioni di questi tubi colla pompa mediante ceralacca un poco dell'umidità della fiamma che serviva a scaldare i pezzi da congiungere fosse penetrata nei tubi. Ora il numero di colpi che occorre teoricamente per produrre tale rarefazione, essendo il volume del pallone $A$ di $250^{cm3}$, è lo stesso o poco minore di quello che è stato necessario nel fatto. Con qualche altro colpo di pompa la scarica che si ottiene da una piccola macchina elettrica di Voss che dava nell'aria $2^{cm}$ di scintilla non passava affatto. Si ottiene quest'ultima rarefazione, nonostante la poca perfezione della chiavetta, avendo cura di scacciar bene l'aria da $A$ in $B$ e poi da questo nell'atmosfera.

Non ho fatto finora misure molto precise mancando la scala per misurare le pressioni, ma dal risultato in complesso m'è

parso chiaramente che la rarefazione si ottenesse con un numero di colpi assai minore di quello che si richiede colla pompa di Töpler nella quale la presenza di un po' d'umidità che si condensa alla sommità del recipiente fisso e non può essere scacciata impedisce affatto di ottenere una rarefazione anche solo mediocre fintantochè il vapore non è assorbito dalla sostanza disseccante, ciò che richiede varie ore.

Per misurare la pressione si potrebbe mediante una scala in millimetri misurare, essendo $B$ in comunicazione coll'atmosfera, la differenza di livello del mercurio in $A$ e in $B$: 1° quando $B$ è in basso e l'aria ha per volume la capacità di $A$; 2° quando $B$ è sollevato e la stessa aria ha assunto un volume noto molto piccolo nel tubo al disopra di $A$. Naturalmente la chiavetta $C$ deve essere chiusa. Sarebbe conveniente di dividere questo tubo in varie parti di uguale capacità per ottenere vari valori di questa pressione e prender la media: così si potrebbe tener conto del vapore che per caso esistesse in detta aria. — Si potrebbe anche, tenendo $A$ e $B$ mediante la chiavetta $D$ separati fra loro e dall'atmosfera vedere come varia detta differenza di livello quando il mercurio passa da una all'altra delle suddette divisioni.

Un' altra modificazione della pompa a mercurio è suggerita dal fatto della maggior rarefazione ottenibile colla pompa di Töpler, che non con quella di Geissler. Si attribuisce ciò all'assenza nella prima di valvole e chiavette; pure alla pompa di Bessel-Hagen è unito un tubo di congiunzione con parecchie chiavette e superficie smerigliate che tengono a perfezione e non impediscono quindi di ottenere grandissime rarefazioni. Mi pare invece che la ragione di tal fatto stia in ciò che la colonna di mercurio che trovasi nel tubo d'efflusso tende ad aumentare notevolmente il volume dell'aria che si vuole scacciare controbilanciando quasi totalmente la pressione atmosferica, per cui la quantità d'aria che potrebbe rimanere sotto forma di bolle o di strato aderente alle pareti è piccolissima. È bensì vero che a misura che quest'aria scende nel tubo la sua pressione cresce fino a divenire alcun poco superiore all'atmosferica, ma ciò avviene in luoghi che poi sono ricoperti da una colonna di mercurio tanto più alta quanto più essi sono in basso. Così per es. se alla metà del tubo rimanesse una parte dell'aria che si scaccia e che ivi ha la pressione all'incirca di $\frac{1}{2}$ atmosfera, quest' aria rimasta si troverà poi ricoperta da una colonna di mercurio

appunto di $\frac{1}{2}$ atmosfera che le impedirà di espandersi e svilupparsi, come avverrebbe se essa si trovasse invece nell'interno del recipiente fisso.

Ho provato perciò nella pompa descritta a togliere il tubo *a* ed adattare invece al tubo a sinistra della chiavetta, mediante una buona congiunzione con tubo di gomma elastica un tubo di vetro, verticale, diretto all'ingiù di circa $80^{cm}$ di lunghezza, 1 a $2^{mm}$ di diametro interno coll'estremità inferiore pescante nel mercurio o foggiata a modo di pozzetto di barometro a sifone.

Per fare il vuoto operavo come colla pompa di Geissler o con quella di Töpler, solo che mentre in questa occorre per scacciare la bolla far effluire una certa quantità di mercurio, che poi nel ritornare indietro trascina in tutto o in parte la bolla scacciata (ciò che si potrebbe anche impedire con una chiavetta posta dopo il pozzetto), nel mio caso ciò era impedito chiudendo la chiavetta *D* quando era effluita una certa quantità di mercurio e prima di abbassare il recipiente *B*. L'eccesso di mercurio effluito dopo un certo numero di colpi di pompa veniva riversato in *B*.

Ottenni così con questa disposizione che si può adattare senza difficoltà alle comuni pompe di Geissler, le stesse rarefazioni come colla disposizione precedente; mi parve che occorresse un numero di colpi di pompa un po' maggiore, ma la differenza potrebbe essere accidentale. — S'avrebbe vantaggio, come ho detto, ponendo il recipiente *B* in comunicazione col pozzetto che termina il tubo d'efflusso. Pericolo di rottura, per poca precauzione, in chi fa il vuoto, qui non esiste; se il mercurio salisse con troppa violenza potrebbe solo far saltare il maschio della chiavetta.

Per evitare la presenza di vapori grassi, usai talora per ungere le chiavette una poltiglia di acido solforico concentrato e grafite, che si comportò assai bene.

Dal Laboratorio di Fisica dell'Università di Torino.

Lo stesso Socio NACCARI presenta ancora e legge il seguente lavoro dei signori L. PALAZZO e A. BATTELLI,

# INTORNO
## ALLA
# FUSIONE DEI MISCUGLI
## DI ALCUNE SOSTANZE NON METALLICHE.

**1.** W. Heintz, in una sua memoria (*Ueber Wallrath* (*)), aveva notato che mescolando ad un acido grasso una piccola quantità di un altro, il punto di fusione del primo si abbassa, sia che l'ultimo si fonda a temperatura superiore od inferiore. Seguitando ad aumentare la quantità del secondo acido, il punto di fusione raggiunge un minimo, ed aumentandola ancora, il punto di fusione s'innalza sino a raggiungere quello dell'ultimo acido.

D'altra parte J. Gottlieb aveva trovato (**) che le mescolanze di due acidi grassi posseggono un punto di fusione inferiore a quello di ambidue gli acidi componenti, come le leghe metalliche. In seguito a queste osservazioni ci venne in pensiero che le mescolanze di corpi grassi, ed in generale di sostanze non metalliche avessero a possedere non un punto unico, ma due punti di fusione distinti, che anzi avessero generalmente a seguire per intero nella fusione la legge già trovata nel 1830 da F. Rudberg (***) per le leghe metalliche: *Le leghe metalliche binarie presentano due punti di fusione diversi, uno per tutte le leghe della medesima specie* (cioè composte dei medesimi metalli in proporzioni differenti) *rimane sempre lo stesso e l'altro muta a seconda delle proporzioni dei componenti.* — Secondo il Rudberg il punto fisso sarebbe dovuto alla

(*) W. HEINTZ, *Pogg. Ann.*, *XIII*, 429, 588 (1854).

(**) J. GOTTLIEB, *Untersuchung des Gänsefettes und der Oelsaüre. Ann. der Chem. und Pharm.*, *LVII*, 37 (1846).

(***) F. RUDBERG, *Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Metallegirungen. Pogg. Ann.*, *XVIII*, 240 (1830).

solidificazione di una vera lega chimica formatasi tra i due metalli, secondo rapporti semplici atomici; mentre l'altro punto, variabile, sarebbe dovuto alla solidificazione di quello fra i due metalli che è rimasto in eccesso e meccanicamente mescolato nella lega.

Di questo argomento si è pure occupato recentemente E. Wiedemann (*), il quale per altro interpreta alquanto diversamente il fenomeno, ammettendo cioè che il suddetto punto variabile di fusione delle leghe non sia un vero punto di fusione, ma corrisponda piuttosto al principio di una separazione cristallina del metallo eccedente dalla lega chimica fusa, in cui esso si trovava dapprima disciolto.

Allo scopo di verificare se la legge scoperta dal Rudberg fosse anche seguita dai miscugli di sostanze non metalliche, noi abbiamo intrapreso il presente lavoro sperimentale, facendo ricerche su mescolanze binarie di paraffina, naftalina, nitronaftalina, spermaceti e stearina.

2. Il procedimento da noi seguìto nelle esperienze, era il seguente: La mescolanza si faceva fondere in un tubo da saggio di circa $10^{cm.}$ di lunghezza e $2^{cm.}$ di diametro, immergendo il tubo stesso in un bagno d'acqua, che si riscaldava gradatamente, affine di evitare ogni possibile alterazione della mescolanza, per un eccessivo o troppo rapido riscaldamento. Il tubo era tappato con un sovero a due fori, attraverso uno dei quali passava un termometro col bulbo del tutto immerso nella mescolanza liquida, ed attraverso l'altro si poteva fare scorrere un piccolo agitatore d'ottone.

Quando il miscuglio aveva raggiunto una temperatura alquanto superiore a quella della sua fusione, si toglieva il tubo dal bagno, e si chiudeva in una bottiglia vuota a largo collo, la quale stava immersa sino all'orlo in un gran vaso pieno d'acqua a temperatura ordinaria.

Allora, di mezzo minuto in mezzo minuto, si leggevano a distanza con un cannocchiale le temperature segnate dal termometro durante il raffreddamento e la solidificazione della sostanza. Il termometro, che già era stato confrontato con un campione, era diviso semplicemente in gradi; ma coll'aiuto del cannocchiale si potevano benissimo valutare i decimi di grado.

---

(*) E. Wiedemann, *Ueber einige Eigenschaften der Metallegirungen. Wiedemann's Annalen.* III, 237 (1878).

Nello stesso tempo in cui si facevano le letture, la mescolanza veniva continuamente agitata, sia per mantenere uniforme la temperatura in tutta la massa, sia per evitare possibilmente il fenomeno della soprafusione.

Come ben appare, il nostro apparecchio ha una qualche analogia con quelli adoperati nei metodi calorimetrici; presenta poi anche il vantaggio, per noi importantissimo, di poter osservare attraverso le pareti di vetro gli aspetti diversi che prende il miscuglio nel solidificarsi.

Un altro vantaggio, per la regolarità nell'andamento del fenomeno, si ha nella quantità d'acqua che riempie il recipiente esterno, la quale essendo molto grande rispetto al volume della bottiglia, vi mantiene l'aria dentro rinchiusa ad una temperatura prossimamente costante, ad onta del calore somministrato dalla sostanza fusa contenuta nel tubo.

**3.** I risultati delle nostre esperienze furono poi espressi graficamente, portando sull'asse delle ascisse i tempi successivi, e su quello delle ordinate le corrispondenti temperature osservate. In tal modo si hanno curve (che chiameremo *di raffreddamento)*, le quali manifestando subito all'occhio l'intero andamento del fenomeno, si prestano assai bene alle discussioni da farsi su ciascuna specie di miscugli in particolare, per potere poi dedurre qualche conseguenza d'indole più generale.

**4.** Anzitutto abbiamo determinato, col metodo ora esposto, il punto di fusione di ciascuna delle sostanze che facemmo entrare nella composizione dei nostri miscugli, assumendo per tale punto quello in cui la curva di raffreddamento, dopo essere rapidamente discesa, ad un tratto s'inflette per dar luogo ad un ramo rettilineo quasi parallelo all'asse dei tempi.

Così abbiamo trovato:

| *Sostanze* | *Punti di fusione* |
|---|---|
| Naftalina . . . . . | 79°,3 |
| Nitronaftalina . . . . . | 55 ,1 |
| Stearina . . . . . | 54 ,8 |
| Paraffina . . . . . | 52 ,4 |
| Spermaceti . . . . . | 43 ,9 |

Abbiamo poi anche determinati i punti di fusione delle stesse sostanze, spalmandone d'uno strato sottile il bulbo del termometro ed immergendo questo in un bagno d'acqua che veniva lentamente riscaldato. Nell'istante preciso in cui lo strato si liquefaceva rendendosi trasparente, si notava la temperatura segnata dal termometro. I numeri così ottenuti risultarono sensibilmente concordi a quelli sopra indicati.

### *Miscugli di naftalina e paraffina.*

5. Abbiamo formato con queste due sostanze sette miscugli nelle seguenti proporzioni in peso:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° | Miscuglio | 2 | naftalina | a | 1 | paraffina |
| 2° | » | 1 | » | » | 1 | » |
| 3° | » | 1 | » | » | 2 | » |
| 4° | » | 2 | » | » | 5 | » |
| 5° | » | 1 | » | » | 3 | » |
| 6° | » | 2 | » | » | 7 | » |
| 7° | » | 1 | » | » | 4 | » |

Per rendere i risultati delle varie esperienze meglio comparabili fra di loro, abbiamo creduto opportuno di introdurre nel nostro tubo da saggio sempre uno stesso peso (= 15 gr.) di ognuno di questi miscugli.

Le loro curve di raffreddamento sono disegnate nella tavola annessa. Su ciascuna abbiamo tirato due tratti rettilinei orizzontali: il superiore dà la temperatura di fusione della naftalina (= 79°,3), l'inferiore dà la temperatura di fusione della paraffina (= 52°,4). Per origine delle temperature si è preso 41°; l'origine dei tempi si è invece lasciata arbitraria per ciascuna curva.

Come esempio offriamo qui la tabella numerica che ci ha servito alla costruzione della curva del miscuglio 3°.

3° Miscuglio: 1 *p. naft.*, 2 *p. paraff.* (*).

| Tempi | Temper. | Tempi | Temper. | Tempi | Temper. | Tempi | Temper. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^h\ 0^m$ | 77°,60 | $8^m$ | 52°,90 | $16^m$ | 45°,10 | $24^m$ | 44°,60 |
| 0,5 | 75 ,60 | 8,5 | 52 ,35 | 16,5 | 45 ,00 | 24,5 | 44 ,55 |
| 1 | 73 ,30 | 9 | 51 ,40 | 17 | 45 ,00 | 25 | 44 ,50 |
| 1,5 | 70 ,90 | 9,5 | 50 ,75 | 17,5 | 45 ,00 | 25,5 | 44 ,50 |
| 2 | 68 ,80 | 10 | 50 ,00 | 18 | 44 ,95 | 26 | 44 ,50 |
| 2,5 | 66 ,75 | 10,5 | 49 ,40 | 18,5 | 44 ,90 | 27 | 44 ,45 |
| 3 | 64 ,90 | 11 | 48 ,70 | 19 | 44 ,85 | 28 | 44 ,40 |
| 3,5 | 63 ,00 | 11,5 | 48 ,00 | 19,5 | 44 ,80 | 29 | 44 ,40 |
| 4 | 61 ,30 | 12 | 47 ,50 | 20 | 44 ,80 | 30 | 44 ,35 |
| 4,5 | 59 ,80 | 12,5 | 46 ,80 | 20,5 | 44 ,80 | 31 | 44 ,35 |
| 5 | 58 ,00 | 13 | 46 ,15 | 21 | 44 ,70 | 36 | 44 ,20 |
| 5,5 | 56 ,60 | 13,5 | 45 ,70 | 21,5 | 44 ,70 | 41 | 43 ,95 |
| 6 | 55 ,35 | 14 | 45 ,40 | 22 | 44 ,70 | 46 | 43 ,50 |
| 6,5 | 54 ,20 | 14,5 | 45 ,20 | 22,5 | 44 ,65 | 51 | 42 ,75 |
| 7 | 53 ,15 | 15 | 45 ,20 | 23 | 44 ,65 | 56 | 40 ,80 |
| 7,5 | 53 ,40 | 15,5 | 45 ,10 | 23,5 | 44 ,60 | $1^h\ 2^m$ | 37 ,50 |
| 1° Punto di fusione 53°,4 | | | | 2° Punto di fusione 45°,2. | | | |

Dall'esame delle curve di raffreddamento e dal confronto colla tabella precedente che ci dà le proporzioni delle sostanze componenti ciascun miscuglio, si rileva facilmente che:

(*) Per questo miscuglio, come anche pel 4° e pel 5°, nonostante la continua agitazione in cui si mantenevà il liquido fuso, si ebbe da osservare un po' di soprafusione; ed in tali casi abbiamo scelto per punto di fusione quello dato dall'ordinata massima corrispondente al vertice del ripiegamento che fa la curva nel rialzarsi.

I miscugli 1°, 2° e 3° hanno due punti di fusione ben distinti, indicati entrambi da una vera sosta più o meno lunga del termometro: il primo è variabile colla composizione del miscuglio, e precisamente tanto più elevato quanto più grande è la quantità di naftalina rispetto a quella della paraffina; il secondo invece è lo stesso per tutti e tre (45°,2). Poichè per questi tre miscugli avviene che diminuendo la proporzione di naftalina, il primo punto va abbassandosi, mentre il secondo sta fermo, era naturale pensare che qualora si fosse seguitato a diminuire la quantità di naftalina, il primo punto avrebbe finito per raggiungere il secondo. Ed è ciò precisamente che abbiamo trovato verificarsi pel 4° e pel 5° miscuglio, i quali presentano un punto unico di fusione (ancora a 45°,2), che può risguardarsi come risultante dalla coincidenza del punto variabile col punto fisso. Per altro è ragionevole ammettere che ci sia un solo miscuglio al quale spetti veramente un unico punto di fusione; molto probabilmente esso è compreso fra i due miscugli 4° e 5°, i quali del resto differiscono pochissimo l'uno dall'altro per la loro composizione.

In seguito, diminuendo ancor più la quantità di naftalina, il primo punto torna a separarsi dal secondo; però quest'ultimo non si serba più assolutamente fisso come nei miscugli precedenti, ed inoltre qui il primo punto non corrisponde propriamente ad una sosta del termometro, come avveniva dapprima, ma piuttosto al principio di una discesa del termometro meno rapida, prodotta dalla precipitazione di cristalli di naftalina in seno al liquido fuso.

Oltre a questi fatti è da notarsi il generale abbassamento del punto di fusione delle sostanze componenti, cioè: per tutti quanti i miscugli il primo punto è più basso del punto di fusione della naftalina (che è quella che fonde a temperatura più alta), ed il secondo punto è più basso ancora di quello della paraffina (la sostanza più facilmente fusibile); anzi pei miscugli 6° e 7° entrambi i punti giacciono al disotto delle temperature di fusione di tutte e due le sostanze componenti.

Se poi si ha riguardo al tempo, apparisce che il termometro si arresta nel punto mobile di fusione per un brevissimo tratto di tempo (quando si verifichi effettivamente una sosta); mentre invece il tempo per cui il termometro sta fermo nel secondo punto è molto più lungo (anche perchè la temperatura è più bassa), ed è in generale tanto maggiore quanto più cresce la proporzione della paraffina e diminuisce quella della naftalina.

Questi risultati si vedono compendiati nella seguente tabella, dove nello scrivere le proporzioni delle sostanze componenti si è fatta eguale ad 1 la quantità di naftalina:

NAFTALINA f. a 79°,3 PARAFFINA f. a 52°,4

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | PUNTI DI FUSIONE | |
|---|---|---|---|---|
| | Naftalina | Paraffina | 1° | 2° |
| 1° | 1 | 0,5 | 72°,4 | 45°,2 |
| 2° | 1 | 1 | 64 ,5 | 45 ,2 |
| 3° | 1 | 2 | 53 ,4 | 45 ,2 |
| 4° | 1 | 2,5 | 45°,2 | |
| 5° | 1 | 3 | 45 ,2 | |
| 6° | 1 | 3,5 | 47 ,3 | 43 ,2 |
| 7° | 1 | 4 | 46 ,8 | 44 ,0 |

*Miscugli di naftalina e spermaceti.*

**6.** I risultati relativi a questi miscugli si contengono nella tabella che segue (*):

NAFTALINA f. a 79°,3 SPERMACETI f. a 43°,9

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | PUNTI DI FUSIONE | |
|---|---|---|---|---|
| | Naftalina | Spermaceti | 1° | 2° |
| 1° | 1 | 0,25 | 75°,7 | 36°,6 |
| 2° | 1 | 0,5 | 70 ,4 | 36 ,7 |
| 3° | 1 | 1 | 62 ,8 | 36 ,8 |
| 4° | 1 | 2 | 49 ,2 | 36 ,9 |
| 5° | 1 | 3 | 39 ,8 | 36 ,7 |
| 6° | 1 | 3,5 | 36°,6 | |
| 7° | 1 | 5 | 38 ,4 | 34 ,8 |
| 8° | 1 | 6 | 39 ,3 | 33 ,4 |

(*) Per ristrettezza di spazio non possiamo dare di queste mescolanze e delle seguenti le curve di raffreddamento.

Anche per questi miscugli si vedono verificate le leggi già trovate precedentemente per quelli di naftalina e paraffina, cioè:

Si hanno due punti di fusione distinti, uno mobile e l'altro sensibilmente fisso (medio 36°,1); il primo va abbassandosi man mano che diminuisce la proporzione di naftalina, finchè, giunti ad un certo limite, viene a coincidere col secondo. Al di là di quel limite, seguitando a far decrescere la quantità di naftalina, i due punti si disgiungono ed avviene per gli ultimi miscugli (7° e 8°) ciò che già abbiamo notato avvenire per i due ultimi miscugli (6° e 7°) della serie precedente, vale a dire nè il secondo punto si mantiene più assolutamente costante, nè il primo corrisponde ad una vera sosta del termometro. Il secondo punto è in ogni caso inferiore a quelli d'entrambe le sostanze componenti; il primo è pure sempre inferiore a quello della naftalina, e pei miscugli più ricchi di spermaceti, è anche più basso del punto di fusione di quest' ultimo.

### *Miscugli di naftalina e stearina.*

7. I cinque miscugli che di queste sostanze abbiamo studiati, seguono anch'essi, e molto bene, le leggi precedenti, come lo dimostra la seguente tabella:

NAFTALINA f. a 79°,3 STEARINA f. a 54°,8

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | PUNTI DI FUSIONE | |
|---|---|---|---|---|
| | Naftalina | Stearina | 1° | 2° |
| 1° | 1 | 0,5 | 71°,8 | 46°,2 |
| 2° | 1 | 1 | 64 ,3 | 46 ,2 |
| 3° | 1 | 2 | 50 ,9 | 46 ,3 |
| 4° | 1 | 3 | 46°,3 | |
| 5° | 1 | 4 | 48 ,2 | 45 ,0 |

*Miscugli di naftalina e nitronaftalina.*

8. Per questi miscugli si ebbero i risultati seguenti:

NAFTALINA f. a 79°,3 NITRONAFTALINA f. a 55°,1

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | PUNTI DI FUSIONE | |
|---|---|---|---|---|
| | Naftalina | Nitronaftalina | 1° | 2° |
| 1° | 1 | 0,5 | 63°,5 | 33°,0 |
| 2° | 1 | 1 | 52 ,1 | 34 ,0 |
| 3° | 1 | 1,5 | 43 ,2 | 34 ,1 |
| 4° | 1 | 2 | 35 ,9 | 35 ,1 |
| 5° | 1 | 2,5 | 35°,6 | |
| 6° | 1 | 3,5 | 39 ,3 | 35 ,0 |

Per tutti questi miscugli si ebbe nel secondo punto una notevole soprafusione, ed è a questa che noi attribuiamo il fatto, che qui, il secondo punto, non rimane più costante se non fra limiti molto meno ristretti che pei miscugli studiati precedentemente, cioè fra i limiti 35°,6 e 33°,0. Infatti, essendo molto bassa la temperatura a cui ha potuto giungere la sostanza liquida per la soprafusione, è probabile che quando poi essa prese a solidificarsi, il calore prodotto non sia più bastato a riscaldarla fino al punto di fusione, ma l'abbia semplicemente portata a temperatura alquanto inferiore. Perciò la vera temperatura da prendersi per il secondo punto di fusione, sarebbe la massima fra quelle osservate, cioè 35°,6, o fors'anche alquanto maggiore di questa.

Interpretata in tal modo la cosa, le leggi che i miscugli di naftalina e di nitronaftalina seguono nel solidificarsi, coinciderebbero nelle parti più essenziali con quelle già stabilite sopra, cioè:

Dei due punti di fusione il secondo è fisso, ed il primo s'abbassa diminuendo la proporzione di naftalina fino a raggiungere il secondo; dopo di che i due punti tornano a disgiungersi, e mentre il secondo continua a rimaner fisso, il primo prende a rialzarsi di nuovo.

*Miscugli di stearina e paraffina.*

**9.** I risultati furono questi:

STEARINA f. a 54°,8 PARAFFINA f. a 52°,4

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | PUNTI DI FUSIONE | |
|---|---|---|---|---|
| | Stearina | Paraffina | 1° | 2° |
| 1° | 1 | 0,25 | 52°,1 | 45°,1 |
| 2° | 1 | 0,33 | 51 ,8 | 47 ,0 |
| 3° | 1 | 0,5 | 50 ,0 | 46 ,0 |
| 4° | 1 | 1 | 46°,7 | |
| 5° | 1 | 2 | 49 ,5 | 45 ,7 |
| 6° | 1 | 2,5 | 50 ,0 | 45 ,4 |
| 7° | 1 | 3 | 50 ,4 | 45 ,6 |
| 8° | 1 | 4 | 51 ,0 | 44 ,8 |

Anche questi miscugli posseggono due punti distinti di fusione. Pei tre primi miscugli in cui si trova in eccesso la stearina, il primo punto va abbassandosi man mano che si diminuisce la proporzione di questa; poi si ha il punto unico precisamente pel miscuglio a parti eguali di stearina e di paraffina; dopo ciò il primo punto torna a rialzarsi, e si innalza tanto più, quanto più grande è l'eccesso della paraffina.

I due punti, primo e secondo, sono poi sempre più bassi dei punti di fusione d'entrambe le sostanze componenti.

*Miscugli di paraffina e spermaceti.*

**10.** Per questi si ebbe:

PARAFFINA f. a 52°,4 SPERMACETI f. a 43°,9

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | PUNTI DI FUSIONE | |
|---|---|---|---|---|
| | Paraffina | Spermaceti | 1° | 2° |
| 1° | 1 | 0,33 | 50°,6 | |
| 2° | 1 | 0,5 | 49 ,2 | |
| 3° | 1 | 1 | 47°,5 | 39°,2 |
| 4° | 1 | 2 | 44 ,1 | 39 ,9 |
| 5° | 1 | 3 | 42 ,5 | |

Questi miscugli si comportano in modo un po' diverso dai precedenti. Di essi non abbiamo che due soli, cioè il 3° ed il 4°, che posseggano due distinti punti di fusione, uno mobile e l'altro fisso; i miscugli precedenti ed i miscugli seguenti a questi hanno invece un punto unico, il quale s'abbassa col diminuire la quantità della sostanza meno fusibile, la paraffina. D'altronde quel primo punto mobile anzichè essere un vero punto di fusione, sembra piuttosto essere il principio di una separazione di una sostanza solida dalla parte del miscuglio che rimane liquido. Infatti, non abbiamo qui un vero arrestarsi del termometro; soltanto la curva s'inflette per discendere meno rapidamente. Il che è anche apertamente indicato dalle tabelle numeriche; diamo qui per es. quella del miscuglio 4°, tralasciando però, per brevità, le osservazioni fatte ai mezzi minuti.

4ª MESCOLANZA: 1 *p. paraf.*, 2 *p. spermac.*

| Tempi | Temper. | Tempi | Temper. | Tempi | Temper. | Tempi | Temper. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^h\ 0^m$ | 70°,80 | $13^m$ | 42°,50 | $26^m$ | 39°,40 | $39^m$ | 36°,95 |
| 1 | 66 ,35 | 14 | 42 ,10 | 27 | 39 ,30 | 40 | 36 ,70 |
| 2 | 62 ,50 | 15 | 41 ,80 | 28 | 39 ,10 | 41 | 36 ,50 |
| 3 | 58 ,90 | 16 | 41 ,45 | 29 | 39 ,00 | 42 | 36 ,35 |
| 4 | 55 ,95 | 17 | 42 ,20 | 30 | 38 ,80 | 43 | 36 ,20 |
| 5 | 53 ,00 | 18 | 41 ,00 | 31 | 38 ,60 | 44 | 36 ,00 |
| 6 | 50 ,30 | 19 | 40 ,60 | 32 | 38 ,50 | 45 | 35 ,90 |
| 7 | 47 ,95 | 20 | 40 ,30 | 33 | 38 ,25 | 46 | 35 ,60 |
| 8 | 46 ,00 | 21 | 40 ,10 | 34 | 38 ,10 | 47 | 35 ,35 |
| 9 | 44 ,10 | 22 | 40 ,00 | 35 | 37 ,85 | 48 | 35 ,20 |
| 10 | 43 ,65 | 23 | 40 ,00 | 36 | 37 ,50 | 49 | 35 ,05 |
| 11 | 43 ,20 | 24 | 39 ,80 | 37 | 37 ,30 | 51 | 34 ,90 |
| 12 | 42 ,85 | 25 | 39 ,60 | 38 | 37 ,10 | 57 | 33 ,00 |

**11.** Cercando ora di dedurre qualche legge generale dallo studio precedentemente fatto intorno alle temperature di fusione di una quarantina circa di miscugli, ci pare di poter legittimamente conchiudere, che:

1° I miscugli binarii dei corpi organici studiati (naftalina, nitronaftalina, paraffina, spermaceti, stearina) posseggono *generalmente* due distinte temperature di fusione, una variabile colla composizione del miscuglio, e l'altra costante (in alcuni casi rigorosamente, ed in altri casi con sufficiente approssimazione) per tutti i miscugli della medesima specie. — La legge di Rudberg sulle leghe metalliche, che noi abbiamo riportata in principio, vale dunque in generale anche per le mescolanze dei corpi organici su cui abbiamo sperimentato.

2° Il punto variabile si abbassa col diminuire la quantità di quella sostanza che fonde a temperatura più alta, e scende fino a raggiungere la temperatura fissa, dopo di che i due punti di nuovo si separano.

3° Il primo punto è sempre più basso del punto di fusione della sostanza meno fusibile, e molte volte è più basso dei punti di fusione d'entrambe le sostanze. Il secondo punto poi è costantemente inferiore a quelli di tutte e due le sostanze componenti.

È poi da notarsi che queste leggi sono tanto più esattamente seguite quanto più ben definita è la costituzione chimica delle sostanze componenti il miscuglio. Infatti, per miscugli della medesima specie, esse leggi, riguardo alla sostanza del 2° punto di fusione, sono meglio verificate quando nel miscuglio prevale quella sostanza che ha costituzione meglio determinata, ad es. la naftalina, e quindi (come mostrano le tabelle suesposte), pei miscugli che si hanno prima, d'arrivare al punto unico. E le specie di miscugli che ci diedero migliori risultati, sono quelle in cui entra la naftalina ($C_{10} H_8$); mentre invece la specie che se ne scosta di più è precisamente quella formata da paraffina e spermaceti. Ora la prima è appunto una mescolanza di vari idrocarburi della formola generale $C_n H_{2n+2}$, e l'altro è, secondo l'Heintz, costituito dagli acidi stearico, palmitico, miristico e laurostearico.

**12.** Il fatto dell'avere due punti di fusione nelle mescolanze dei corpi organici si può spiegare in modo analogo a quello che ha fatto il Rudberg per le leghe metalliche.

Se le due sostanze vengono fuse insieme in proporzioni qualunque, possiamo ritenere che tra una sostanza ed una parte dell'altra si formi una combinazione molecolare, una specie di lega; cosicchè la massa fusa viene ad essere una mescolanza meccanica di questa combinazione molecolare e della sostanza che rimane in eccesso. Quando le due sostanze si trovano nella proporzione in cui si forma quel miscuglio, per così dire, *chimico*, questo si raffredda regolarmente fino al punto che corrisponde alla temperatura fissa. Ma se una sostanza è contenuta in eccesso, questo eccesso passa durante il raffreddamento allo stato solido; e da ciò segue l'arrestarsi del termometro sopra un punto che giace al di sopra del punto di fusione del miscuglio chimico.

Questo passaggio allo stato solido avviene ad una temperatura tanto più alta, quanto più grande è l'eccesso di una sostanza nel

miscuglio. La sostanza solidificata (in cristallini nel caso della naftalina, ovvero sotto forma di fiocchi o di precipitato polverulento nel caso della stearina e della paraffina) rimane allora meccanicamente diffusa nel miscuglio chimico ancora liquido, finchè anche questo, assumendo ad un tratto aspetto pastoso, si consolida e cede il suo calore di fusione, con che viene prodotto l'arrestarsi del termometro nel punto fisso; questa sosta dura tanto più a lungo quanto maggiore è la quantità di lega che si è formata.

Questa spiegazione s'adatta abbastanza bene per quei miscugli (che sono la maggior parte), nei quali vi ha nel primo punto di fusione un vero arrestarsi, ancorchè assai breve, del termometro; ma anzitutto per accettarla è necessario ammettere che la sostanza eccedente, uniformemente distribuita nel miscuglio chimico, abbia il suo punto di solidificazione abbassato; e di più è da osservarsi che, conforme a quanto avviene nelle leghe metalliche, anche qui, se pure il termometro si arresta un certo tempo nel cosidetto primo punto di fusione, la temperatura va poi abbassandosi fra il primo ed il secondo punto in modo da indicare che anche in questo periodo avviene un continuo svolgimento di calore, e quindi una parziale e graduata solidificazione della sostanza eccedente.

Per quei miscugli poi, in cui non abbiamo più nel cosidetto primo punto una sosta effettiva, ma solo il principio di una discesa più lenta di temperatura, parrebbe più probabile addirittura quella stessa spiegazione che è stata proposta da E. Wiedemann per le leghe metalliche, e di cui si è fatto menzione in principio. Vale a dire la sostanza in eccesso non sarebbe meccanicamente mescolata col miscuglio chimico, ma propriamente disciolta, e quel cambiamento repentino nella curva di raffreddamento sarebbe dovuto al principio di una precipitazione della sostanza in eccesso in seno al miscuglio chimico avente un punto fisso di fusione, e che ancor rimane allo stato liquido. Questa separazione continuerebbe ad effettuarsi fino a che la temperatura non abbia raggiunto il punto fisso, precisamente come avviene nella soluzione di un sale, la cui solubilità si abbassi colla temperatura, quando venga raffreddato in un ambiente al di sotto di $0^0$. Anche una tale soluzione si raffredda dapprima con rapidità, sino a che avviene la separazione del sale, la quale, pel calore che vien posto in libertà, ritarda alquanto il raffreddamento: e ciò si fa in modo continuo finchè non si solidifichi anche il solvente, ed allora la temperatura rimane lungamente costante in un punto fisso.

**13.** Finalmente, ad imitazione del Rudberg che studiò anche qualche lega ternaria di metalli, abbiamo pure voluto fare delle prove su alcuni pochi miscugli formati di tre sostanze; ed i risultati furono i seguenti:

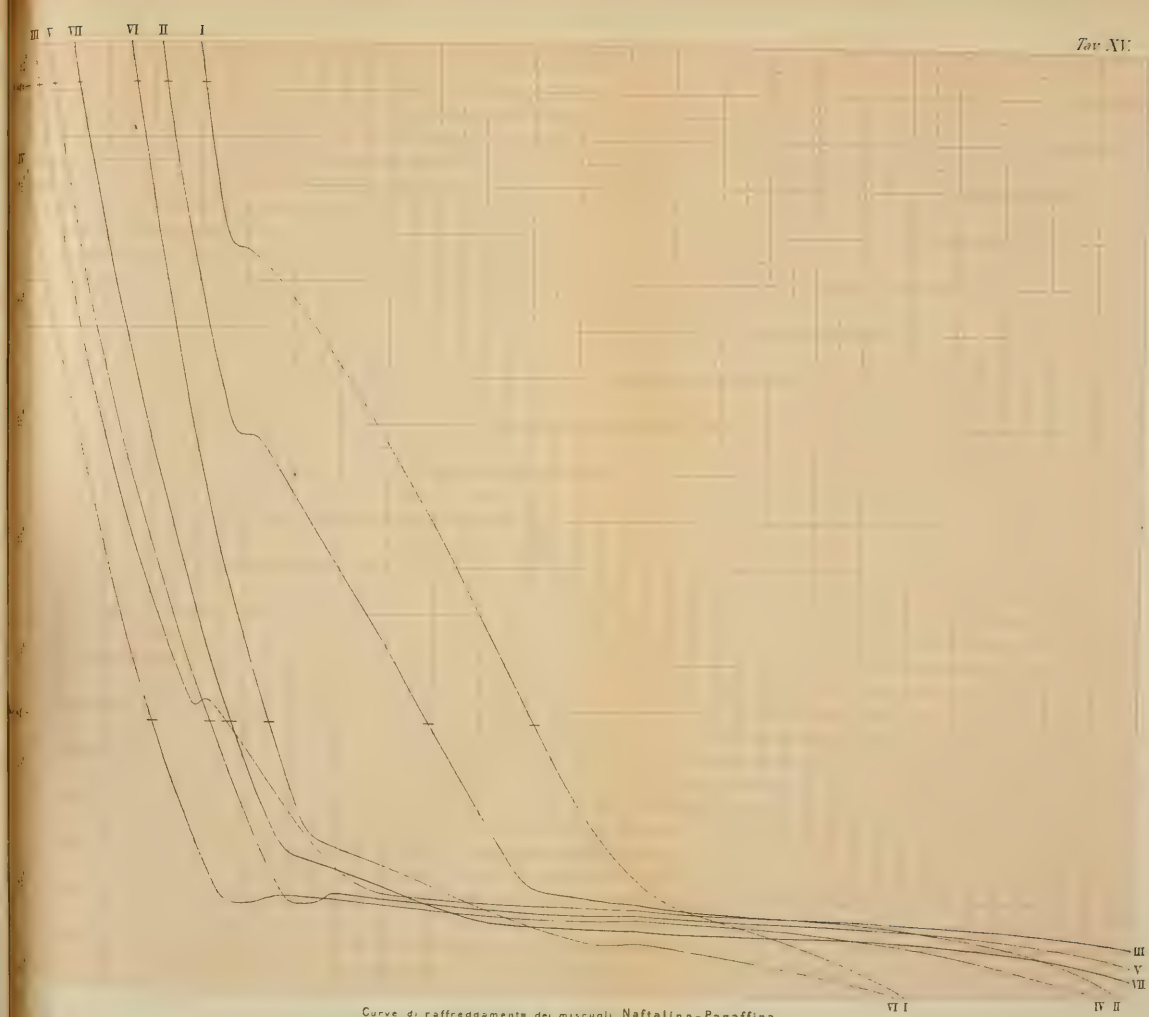
NAFTALINA f. a 79°,3 - PARAFFINA f. a 52°,4 - SPERMACETI f. a 43°,9

| MISCUGLIO | COMPOSIZIONE | | | PUNTI DI FUSIONE | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Naftalina | Paraffina | Spermaceti | 1° | 2° | 3° |
| 1° | 1 | 1 | 1 | 51°,3 | 40°,2 | 33°,0 |
| 2° | 1 | 2 | 2 | 40°,5 | 38°,5 | 33°,0 |
| 3° | 1 | 1 | 2 | 40°,0 | 37°,8 | 34°,0 |

Qui, com'era da aspettarsi, abbiamo non più due, ma tre punti distinti di fusione, l'ultimo dei quali accenna a rimaner fisso.

Chiudiamo questa nota ringraziando vivamente il Ch.mo Professore A. NACCARI che in tutto il corso del lavoro ci fu largo di suggerimenti e di aiuti.

Dal Laboratorio di Fisica dell'Università di Torino,
Aprile 1884.




Curve di raffreddamento dei miscugli Naftalina-Paraffina

Il Socio Cav. Prof. Alessandro Dorna, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, facendo seguito a lavori dell'Osservatorio presentati all'Accademia precedentemente, presenta la seguente sua Nota:

# PRIME OSSERVAZIONI

CON

# ANELLI MICROMETRICI

## ALL' OSSERVATORIO DI TORINO

## NOTA

### sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici con stelle.

Cogli oculari con anelli, applicati nell'occasione della cometa Pons al cercatore di comete, avendo, come dissi nella Nota precedente, osservate alcune coppie di stelle che pure determinano i raggi degli anelli, trascrivo in questa seconda Nota le osservazioni ed i risultamenti che ne derivano, ed alcune traccie dei calcoli fatti per trovarli, con qualche ricerca che mi sembra interessante.

### I.

*Anello micrometrico semplice.*

Nella sera del 13 Gennaio osservai due volte le stelle

8169 *BAC* Gr. 5½ 8170 *BAC* Gr. 6

del catalogo della Società di Londra. Alla prima di queste 8 e 9 della costellazione dei Pesci, nell'opera di Heis è pure as-

segnata la grandezza 5, 6, e la seconda non è menzionata. Il cielo essendo purissimo mi parvero di 5ª e 6ª, 5ª grandezza.

*Osservazioni.*

| Osservazione 1ª | | Osservazione 2ª | |
|---|---|---|---|
| 8169 (nord centro) | 8170 (sud centro) | 8169 (nord centro) | 8170 (sud centro) |
| $2^h\ 21^m\ 43^s$ | $2^h\ 22^m\ 2^s$ | $2^h\ 25^m\ 4^s$ | $2^h\ 25^m\ 23^s$ |
| 21 55 | 22 14 | 25 16 | 25 36 |
| 23 59 | 24 17 | 27 19 | 27 39 |
| 24 10 | 24 30 | 27 31 | 27 51 |
| Medie 2 22 56,75 | 2 23 15,75 | 2 26 17,50 | 2 26 37,25 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 Gennaio | $19^h\ 39^m\ 55^s, 32$ | correzione | . . . | $-1^m\ 38^s, 92$ |
| 14 » | 19 44 17, 58 | » | . . . | $-1\ 42, 34$ |
| | | Ritardo in un giorno | — | 3, 42 |

Gli elementi per la riduzione della posizione media delle stelle nel catalogo alla loro posizione apparente nell'ora dell'osservazione sono questi:

| Stelle | Ascensione retta | Precessione annua | Variazione secolare | Moto proprio | log $a$ | log $b$ | log $c$ | log $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8169 *BAC* | $23^h19^m14^s,69$ | $3^s,069$ | $-0^s,0021$ | $+0^s,010$ | 8,8170 | 8,0716 $n$ | 0,4870 | 6,6974 |
| 8170 » | 23 19 33 ,74 | 3 ,069 | −0 ,0020 | +0 ,003 | 8,8171 | 8,0683 $n$ | 0,4871 | 6,5337 |
| | Dist. polare | | | | log $a'$ | log $b'$ | log $c'$ | log $d'$ |
| 8169 *BAC* | $89°33'53'',9$ | $-19'',74$ | $-0'',079$ | $+0'',10$ | 9,6388 $n$ | 7,8735 $n$ | 1,2953 $n$ | 9,2477 $n$ |
| 8170 » | 89 42 5 ,8 | −19 ,74 | −0 , 079 | +0 ,05 | 9,6384 $n$ | 7,7098 $n$ | 1,2954 $n$ | 9,2444 $n$ |
| | | | | | log $A$ | log $B$ | log $C$ | log $D$ |
| | | | Mezzanotte 12 Gennaio | | 0,8517 $n$ | 1,2769 | 9,3319 | 0,9339 |
| | | | » 13 » | | 0,8700 $n$ | 1,2737 | 9,3381 | 0,9334 |

Per la riduzione della posizione media al principio del 1884 usai la formola del $BAC$

$$[1]\ldots \qquad \left(p+\mu+\frac{s}{100}\frac{y}{2}\right)y$$

in cui $p$ è la precessione, $\mu$ il moto proprio, $s$ la variazione secolare di $p$, ed $y$ il numero di anni trascorsi.

Per la riduzione della posizione media in principio dell'anno all'apparente nella sera del 13 Gennaio, adoperai le formole dello stesso $BAC$:

$$[2]\ldots \qquad Aa+Bb+Cc+Dd \quad \text{per l'ascensione retta}$$

$$Aa'+Bb'+Cc'+Dd' \quad \text{per la distanza polare.}$$

Ho così trovato le coordinate apparenti:

| Stelle | Ascensione retta | Declinazione |
|---|---|---|
| 8169 $BAC$ | $23^h\ 20^m\ 59^s,33$ | $+0^\circ\ 37'\ 17'',0$ |
| 8170 » | 23 21 18 , 15 | +0 29 6 ,9 |

Dalle medie dei tempi dei contatti, trascritte più sopra, corrette del ritardo del pendolo, risultano, sottraendone le ascensioni rette delle stelle, gli angoli orarii del centro del micrometro nelle due osservazioni:

| Stelle | Osservazione 1ª | Osservazione 2ª |
|---|---|---|
| 8169 $BAC$ | $3^h\ 0^m\ 17^s,65$ | $3^h\ 3^m\ 38^s,40$ |
| 8170 » | 3 0 17 , 83 | 3 3 39 , 33 |
| Medie | 3 0 17 , 74 | 3 3 38 , 86 |
| $t_0=$ | $45^\circ\ 4',26''$ | $44^\circ\ 54',43''$ |

Con questi e colla latitudine $\varphi = 45^\circ 4' 8''$ ricavai dalla formola

$$[3] \ldots\ldots \qquad \tan N = \cot \varphi \cos t_0$$

i numeri

$$N = 35^\circ 9' 53'' \quad \text{e} \quad 34^\circ 45' 52'';$$

e dedussi, usando il coefficiente $k' = 57''$ della rifrazione, dalla formola

$$[4] \ldots\ldots \qquad \frac{-k' \operatorname{sen}(\delta' - \delta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta' + \delta}{2} + N\right)}$$

per entrambe le osservazioni, la correzione $0'',4$ da farsi alla differenza della declinazione, $\delta' - \delta$; in modo che tal differenza, tenendo conto della rifrazione, è $(\delta' - \delta) = -8' 9'',7$.

Trovata $N$ colla [3], è facilissimo avere le correzioni a $\delta$ e $\delta'$ per la rifrazione colle formole

$$[4'] \ldots\ldots \qquad k' \cot(\delta + N);$$

$$[4''] \ldots\ldots \qquad k' \cot(\delta' + N).$$

Queste correzioni nell'esempio attuale sono rispettivamente uguali ad $1' 19'',1$ ed $1' 19'',5$, la cui differenza è appunto $0'',4$ data dalla [4], che è una espressione approssimata della formola più esatta

$$[4'''] \ldots\ldots \qquad k' \cot(\delta' + N) - k' \cot(\delta + N).$$

L'uso della [4'''], ossia della [4'] e [4''], invece di fare ricorso alla [4], è inoltre conveniente per la circostanza, siccome non è difficile dimostrare, che è più esatto (tanto con osservazioni ad est che ad ovest) il calcolo delle quantità $\mu$ e $\mu'$ delle formole seguenti, applicando alle declinazioni $\delta$ e $\delta'$ le rispettive correzioni [4'] e [4''] per la rifrazione.

Cercai inoltre le correzioni per la curvatura delle traiettorie delle due stelle nell'anello, espresse dalla formola

$$[5] \ldots\ldots \qquad +\frac{1}{2} \operatorname{sen} 1'' (\mu' - \mu)(\mu' + \mu) \tan \frac{1}{2}(\delta' + \delta),$$

in cui

$$[6] \ldots\ldots \qquad \mu = \frac{15}{2} \tau \cos \delta \qquad \mu' = \frac{15}{2} \tau' \cos \delta'$$

essendo $\tau$ e $\tau'$ gli intervalli di tempo siderale trascorso fra i contatti di ciascuna stella con ciascuna periferia dell'anello. In entrambe le osservazioni, essendo $\tau = 147^s$, $\tau' = 148^s$, la correzione è la stessa, ed insensibile perchè $= 0'',0004$.

Nel Brünnow e nel Chauvenet, per calcolare il valore numerico $r$ dei raggi dell'anello micrometrico con stelle, sono ricavate le formole

$$[7]\ldots \quad \tan A = \frac{\mu' + \mu}{d' - d} \quad \tan B = \frac{\mu' - \mu}{d' - d} \quad r = \frac{d' - d}{r \cos A \cos B}$$

in cui $d' - d$ è la differenza $(\delta' - \delta)$ più la correzione [5].

Ivi, per dedurre le formole [7], si suppongono le stelle a nord e sud del centro dell'anello (circostanza favorevole per la precisione di $r$); senza dichiarare che le formole trovate sono generali, dopo averle dedotte dalle fondamentali

$$\mu = r \operatorname{sen} \gamma \qquad d = r \cos \gamma$$

$$[a]\ldots\ldots \qquad \mu' = r \operatorname{sen} \gamma' \qquad d' = r \cos \gamma'$$

inesattamente, ponendo

$$[b]\ldots\ldots \qquad d' - d = r(\cos \gamma' + \cos \gamma)\ .$$

Che le [7] siano generali è manifesto per le seguenti operazioni fatte sulla $[a]$ (senza alterarne il significato scrivendo la $[b]$)

$$\mu' + \mu = r(\operatorname{sen} \gamma' + \operatorname{sen} \gamma) \qquad \mu' - \mu = r(\operatorname{sen} \gamma' - \operatorname{sen} \gamma)$$

$$d' - d = r(\cos \gamma' - \cos \gamma) \qquad A' + B' = \gamma''\ ;\ A' - B' = \gamma$$

$$\mu' + \mu = 2r \operatorname{sen} A' \cos B' \qquad \mu' - \mu = 2r \cos A' \operatorname{sen} B'$$

$$d' - d = -2r \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B'$$

$$[7']\ldots \tan A' = -\frac{d' - d}{\mu' - \mu} \quad \tan B' = -\frac{d' - d}{\mu' + \mu} \quad r = -\frac{d' - d}{2 \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B'}$$

$$A' = -90^\circ + B \qquad B' = 90^\circ + A\ .$$

Le formole generali [7'] sono precisamente le [7], e fanno vedere che osservando a nord e sud del centro stelle, le cui declinazioni differiscano di quantità sempre meno diverse dal diametro dell'anello cresce la precisione del valore di $r$ dato dalle formole, perchè $\mu'$ e $\mu$ tendono entrambi verso zero e, per con-

seguenza, il valore numerico del denominatore di $r$, verso il suo massimo valore.

Colle formole [6] e [7] facendo $d'-d=-8'\,9'',7=-489'',7$ ho trovato i seguenti valori pei raggi dell'anello:

| | | |
|---|---|---|
| Osservazione 1 | 18′ 53″, 1 | 15′ 58″, 1 |
| » 2 | 18 53 , 1 | 15 56 , 6 |

Nella sera delli 23 Gennaio osservai una volta le stelle della Balena:

8327 *BAC* Gr. 7 e 21 *BAC* Gr. 6.

Mi parvero di 6ª, e 4ª, 5ª grandezza. Nell'opera di Heis alla seconda è assegnata la grandezza 5 , 4 e la prima non è considerata.

*Osservazione.*

| 8327 *BAC* (sud centro) | 21 *BAC* (nord centro) |
|---|---|
| $2^h\ 44^m\ 56^s,5$ | $2^h\ 57^m\ 56^s$ |
| 45 15 | 58 12 |
| 46 45 | 59 42 |
| 47 1 | 59 59 |
| Medie 2 45 59 ,375 | 2 58 57 , 25 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 Gennaio | $20^h\ 23^m\ 6^s,94$ | correzione ..... | $-2^m\ 12^s,57$ |
| 25 » | 20 31 37 , 21 | » ..... | − 2 20 , 48 |
| | | Ritardo in due giorni | − 7 , 91 |

*Elementi per la riduzione delle stelle.*

| Stelle | Ascensione retta | Precessione | Variazione secolare | Moto proprio | log $a$ | log $b$ | log $c$ | log $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8327 *BAC* | $23^h 50^m 38^s,45$ | $3^s,087$ | $-0^s,0096$ | $+0^s,013$ | 8,8422 | 7,4535 $n$ | 0,4895 | 8,3002 $n$ |
| 21 » | 0 3 37 ,63 | 3 ,064 | −0 ,0085 | −0 ,004 | 8,8417 | 7,0412 | 0,4864 | 8,2896 $n$ |
| | Dist. polare | | | | log $a'$ | log $b'$ | log $c'$ | log $d'$ |
| 8327 *BAC* | 106° 40′ 54″,4 | −20″,04 | −0″,018 | −0″,04 | 9,6064 $n$ | 9,4576 | 1,3019 $n$ | 8,6109 $n$ |
| 21 » | 106 17 27 ,4 | −20 ,05 | +0 ,007 | +0 ,22 | 9,6242 $n$ | 9,4479 | 1,3022 $n$ | 8,1994 |
| | | | | | log $A$ | log $B$ | log $C$ | log $D$ |
| | | | | Mezzanotte 22 Gennaio | 1,0027 $n$ | 1,2369 | 9,3882 | 0,9279 |
| | | | | » 23 » | 1,0146 $n$ | 1,2319 | 9,3931 | 0,9272 |

Colle [1] e [2] trovai le coordinate apparenti:

| Stelle | Ascensione retta | Declinazione |
|---|---|---|
| 8237 *BAC* | $23^h\ 52^m\ 23^s, 63$ | $-16^\circ\ 29'\ 35'', 4$ |
| 21 » | 0 5 21 , 51 | $-16$ 6 17 , 5 |

L'angolo orario $t_0$ del centro dell'anello mi risultò:

| | |
|---|---|
| Dalla 8237 *BAC* | $2^h\ 51^m\ 22^s, 42$ |
| » 21 » | 2 51 22 , 42 |
| Media | 2 51 22 , 42 |

$$t_0 = 42^\circ\ 50'\ 36''.$$

Con questo, dedotto dalla [3] $N = 36^\circ\ 11'4''$, ricavai dalla [4] la correzione $-3'', 34$ da farsi alla differenza delle declinazioni per la rifrazione; in modo che tale differenza corretta è:

$$= 23'\ 14'', 6.$$

Colle [4'''] si ha pure $155'', 93 - 159'', 27 = -3'', 34$.

La correzione alla differenza delle declinazioni, per la curvatura, che ho calcolato colle [5] e [6] è $= 0'', 01$; in modo che per il calcolo dei raggi colle [7] feci

$$d' - d = 23'\ 14'', 6 = 1394'', 6,$$

e trovai

$$18'\ 51'', 3\ ; \qquad 15'\ 51'', 8.$$

---

Il 4 Febbraio, ultimo giorno in cui provai il micrometro, osservai quattro volte le due stelle 419 *BAC* Gr. 6 e 420 *BAC* Gr. 3 della Balena. Ma il cielo era nebbioso, ed in quella sera un po' irregolari i contorni dell'anello, per un pulviscolo depositatosi sul vetro che lo porta.

*Osservazioni.*

| Osservazioni | 419 *BAC* (nord centro) | 420 *BAC* (sud centro) |
|---|---|---|
| 1 | $3^h$ $29^m$ $27^s$ | $3^h$ $29^m$ $34^s$ |
| | 29 35 | 29 47 |
| | 31 47 | 31 39 |
| | 31 58 | 31 52 |
| Medie | 3 30 41,75 | 3 34 43,00 |
| 2 | 3 32 16 | 3 32 24 |
| | 32 25 | 32 37 |
| | 34 35 | 34 28 |
| | 34 49 | 34 41 |
| Medie | 3 33 31,25 | 3 33 32,50 |
| 3 | 3 35 3 | 3 35 11 |
| | 35 14 | 35 23 |
| | 37 22 | 37 14 |
| | 37 36 | 37 28 |
| Medie | 3 36 18,75 | 3 36 19,00 |
| 4 | 3 37 58 | 3 38 7 |
| | 38 8 | 38 19 |
| | 40 18 | 40 10 |
| | 40 32 | 40 23 |
| Medie | 3 39 14,00 | 3 39 14,75 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 Febbraio | $21^h$ | $13^m$ | $18^s$, 14 | correzione ..... | $-2^m$ $56^s$, 71 |
| 5 » | 21 | 17 | 23, 62 | » ..... | $-3$ 0, 43 |
| | | | | Ritardo in un giorno — | 3, 72 |

*Elementi per la riduzione delle stelle.*

| Stelle | Ascensione retta | Precessione | Variazione secolare | moto proprio | log $a$ | log $b$ | log $c$ | log $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 419 *BAC* | $1^h 16^m 29^s,82$ | $3^s,003$ | $-0^s,0002$ | $+0^s,009$ | 8,8044 | 8,3444 | 0,4776 | 7,9884 $n$ |
| 420 » | 1 16 31 ,70 | 3 ,002 | −0,0002 | −0 ,002 | 8,8046 | 8,3448 | 0,4773 | 7,9969 $n$ |
| | Dist. polare | | | | log $a'$ | log $b'$ | log $c'$ | log $d'$ |
| 419 *BAC* | 98° 47′ 14″,7 | −18″,95 | +0″,144 | −0″,05 | 9,6803 $n$ | 9,1594 | 1,2776 $n$ | 9,5154 |
| 420 » | 98 57 30 ,1 | −18 ,95 | +0 ,144 | +0 ,20 | 9,6810 $n$ | 9,1677 | 1,2775 $n$ | 9,5155 |
| | | | | | log $A$ | log $B$ | log $C$ | log $D$ |
| | | | Mezzanotte 3 Febbraio | | 1,1198 $n$ | 1,1628 | 9,4413 | 0,9187 |
| | | | » 4 » | | 1,1275 $n$ | 1,1551 | 9,4451 | 0,9178 |

Trovai colle [1] e [2] le coordinate apparenti:

| Stelle | Ascensione retta | Declinazione |
|---|---|---|
| 419 *BAC* | $1^h\ 18^m\ 12^s,45$ | $-8^\circ\ 36'\ 35'',4$ |
| 420 » | 1 18 13,92 | −8 47 1,4 |

Gli angoli orarii del centro del micrometro durante le osservazioni furono:

| | Osserv. 1 | Osserv. 2 | Osserv. 3 | Osserv. 4 |
|---|---|---|---|---|
| 419 *BAC* | $2^h9^m31^s,64$ | $2^h12^m21^s,14$ | $2^h15^m8^s,63$ | $2^h18^m3^s,88$ |
| 420 » | 2 9 31,42 | 2 12 20,92 | 2 15 7,41 | 2 18 3,16 |
| Medie | 2 9 31,53 | 2 12 21,03 | 2 15 8,02 | 2 18 3,52 |
| $t_0 =$ | $32^0\,22'\,53''$ | $33^0\ 5'\ 15''$ | $33^0\,47'\,0''$ | $34^0\,30'\,53''$ |

A questi angoli orarii corrispondono per $N$ i valori

$40^0\ 6'\ 49''$ | $39^0\ 53'\ 24''$ | $39^0\ 39'\ 44''$ | $39^0\ 25'\ 17''$.

Le correzioni alla differenza delle declinazioni per la rifrazione, per conseguenza, sono:

$+0'',6$ | $+0'',6$ | $+0'',7$ | $+0'',7$.

La coppia di stelle essendo più vicina all' equatore della precedente, la correzione per la curvatura è inferiore a $0'',01$.

Il valore di $d'-d$ per le [7] è adunque $-10''25'',4 = -625'',4$ per le due prime osservazioni, e $-10'25'',3 = -625''',3$ per le altre due. Così trovai i seguenti valori pei raggi:

| | | |
|---|---|---|
| Osserv. 1 | 18′ 48″, 8 | 16′ 23″, 7 |
| » 2 | 18 59 , 1 | 16 9 , 8 |
| » 3 | 18 59 , 1 | 15 58 , 0 |
| » 4 | 19 4 , 1 | 16 9 , 8 |

Per le circostanze sfavorevoli, che ho riferito, terrò solamente conto della terza di queste quattro osservazioni, la quale differisce meno dalle precedenti. Tuttavia, farò vedere che anche con tutte, ogni residuo è inferiore all'errore massimo che può provenire in $r$ dallo sbaglio di un secondo in ciascuno dei 4 tempi osservati; eccettuato il residuo del maggior valore trovato per il raggio minore, il quale supera di 5″ quel limite.

Differenziando rispetto al tempo le [6] e [7] ho trovato la formola

$$[8]\ldots \qquad dr = \frac{15}{2}\cos\delta'\left(\tan A\frac{\cos A}{\cos B} + \tan B\frac{\cos B}{\cos A}\right)\frac{d\tau'}{2}$$

$$+\frac{15}{2}\cos\delta\left(\tan A\frac{\cos A}{\cos B} - \tan B\frac{\cos B}{\cos A}\right)\frac{d\tau}{2}\,.$$

Facile a calcolarsi, perchè i coefficienti di $d\tau$ e $d\tau$, contengono solamente quantità già trovate per la ricerca di $r$. Questi coefficienti presi entrambi positivi (con $A$ e $B$ nel primo quadrante come bastano per la ricerca dei raggi) si ha il massimo errore $dr$ proveniente dallo sbaglio di un secondo in ciascuno dei quattro tempi osservati ponendo $d\tau' = d\tau = 2^s$.

Colla prima osservazione del 13 Gennaio, la quale dà per $r$ un valore poco differente dalla media di tutti i suoi valori, mi risultò che il suddetto limite supera 14″ per entrambe le periferie dell'anello. Trascrivo questo calcolo, fatto applicando i logaritmi addittivi, colle formole [6], [7] e [8].

*Prima osservazione del* 13 *Gennaio.*

$\delta = 0^0\,37'\,17'',0$ $\delta' = 0^0\,29'\,6'',9$ $d' - d = -489'',7$

| Periferia maggiore. | | | | Periferia minore. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^h\ 24^m\ 10^s$ | | $2^h\ 24^m\ 30^s$ | | $2^h\ 23^m\ 59^s$ | | $2^h\ 24^m\ 17^s$ | |
| 21 43 | | 22 2 | | 21 55 | | 22 14 | |
| 2 27 | | 2 28 | | 2 4 | | 2 3 | |
| $\tau = 147^s$ | | $\tau' = 148^s$ | | $\tau = 124^s$ | | $\tau' = 123^s$ | |
| $\log \frac{15}{2}$ | 0,87506 | | 0,87506 | | | | |
| $\log \cos \delta$ | 9,99997 | $\log \cos \delta'$ | 9,99998 | | | | |
| | 0,87503 | | 0,87504 | | 0,87503 | | 0,87504 |
| $\log \tau =$ | 2,16732 | $\log \tau' =$ | 2,17026 | | 2,09342 | | 2,08991 |
| $\log \mu =$ | 3,04235 | $\log \mu' =$ | 3,04530 | | 2,96845 | | 2,96495 |
| | 7,83351 | | 3,04235 | | 2,96495 | | 7,90804 |
| $\log (\mu' - \mu) =$ | 0,87586 | | 0,00295 | | 0,00350 | | 0,87299 |
| $\log (d' - d)$ | 2,68993 | | 0,30251 | | 0,30278 | | 2,68993 |
| $\log \tan B$ | 8,18593 | $\log (\mu' + \mu) =$ | 3,34486 | | 3,26773 | $\log \tan B$ | 8,18306 |
| $\log \cos B$ | 9,99995 | | 2,68993 | | 2,68993 | $\log \cos B$ | 9,99995 |
| | | $\log \tan A =$ | 0,65463 | $\log \tan A$ | 0,57780 | | |
| | | $\log \cos A$ | 9,33468 | $\log \cos A$ | 9,40753 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\log(d'-d)$ | 2,68993 | | | |
| $-\log 2$ | 9,69897 | | | |
| | 2,38890 | | | 2,33890 |
| $-\log\cos A=$ | 0,66532 | | | 0,59247 |
| $-\log\cos B=$ | 5 | | | 5 |
| $\log r=$ | 3,05427 | $r=18'\,53'',1$ | $15'\,18'',1$ | 2,98142 |

$$d\tau'=d\tau=2^s$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,65493 | 8,18593 | 0,57780 | 8,18306 |
| 9,33468 | 9,99995 | 9,40753 | 9,99995 |
| 5 | 0,66532 | 5 | 0,59247 |
| 9,98966 | 8,85120 | 9,98538 | 8,77548 |
| 8,85120 | 1,10668 | 8,77548 | 1,18225 |
| 1,13846 | 0,87503 | 1,20990 | 0,87503 |
| 1,16894 | 0,83291 | 1,23589 | 0,83276 |
| 0,02014 | 6'', 81 | 0,01137 | 6'', 80 |
| 0,87504 | 7 , 85 | 0,87504 | 7 , 70 |
| 0,89518 | $dr=14'',7$ | 0,88641 | $dr=14'',5$ |
| 7'' 85 | | 7'', 70 | |

Questo limite d'errore $dr$ dipende anche dalla posizione delle stelle nel micrometro e dalla differenza delle loro declinazioni. Tal posizione e differenza nelle quattro osservazioni ultime è stata prossimamente la stessa, e furono poco differenti dalle medesime quelle della coppia di stelle del 13 Gennaio. Le stelle del 23 Gennaio differiscono di più e sono più australi delle precedenti.

Ho fatto il calcolo del limite d'errore, come sopra, cogli elementi di tutte e sette le osservazioni e trovai i seguenti errori possibili nei raggi per lo sbaglio di un secondo nei tempi:

| | Periferia maggiore | Periferia minore |
|---|---|---|
| 13 Gennaio | | |
| Osservaz. 1 | 14″, 7 | 14″, 5 |
| » 2 | 14 , 7 | 14 , 5 |
| 23 Gennaio | 11 , 3 | 12 , 3 |
| 4 Febbr. | | |
| Osservaz. 1 | 14 , 4 | 14 , 4 |
| » 2 | 14 , 5 | 14 , 4 |
| » 3 | 14 , 5 | 14 , 3 |
| » 4 | 14 , 7 | 14 , 4 |

Colle sette osservazioni risulta meglio determinato il raggio maggiore dal minore. Il primo avrebbe il valore numerico 18′55″,6 coll'errore probabile 1″,4 ed il secondo il valore 16′4″,0 coll'errore probabile 2″, 8. I residui delle osservazioni relative al maggior raggio sono —2″,5; —2″,5; —4″,3; —6″,8; +3″, 5; +3″,5; +8″,8 e l'errore probabile è 3″, 7. I residui delle osservazioni relative al raggio minore sono —5″,9; —7″,4; —12″,2; +19″,7; +5″,5; —6″,0; +5″,8 e l'errore probabile è 7″, 4.

Ma ho detto, che credo di dover tenere solamente conto della terza delle quattro osservazioni del 4 Febbraio (pel tempo poco favorevole e per le irregolarità dei contorni dell'anello micrometrico in quella sera, cagionate da materie depositatesi acci-

dentalmente sul vetro che lo porta). Da quell'osservazione e dalle tre dei giorni precedenti mi risultarono, pei raggi, i valori:

18′ 54″, 2 coll'errore probabile 1″, 1
15 56 , 1 » 1 , 0 .

E le rispettive osservazioni hanno i residui $-1'',1$; $-1'',1$; $-2'',9$; $+4'',9$ coll'errore probabile $2'',3$; e $+2'',0$; $+0'',5$; $-4'',3$; $+1'',9$ coll'errore probabile $2'',0$.

## II.

*Doppio anello micrometrico.*

Nella sera del 12 Gennaio, in cui la cometa Pons era vicino alle stelle $\beta$ e $\gamma$ della costellazione dei Pesci, ossia alle

8031 *BAC* Gr. 5 8105 *BAC* Gr. 4½

(che Heis giudicò di Gr. 5,4 e Gr. 4) la riferii a queste col doppio anello micrometrico; e da due osservazioni posso anche dedurre i valori angolari dei raggi delle quattro periferie, come segue.

*Osservazioni.*

| Osservazione 1ª | | Osservazione 2ª | |
|---|---|---|---|
| 8031 *BAC* (nord centro) | 8105 *BAC* (sud centro) | 8031 *BAC* (nord centro) | 8105 *BAC* (sud centro) |
| $3^h\ 27^m 32^s$ | $3^h 40^m 42^s$ | $4^h\ 2^m\ 4^s$ | $4^h 15^m\ 8^s$ |
| 27 48 | 40 57 | 2 21 | 15 23 |
| 29 8 | 42 16 | 3 45 | 16 40 |
| 29 28 | 42 37 | 4 9 | 16 59 |
| 31 31 | 44 44 | 5 49 | 19 23 |
| 31 53 | 45 5 | 6 13 | 19 42 |
| 33 10 | 46 22 | 7 36 | 20 56 |
| 33 26 | 46 38 | 7 53 | 21 12 |
| Medie 3 30 29,50 | 3 43 40,125 | 4 4 58,75 | 4 18 10,375 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | |
|---|---|---|
| 12 Gennaio ..... | $19^h\ 35^m\ 32^s, 05$ | $-1^m\ 35^s, 15$ |
| 13 » ..... | 19 39 55 , 32 | $-1$ 38 , 92 |
| | Ritardo in un giorno | $-$ 3 , 77 |

*Elementi per la riduzione delle stelle.*

| Stelle | Ascensione retta | Precessione annua | Variazione secolare | Moto proprio | log $a$ | log $b$ | log $c$ | log $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8031 *BAC* | $22^h 56^m 14^s,77$ | $3^s,051$ | $-0^s,0019$ | $+0^s,006$ | 8,8075 | 8,2632 $n$ | 0,4845 | 7,5283 |
| 8105 » | 23 9 23,39 | 3,058 | −0,0016 | +0,052 | 8,8136 | 8,1648 $n$ | 0,4854 | 7,4471 |
| | Dist. polare | | | | log $a'$ | log $b'$ | log $c'$ | log $d'$ |
| 8031 *BAC* | 86°59′11″,4 | −19″,28 | −0″,122 | 0,00 | 9,6511 $n$ | 8,7037 $n$ | 1,2852 $n$ | 9,4387 $n$ |
| 8105 » | 87 32 7,9 | −19,57 | −0,098 | −0,04 | 9,6464 $n$ | 8,6228 $n$ | 1,2915 $n$ | 9,3405 $n$ |
| | | | | | log $A$ | log $B$ | log $C$ | log $D$ |
| | | | | Mezzanotte 11 Gennaio | 0,8323 $n$ | 1,2800 | 9,3256 | 0,9344 |
| | | | | » 12 » | 0,8517 $n$ | 1,2769 | 9,3319 | 0,9339 |

Ho trovato colle [1] e [2] le coordinate apparenti:

| Stelle | Ascensione retta | Declinazione |
|---|---|---|
| 8031 *BAC* | $22^h\ 57^m\ 58^s,57$ | $3^0\ 11'\ 46'',1$ |
| 8105 » | 23 11 9,06 | 2 39 3,1 |

Mi risultarono gli angoli orarii del centro del micrometro:

| | Osservazione 1ª | Osservazione 2ª |
|---|---|---|
| Dalla 8031 *BAC* | $4^h\ 30^m\ 54^s,84$ | $5^h\ 5^m\ 24^s,09$ |
| » 8105 » | 4 30 54,97 | 5 5 25,22 |
| Medie | 4 30 54,90 | 5 5 24,65 |
| $t_0 =$ | $67^0\ 43'\ 43'',5$ | $76^0\ 21'\ 10^0$ |

Colla [3] a questi corrispondono per $N$ gli angoli

$$42^0\ 42'\ 46'' \quad | \quad 37^0\ 35'\ 53'';$$

onde colla [4] le correzioni 1'', 1 ed 1'', 3 per la rifrazione alla differenza delle declinazioni.

La [5] dà pella correzione per la curvatura appena 0'',011; onde nella ricerca dei raggi colle [6] e [7] feci nella prima osservazione

$$d' - d = -32'41'',9 = -1961'',9$$

e nella seconda

$$-32'41'',7 = -1961'',7.$$

Ho così trovati i seguenti valori pei raggi:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Osservazione 1ª | 47′14″,3 | 43′34″,2 | 26′29″,8 | 22′36″,2 |
| » 2ª | 47 32 ,4 | 43 43 ,6 | 26 31 ,1 | 22 39 ,5 |

---

Nella sera del 17 Gennaio osservai una volta le due stelle della costellazione dei Pesci:

8349 *BAC* Gr. 4 ½ 8368 *BAC* Gr. 5.

*Osservazione.*

| 8349 *BAC* (sud centro) | 8368 *BAC* (nord centro) |
|---|---|
| $2^h$ $36^m$ $38^s$ | $2^h$ $40^m$ $0^s$, 5 |
| 36 51 | 40 14 |
| 38 4 | 41 25 |
| 38 21 ,5 | 41 25 |
| 47 7 | 44 32 |
| 41 24 | 44 48 |
| 42 35 | 45 59 , 5 |
| 42 50 | 46 15 |
| Medie 2 39 43 ,81 | 2 43 7 , 375 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 Gennaio ..... | $19^h$ $57^m$ $25^s$, 75 | correzione | $-1^m$ $52^s$, 90 |
| 18 » ..... | 20 1 40 , 18 | » | $-1$ 56 , 15 |
| | | Ritardo in un giorno | — 3 , 25 |

*Elementi per la riduzione delle stelle.*

| Stelle | Ascensione retta | Precessione annua | Variazione secolare | Moto proprio | log $a$ | log $b$ | log $c$ | log $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8349 *BAC* | $23^h 54^m 16^s,11$ | $3^s,075$ | $-0^s,0039$ | $+0^s,007$ | 8,8269 | 7,2250 $n$ | 0,4878 | 7,9033 $n$ |
| 8368 » | 23 57 39 ,54 | 3 ,072 | $-0^s,0035$ | $+0^s,004$ | 8,8267 | 6,8360 $n$ | 0,4875 | 7,8837 $n$ |
| | Dist. polare | | | | log $a'$ | log $b'$ | log $c'$ | log $d'$ |
| 8349 *BAC* | $96^0 50' 51'',7$ | $-20'',05$ | $-0$ ,011 | $+0$ ,02 | 9,6313 $n$ | 9,0763 | 1,3021 $n$ | 8,3980 $n$ |
| 8368 » | 96 32 48 ,5 | $-20$ ,05 | $-0$ ,005 | $-0$ ,05 | 9,6334 $n$ | 9,0570 | 1,3022 $n$ | 8,0092 $n$ |
| | | | | | log $A$ | log $B$ | log $C$ | log $D$ |
| | | | | Mezzanotte del 16 Gennaio | 0,9202 $n$ | 1,2630 | 9,3559 | 0,9318 |
| | | | | » 17 » | 0,9354 $n$ | 1,2591 | 9,3616 | 0,9312 |

Trovai colle [1] e [2] le coordinate apparenti:

| Stelle | Ascensione retta | Declinazione |
|---|---|---|
| 8349 *BAC* | $23^h\ 56^m\ 0^s, 91$ | $-6^0\ 39'\ 31'', 6$ |
| 8368 » | 23 59 24 , 16 | − 6 21 25 , 8 |

L'angolo orario del centro del micrometro mi risultò:

| | |
|---|---|
| Dedotto dalla 8349 *BAC* | $2^h\ 41^m\ 49^s, 19$ |
| » 8368 » | 2 41 49 , 50 |
| Media | 2 41 49 , 35 |

$$t_0 = 40^0\ 27'\ 20''$$

a cui corrisponde $N = 37^0\ 12'\ 6''$.

Onde la correzione $-1'', 2$ da farsi alla differenza delle declinazioni per la rifrazione.

Non calcolai la correzione per la curvatura ritenendola inferiore a $0'', 1$; cosicchè feci $d' - d = 18'\ 4'', 6 = 1084'', 6$ e trovai per i raggi i valori

$$47'\ 14'', 2\ ;\quad 43'\ 45'', 3\ ;\quad 26'\ 36'', 4\ ;\quad 22'\ 32'', 7.$$

---

Nella sera delli 22 Gennaio osservai una volta le quattro stelle dell'acquario

8232 *BAC* Gr. 5 ; 8246 *BAC* Gr. 5 ½ ;

8288 *BAC* Gr. 6 ; 8297 *BAC* Gr. 6 .

Nell'opera di Heis alle tre prime sono assegnate le gran-

dezze 5 . 4 ; 5 ; 6 ; l'ultima non è registrata nel catalogo ed è segnata sulle carte di Gr. 6.

*Osservazione.*

| 8231 *BAC* (nord centro) | 8246 *BAC* (sud centro) | 8288 *BAC* (sud centro) | 8297 *BAC* (nord centro) |
|---|---|---|---|
| $2^h\ 34^m\ 56^s,5$ | $2^h\ 38^m\ 5^s$ | $2^h\ 45^m\ 47^s$ | $2^h\ 47^m\ 42^s$ |
| 35 9 | 38 20,5 | 46 4 | 47 56 |
| 36 21 | 39 42 | 47 14,5 | 49 7 |
| 36 38 | 40 6 | 47 34,5 | 49 24 |
| 39 43 | 42 9 | 50 25 | 52 31 |
| 40 1 | 42 32 | 50 43 | 52 47,5 |
| 41 12,5 | 43 54 | 51 54 | 53 38 |
| 41 25 | 44 10 | 52 12 | 54 14 |
| Medie 2 38 10,75 | 2 41 7,31 | 2 48 59,25 | 2 50 57,44 |

*Andamento del pendolo siderale a mezzodì vero.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 Gennaio | $20^h\ 18'\ 51'',16$ | correzione ..... | $-2^m\ 9^s,65$ |
| 23 » | 20 23 6,94 | » ..... | $-2\ 12,57$ |
| | | Ritardo in un giorno | $-\ 2,92$ |

*Elementi per la riduzione delle stelle.*

| Stelle | Ascensione retta | Precessione annua | Variazione secolare | Moto proprio | log $a$ | log $b$ | log $c$ | log $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8232 *BAC* | $23^h 32^m 0^s,13$ | $3^s,114$ | $-0^s,0098$ | $+0^s,005$ | 8,8358 | 7,9249 $n$ | 0,4934 | 8,2503 $n$ |
| 8246 » | 23 34 56 ,52 | 3 ,111 | −0 ,0098 | +0 ,010 | 8,8371 | 7,8776 $n$ | 0,4929 | 8,2605 $n$ |
| 8288 » | 23 42 49 ,04 | 3 ,098 | −0 ,0092 | +0 ,014 | 8,8382 | 7,7139 $n$ | 0,4911 | 8,2578 $n$ |
| 8297 » | 23 44 47 ,44 | 3 ,095 | −0 ,0090 | −0 ,003 | 8,8382 | 7,6607 $n$ | 0,4906 | 8,2536 $n$ |
| | Dist. polare | | | | log $a'$ | log $b'$ | log $c'$ | log $d'$ |
| 8232 *BAC* | 105° 3′ 4″,1 | −19″,91 | −0″,055 | +0,02 | 9,5883 $n$ | 9,4112 | 1,2990 $n$ | 9,0859 $n$ |
| 8246 » | 105 22 18 ,1 | −19 ,94 | −0 ,050 | −0,04 | 9,5905 $n$ | 9,4208 | 1,2996 $n$ | 9,0379 $n$ |
| 8288 » | 105 14 9 ,0 | −20 ,00 | −0 ,034 | +0,20 | 9,6010 $n$ | 9,4184 | 1,3010 $n$ | 8,8745 $n$ |
| 8297 » | 105 5 13 ,2 | −20 ,01 | −0 ,030 | +0,14 | 9,6039 $n$ | 9,4145 | 1,3013 $n$ | 8,8216 $n$ |
| | | | | | log $A$ | log $B$ | log $C$ | log $D$ |
| | | | | A mezzanotte del 21 Gennaio | 0,9903 $n$ | 1,2417 | 9,3831 | 0,9286 |
| | | | | » 22 » | 1,0027 $n$ | 1,2369 | 9,3882 | 0,9279 |

Colle [1] e [2] trovai le coordinate apparenti:

| Stelle | Ascensione retta | Declinazione |
|---|---|---|
| 8232 *BAC* | $23^h\ 33'\ 45'',93$ | $-14^0\ 51'\ 49^s,0$ |
| 8246 » | 23 36 42 , 39 | −15 11 0 , 2 |
| 8288 » | 23 44 34 , 63 | −15 2 57 , 7 |
| 8297 » | 23 46 32 , 37 | −14 53 59 , 5 |

L'angolo orario del centro del micrometro mi risultò:

| | | |
|---|---|---|
| Dalla | 8232 *BAC* | $3^h\ 2^m\ 14^s,44$ |
| » | 8246 » | 3 2 14 , 54 |
| » | 8288 » | 3 2 14 , 24 |
| » | 8297 » | 3 2 14 , 69 |
| | Medio | 3 2 14 , 48 |

$$t_0 = 45^0\,33'\,37'',2\,.$$

Combinando due a due le quattro stelle, si possono calcolare i quattro raggi delle periferie degli anelli in sei maniere. In quattro delle combinazioni le stelle attraversarono il campo del cannocchiale a nord e sud del centro, e sono queste:

Coppie

I. 8232; 8246 differenza delle declinazioni $-19'\ 11'',2$
II. 8288; 8297 » $+\ 8\ 58\ ,2$
III. 8232; 8288 » $-11\ \ 8\ ,7$
IV. 8246; 8297 » $+17\ \ 0\ ,7$

Nelle due altre combinazioni le stelle attraversarono il campo dalla stessa parte del centro e di queste passò al sud la coppia:

V. 8246; 8288 differenza delle declinazioni $+\ 8'\ \ 2'',5$

ed al nord la coppia

VI. 8232; 8297 » $= -2\ 10\ ,5$

Per ciò che dissi nell'articolo precedente le prime quattro coppie di stelle sono preferibili alle due ultime per la ricerca dei raggi; tuttavia non mi parve superfluo trovare colle formole [6] e [7], che dimostrai essere generali, anche i valori dei raggi colle coppie V e VI.

Col $t_0$ scritto più sopra trovai $N = 34^0\, 56'\, 2'', 0$ colla [3], e dalla [4] dedussi le seguenti correzioni per la rifrazione:

| Coppia I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|
| $+2'', 7$ | $-1'', 3$ | $+1'', 6$ | $-2'', 4$ | $-1'', 2$ | $+0'', 3$ |

Le declinazioni avendo prossimamente il valore numerico di 15 gradi, nell'ordine di approssimazione di $0'', 1$ non è trascurabile la correzione per la curvatura, la quale colla [5] è speciale a ciascuna delle quattro periferie. Ho fatto questi calcoli per le sei coppie di stelle e trovai le seguenti correzioni (scritte in ordine procedendo dalla periferia maggiore alla minore).

| Coppie di stelle | Correzioni per la curvatura | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | $+0'', 6$ | $+0'', 7$ | $+0'', 7$ | $+0'', 7$ |
| II | $-0, 2$ | $-0, 3$ | $-0, 2$ | $-0, 2$ |
| III | $+0, 1$ | $+0, 3$ | $+0, 2$ | $+0, 2$ |
| IV | $-0, 7$ | $-0, 7$ | $-0, 7$ | $-0, 7$ |
| V | $-0, 6$ | $-0, 4$ | $-0, 5$ | $-0, 5$ |
| VI | $-0, 1$ | $0, 0$ | $0, 0$ | $0, 0$ |

Fatte queste correzioni alle differenze delle declinazioni dopo averle corrette per la rifrazione, risultano i seguenti valori di $d' - d$ per calcolare i raggi, applicando le formole [6] e [7].

*Valori di* d′—d.

| Coppie di stelle | ANELLO MAGGIORE | | ANELLO MINORE | |
|---|---|---|---|---|
| | periferia esterna | periferia interna | periferia esterna | periferia interna |
| I | —1147″,9 | —1147″,8 | —1147″,8 | —1147″,8 |
| II | + 536 ,7 | + 536 ,6 | + 536 ,7 | + 536 ,7 |
| III | — 667 ,0 | — 666 ,8 | — 666 ,9 | — 666 ,9 |
| IV | +1017 ,6 | +1017 ,6 | +1017 ,6 | +1017 ,6 |
| V | + 480 ,7 | + 480 ,9 | + 480 ,8 | + 480 ,8 |
| VI | — 130 ,3 | — 130 ,2 | — 130 ,2 | — 130 ,2 |

Con queste differenze ricavai dalle [6] e [7] i valori della seguente tabella contenente tutti i raggi calcolati:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 Genn. oss. 1ª | 47′14″,3 | 43′34″,2 | 26′29″,8 | 22′36″,2 |
| » 2ª | 47 32 ,4 | 43 43 ,6 | 26 31 ,1 | 22 39 ,5 |
| 17 » | 47 14 ,2 | 43 45 ,3 | 26 36 ,4 | 22 32 ,7 |
| 22 » coppia I | 47 0 ,8 | 43 56 ,5 | 26 40 ,4 | 22 27 ,9 |
| II | 47 21 ,1 | 43 54 ,6 | 26 38 ,2 | 22 35 ,5 |
| III | 47 4 ,6 | 44 1 ,1 | 26 40 ,6 | 22 31 ,5 |
| IV | 47 27 ,9 | 43 43 ,7 | 26 38 ,2 | 22 35 ,3 |
| V | 47 29 ,9 | 42 43 ,7 | 26 49 ,4 | 22 20 ,3 |
| VI | 48 0 ,2 | 43 59 ,9 | 26 38 ,4 | 22 37 ,9 |
| Medie | 47 22 ,8 | 43 42 ,5 | 26 38 ,1 | 22 33 ,0 |

A queste medie dei raggi corrispondono i residui:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 Genn. oss. 1ª | − 8″, 5 | − 8″, 3 | − 8″, 3 | + 3″, 2 |
| » 2ª | + 9 , 6 | + 1 , 1 | − 7 , 0 | + 6 , 5 |
| 17 » | − 8 , 6 | + 2 , 8 | − 1 , 7 | − 0 , 3 |
| 22 » coppia I | −22 , 0 | +14 , 0 | + 2 , 3 | − 5 , 1 |
| II | − 1 , 7 | +12 , 1 | + 0 , 1 | + 2 , 5 |
| III | −18 , 2 | +18 , 6 | + 2 , 5 | − 1 , 5 |
| IV | + 5 , 1 | + 1 , 3 | + 0 , 1 | + 2 , 3 |
| V | + 7 , 1 | −58 , 8 | +11 , 3 | −12 , 7 |
| VI | +37 , 4 | +17 , 4 | + 0 , 3 | + 4 , 9 |

Onde i seguenti errori probabili delle singole osservazioni e delle loro medie, ossia dei valori più probabili dei raggi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| delle osservazioni | 12″, 0 | 16″, 2 | 3″, 8 | 4″, 0 |
| delle medie | 4 , 0 | 5 , 4 | 1 , 3 | 1 , 3 |

I raggi dedotti dalla coppia IV differendo poco dalle medie di tutti, ho scelto gli elementi di tal coppia per calcolare colla [8] il massimo errore che può essere cagionato nei raggi per lo sbaglio di un secondo in ciascuno dei tempi osservati, ed ho trovato pei quattro raggi (procedendo dal maggiore al minore) i numeri 15″, 3; 14″, 8; 14″, 8 e 15″, 1. Per le due periferie dell'anello più piccolo nessuno dei residui è inferiore a questi limiti; ma per l'altro anello, eccedono tai limiti tre residui relativi alla periferia esterna e tre relativi all'interna. Questa circostanza mi indusse a calcolare i limiti suddetti anche cogli elementi delle altre osservazioni, in riguardo all' influenza che hanno su tali limiti la posizione delle stelle nel micrometro e le loro declinazioni; persuaso che avrei trovato dei limiti d'errore più grandi; ottenni infatti colla [8] i risultamenti che seguono:

*Errori possibili nei raggi*
*per lo sbaglio di un secondo nei tempi.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 Genn. oss. 1ª | 14′, 1 | 13″, 9 | 11″, 8 | 10″, 3 |
| » 2ª | 14 , 1 | 13 , 9 | 11 , 8 | 10 , 4 |
| 17 » | 14 , 6 | 14 , 6 | 14 , 0 | 13 , 7 |
| 22 » coppia I | 14 , 3 | 14 , 4 | 14 , 1 | 13 , 8 |
| II | 14 , 9 | 22 , 9 | 14 , 5 | 15 , 6 |
| III | 14 , 4 | 16 , 8 | 14 , 4 | 14 , 2 |
| IV | 15 , 3 | 14 , 8 | 14 , 8 | 15 , 1 |
| V | 48 , 1 | 36 , 5 | 42 , 1 | 38 , 2 |
| VI | 118 , 1 | 50 , 5 | 14 , 5 | 32 , 8 |

17 Aprile 1884.

Lo stesso Socio DORNA presenta inoltre all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, le *Effemeridi del Sole*, *della Luna e dei principali Pianeti*, *calcolate per Torino in tempo civile di Roma per l'anno* 1885, redatte dall'Assistente Dott. Angelo CHARRIER.

## — SOLE —

### Gennaio

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m s | h | m | | h | m | s |
| 1 | 8 | 0 | 0 | 22 59·70 | 4 | 46 | 22° 58′ 16″5A | 18 | 26 | 4·19 |
| 2 | 8 | 0 | | 23 27·64 | 4 | 47 | 22 52 52·0 | 18 | 30 | 0·76 |
| 3 | 8 | 0 | | 23 55·21 | 4 | 48 | 22 47 0·3 | 18 | 33 | 57·31 |
| 4 | 8 | 0 | | 24 22.41 | 4 | 49 | 22 40 41·4 | 18 | 37 | 53·87 |
| 5 | 8 | 0 | | 24.49·19 | 4 | 50 | 22 33 55·5 | 18 | 41 | 50·42 |
| 6 | 8 | 0 | | 25 15·51 | 4 | 51 | 22 26 42·8 | 18 | 45 | 46·98 |
| 7 | 8 | 0 | | 25 41·38 | 4 | 52 | 22 19 3·6 | 18 | 49 | 43·54 |
| 8 | 7 | 59 | | 26 6·77 | 4 | 53 | 22 10 57·9 | 18 | 53 | 40·09 |
| 9 | 7 | 59 | | 26 31·63 | 4 | 54 | 22 2 26·1 | 18 | 57 | 36·65 |
| 10 | 7 | 59 | | 26 55·96 | 4 | 56 | 21 53 28·5 | 19 | 1 | 33·21 |
| 11 | 7 | 58 | | 27 19·72 | 4 | 57 | 21 44 5·3 | 19 | 5 | 29·76 |
| 12 | 7 | 57 | | 27 42·89 | 4 | 58 | 21 34 16·6 | 19 | 9 | 26·32 |
| 13 | 7 | 57 | | 28 5·45 | 4 | 0 | 21 24 3·0 | 19 | 13 | 22·87 |
| 14 | 7 | 57 | | 28 27·38 | 4 | 1 | 21 13 24·7 | 19 | 17 | 19·43 |
| 15 | 7 | 57 | | 28 48·64 | 5 | 2 | 21 2 21·8 | 19 | 21 | 15·99 |
| 16 | 7 | 56 | | 29 9·21 | 5 | 3 | 20 50 54·9 | 19 | 25 | 12·54 |
| 17 | 7 | 55 | | 29 29·08 | 5 | 4 | 20 39 4·3 | 19 | 29 | 9·10 |
| 18 | 7 | 54 | | 29 48·22 | 5 | 6 | 20 26 40·1 | 19 | 33 | 5·65 |
| 19 | 7 | 53 | | 30 6·62 | 5 | 7 | 20 14 12·8 | 19 | 37 | 2·21 |
| 20 | 7 | 52 | | 30 24·26 | 5 | 9 | 20 1 12·9 | 19 | 40 | 58·77 |
| 21 | 7 | 51 | | 30 41·12 | 5 | 10 | 19 47 50·5 | 19 | 44 | 55·32 |
| 22 | 7 | 50 | | 30 57·21 | 5 | 11 | 19 34 5·0 | 19 | 48 | 51·88 |
| 23 | 7 | 50 | | 31 12·48 | 5 | 13 | 19 19 59·9 | 19 | 52 | 48·43 |
| 24 | 7 | 49 | | 31 26·94 | 5 | 14 | 19 5 32·6 | 19 | 56 | 44·99 |
| 25 | 7 | 48 | | 31 40·59 | 5 | 15 | 18 50 44·3 | 20 | 0 | 41·55 |
| 26 | 7 | 48 | | 31 53·43 | 5 | 16 | 18 35 35·5 | 20 | 4 | 38·10 |
| 27 | 7 | 47 | | 32 5·43 | 5 | 18 | 18 20 6·5 | 20 | 8 | 34·66 |
| 28 | 7 | 46 | | 32 16·60 | 5 | 20 | 18 4 17·7 | 20 | 12 | 31·21 |
| 29 | 7 | 45 | | 32 26·94 | 5 | 21 | 17 48 9·5 | 20 | 16 | 27·77 |
| 30 | 7 | 44 | | 32 36·45 | 5 | 22 | 17 31 42·4 | 20 | 20 | 24·32 |
| 31 | 7 | 43 | | 32 45·14 | 5 | 24 | 17 24 56·6 | 20 | 24 | 20·88 |

## — SOLE —

### Febbraio

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Tempo medio di Roma: Passaggio al meridiano | Tempo medio di Roma: Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 7 41 | 0 32 53·0 | 5 25 | 16° 57′ 52″6 A | 20 28 17·43 |
| 2 | 7 40 | 33 0·05 | 5 26 | 16 40 30·7 | 20 32 13·98 |
| 3 | 7 39 | 33 6·29 | 5 27 | 16 22 51·5 | 20 36 10·54 |
| 4 | 7 38 | 33 11·74 | 5 29 | 16 4 55·1 | 20 40 7·09 |
| 5 | 7 37 | 33 16·38 | 5 31 | 15 46 42·1 | 20 44 3·65 |
| 6 | 7 35 | 33 20·24 | 5 32 | 15 28 13·2 | 20 48 0·20 |
| 7 | 7 34 | 33 23·31 | 5 33 | 15 9 37·7 | 20 51 56·76 |
| 8 | 7 33 | 33 25·60 | 5 35 | 14 50 27·5 | 20 55 53·31 |
| 9 | 7 31 | 33 27·12 | 5 36 | 14 31 11·6 | 20 59 49·86 |
| 10 | 7 30 | 33 27·87 | 5 38 | 14 11 41·5 | 21 3 46·42 |
| 11 | 7 28 | 33 27·88 | 5 40 | 13 51 57·3 | 21 7 42·97 |
| 12 | 7 27 | 33 27·62 | 5 41 | 13 32 0·4 | 21 11 39·52 |
| 13 | 7 26 | 33 25·61 | 5 42 | 13 11 48·2 | 21 15 36·08 |
| 14 | 7 24 | 33 23·36 | 5 44 | 12 51 24·2 | 21 19 32·63 |
| 15 | 7 22 | 33 20·38 | 5 45 | 12 30 47·8 | 21 23 29·18 |
| 16 | 7 20 | 33 16·67 | 5 47 | 12 9 59·4 | 21 27 25·74 |
| 17 | 7 19 | 33 12 25 | 5 48 | 12 48 59·4 | 21 31 22·29 |
| 18 | 7 18 | 33 7·13 | 5 49 | 11 27 48 3 | 21 35 18·84 |
| 19 | 7 16 | 33 1·31 | 5 51 | 11 6 26·4 | 21 39 15·40 |
| 20 | 7 14 | 32 54·81 | 5 53 | 10 44 44·3 | 21 43 11·95 |
| 21 | 7 12 | 32 47·64 | 5 54 | 10 23 12·3 | 21 47 8·50 |
| 22 | 7 11 | 32 39·82 | 5 55 | 10 1 20·9 | 21 51 5·05 |
| 23 | 7 10 | 32 31·36 | 5 56 | 9 39 20·3 | 21 55 1·61 |
| 24 | 7 8 | 32 22·27 | 5 58 | 9 17 11·1 | 21 58 58·16 |
| 25 | 7 6 | 32 12·58 | 5 0 | 8 54 53·8 | 22 2 54·71 |
| 26 | 7 4 | 32 2·30 | 6 1 | 8 32 28·6 | 22 6 51·26 |
| 27 | 7 3 | 31 51·45 | 6 2 | 8 9 55·9 | 22 10 47·82 |
| 28 | 7 1 | 31 40·04 | 6 3 | 8 47 16·2 | 22 14 44 37 |

## — SOLE —

| Marzo | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA | | | | | | | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | | | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
| | Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | | | | | | | |
| | h | m | h | m | s | h | m | | | | | h | m | s |
| 1 | 6 | 59 | 0 | 31 | 28·11 | 6 | 5 | | 7° | 24′ | 29″8 A | 22 | 18 | 40·92 |
| 2 | 6 | 57 | | 31 | 15·68 | 6 | 7 | | 7 | 16 | 37·0 | 22 | 22 | 37·47 |
| 3 | 6 | 55 | | 31 | 2·78 | 6 | 8 | | 6 | 38 | 38·3 | 22 | 26 | 34·03 |
| 4 | 6 | 53 | | 30 | 49·42 | 6 | 9 | | 6 | 15 | 34·0 | 22 | 30 | 30·58 |
| 5 | 6 | 52 | | 30 | 35·64 | 6 | 10 | | 5 | 52 | 24·3 | 22 | 34 | 27·13 |
| 6 | 6 | 50 | | 30 | 21·43 | 6 | 12 | | 5 | 29 | 9·9 | 22 | 38 | 23·68 |
| 7 | 6 | 48 | | 30 | 6·85 | 6 | 13 | | 5 | 5 | 51·0 | 22 | 42 | 20·23 |
| 8 | 6 | 46 | | 29 | 51·90 | 6 | 15 | | 4 | 42 | 28. 1 | 22 | 46 | 16·78 |
| 9 | 6 | 44 | | 29 | 36. 60 | 6 | 16 | | 4 | 19 | 1·4 | 22 | 50 | 13·34 |
| 10 | 6 | 43 | | 29 | 20·96 | 6 | 17 | | 3 | 55 | 31·4 | 22 | 54 | 9·89 |
| 11 | 6 | 41 | | 29 | 5·02 | 6 | 19 | | 3 | 31 | 58·5 | 22 | 58 | 6·44 |
| 12 | 6 | 39 | | 28 | 48·78 | 6 | 20 | | 3 | 8 | 23·1 | 23 | 2 | 2·99 |
| 13 | 6 | 36 | | 28 | 32·27 | 6 | 22 | | 2 | 44 | 45·4 | 23 | 5 | 59·55 |
| 14 | 6 | 34 | | 28 | 15·50 | 6 | 23 | | 2 | 21 | 6·0 | 23 | 9 | 56. 10 |
| 15 | 6 | 32 | | 27 | 58·49 | 6 | 24 | | 1 | 57 | 25·2 | 23 | 13 | 52·65 |
| 16 | 6 | 31 | | 27 | 41·27 | 6 | 25 | | 1 | 33 | 43·4 | 23 | 17 | 49·20 |
| 17 | 6 | 29 | | 27 | 23·83 | 6 | 27 | | 1 | 10 | 1·1 | 23 | 21 | 45·75 |
| 18 | 6 | 27 | | 27 | 6·20 | 6 | 28 | | 0 | 46 | 18·4 | 23 | 25 | 42·30 |
| 19 | 6 | 25 | | 26 | 48·42 | 6 | 30 | | 0 | 22 | 35·9 A | 23 | 29 | 38·86 |
| 20 | 6 | 24 | | 26 | 30·48 | 6 | 31 | | 0 | 1 | 6·2 B | 23 | 33 | 35·41 |
| 21 | 6 | 22 | | 26 | 12·40 | 6 | 32 | | 0 | 24 | 47·3 | 23 | 37 | 31·96 |
| 22 | 6 | 19 | | 25 | 54·20 | 6 | 33 | | 0 | 48 | 27·2 | 23 | 41 | 28·51 |
| 23 | 6 | 17 | | 25 | 35·90 | 6 | 35 | | 1 | 12 | 5·4 | 23 | 45 | 25·06 |
| 24 | 6 | 15 | | 25 | 17·52 | 6 | 36 | | 1 | 35 | 41·7 | 23 | 49 | 21·61 |
| 25 | 6 | 14 | | 24 | 59·08 | 6 | 37 | | 1 | 59 | 15·6 | 23 | 53 | 18·16 |
| 26 | 6 | 12 | | 24 | 40·60 | 6 | 38 | | 2 | 22 | 46·7 | 23 | 57 | 14 72 |
| 27 | 6 | 10 | | 24 | 22 09 | 6 | 40 | | 2 | 46 | 14·9 | 0 | 1 | 11·27 |
| 28 | 6 | 8 | | 24 | 3·58 | 6 | 41 | | 3 | 9 | 39·6 | 0 | 5 | 7·82 |
| 29 | 6 | 6 | | 23 | 45·11 | 6 | 43 | | 3 | 33 | 0·6 | 0 | 9 | 4·37 |
| 30 | 6 | 5 | | 23 | 26·69 | 6 | 44 | | 3 | 56 | 17·6 | 0 | 13 | 0·92 |
| 31 | 6 | 3 | | 23 | 8·34 | 6 | 45 | | 4 | 19 | 30·2 | 0 | 16 | 57·48 |

## — SOLE —

### Aprile

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 6 1 | 0 22 50·09 | 6 46 | 4° 42′ 38″1B | 0 20 54·03 |
| 2 | 5 58 | 22 31·97 | 6 47 | 5 6 22·0 | 0 24 50·58 |
| 3 | 5 57 | 22 14·00 | 6 48 | 5 28 28·6 | 0 28 47·13 |
| 4 | 5 55 | 21 56·18 | 6 50 | 5 51 30·4 | 0 32 43·68 |
| 5 | 5 53 | 21 38·56 | 6 51 | 6 14 16·2 | 0 36 40·23 |
| 6 | 5 51 | 21 21·15 | 6 52 | 6 36 55·7 | 0 40 36·79 |
| 7 | 5 50 | 21 3·95 | 6 53 | 6 59 28·5 | 0 44 33·34 |
| 8 | 5 48 | 20 47·01 | 6 55 | 7 21 54·3 | 0 48 29·89 |
| 9 | 5 46 | 20 30·33 | 6 56 | 7 44 12·8 | 0 52 27·44 |
| 10 | 5 45 | 20 13·91 | 6 57 | 8 6 23.5 | 0 56 23·00 |
| 11 | 5 43 | 19 57·80 | 6 58 | 8 28 25·3 | 1 0 19·55 |
| 12 | 5 41 | 19 41·98 | 7 0 | 8 50 20·2 | 1 4 16·10 |
| 13 | 5 39 | 19 26·50 | 7 1 | 9 12 5·7 | 1 8 12·65 |
| 14 | 5 37 | 19 11·34 | 7 2 | 9 35 42·9 | 1 12 9·21 |
| 15 | 5 36 | 18 56·54 | 7 3 | 9 55 9·7 | 1 16 5·76 |
| 16 | 5 34 | 18 42·09 | 7 4 | 10 16 25·8 | 1 20 2·31 |
| 17 | 5 32 | 18 28·02 | 7 6 | 10 37 32·6 | 1 23 58·86 |
| 18 | 5 30 | 18 14·32 | 7 7 | 10 58 39·0 | 1 27 55·42 |
| 19 | 5 28 | 18 1·02 | 7 8 | 11 19 14·3 | 1 31 51·97 |
| 20 | 5 27 | 17 48·11 | 7 9 | 11 39 48·7 | 1 35 48·52 |
| 21 | 5 25 | 17 35·61 | 7 11 | 12 0 11·5 | 1 39 45·08 |
| 22 | 5 24 | 17 23·54 | 7 12 | 12 20 22·4 | 1 43 41·63 |
| 23 | 5 22 | 17 11·89 | 7 14 | 12 40 21·1 | 1 47 38·18 |
| 24 | 5 20 | 17 0·68 | 7 15 | 13 0 7·2 | 1 51 34·74 |
| 25 | 5 19 | 16 49·94 | 7 16 | 13 19 40·3 | 1 55 32·29 |
| 26 | 5 17 | 16 39·66 | 7 17 | 13 39 0·4 | 1 59 27·84 |
| 27 | 5 15 | 16 29·87 | 7 19 | 13 58 7·0 | 2 3 24·40 |
| 28 | 5 14 | 16 20·59 | 7 20 | 14 16 59·9 | 2 7 20·95 |
| 29 | 5 12 | 16 11·83 | 7 21 | 14 35 38·5 | 2 11 17·50 |
| 30 | 5 11 | 16 3·59 | 7 22 | 14 54 2 8 | 2 15 14·06 |

## — SOLE —

### Maggio

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 5 9 | 0 15 55·88 | 7 23 | 15° 12′ 12″4B | 2 19 10·61 |
| 2 | 5 8 | 15 48·73 | 7 25 | 15 30 7·0 | 2 23 7·17 |
| 3 | 5 6 | 15 42·15 | 7 26 | 15 47 46·4 | 2 27 3·72 |
| 4 | 5 5 | 15 36·12 | 7 27 | 16 5 10·1 | 2 31 0·28 |
| 5 | 5 4 | 15 30·67 | 7 28 | 16 22 16·9 | 2 34 56·83 |
| 6 | 5 2 | 15 25·79 | 7 30 | 16 39 9·6 | 2 38 53·38 |
| 7 | 5 1 | 15 21·50 | 7 31 | 16 55 44·6 | 2 42 49·94 |
| 8 | 4 59 | 15 17·79 | 7 32 | 17 12 2·9 | 2 46 46·49 |
| 9 | 4 58 | 15 14·67 | 7 33 | 17 28 3·9 | 2 50 43·05 |
| 10 | 4 57 | 15 12·14 | 7 34 | | 2 54 39·60 |
| 11 | 4 56 | 15 10 21 | 7 36 | 17 43 47·6 | 2 58 36·16 |
| 12 | 4 54 | 15 8·87 | 7 37 | 17 59 13·6 | 3 2 32·71 |
| 13 | 4 53 | 15 8·11 | 7 38 | 18 29 11·0 | 3 6 29·27 |
| 14 | 4 52 | 15 7·93 | 7 39 | 18 43 42·0 | 3 10 25·82 |
| 15 | 4 51 | 15 8·33 | 7 40 | 18 57 54·1 | 3 14 22·38 |
| 16 | 4 50 | 15 9·30 | 7 41 | 19 11 47 0 | 3 18 18·93 |
| 17 | 4 49 | 15 10·82 | 7 43 | 19 25 20·5 | 3 22 15·49 |
| 18 | 4 47 | 15 12 89 | 7 44 | 19 38 34·1 | 3 26 12·04 |
| 19 | 4 46 | 15 15 48 | 7 45 | 19 51 27·8 | 3 30 8·60 |
| 20 | 4 46 | 15 18·60 | 7 46 | 20 4 1·2 | 3 34 5·15 |
| 21 | 4 45 | 15 22·24 | 7 47 | 20 16 14·0 | 3 38 1·71 |
| 22 | 4 44 | 15 26·39 | 7 48 | 20 28 6·0 | 3 41 58·27 |
| 23 | 4 43 | 15 31·04 | 7 49 | 20 39 36·9 | 3 45 54·82 |
| 24 | 4 42 | 15 36·19 | 7 50 | 20 50 46·5 | 3 49 51·38 |
| 25 | 4 42 | 15 41·83 | 7 51 | 21 1 34·5 | 3 53 47·93 |
| 26 | 4 41 | 15 47·96 | 7 52 | 21 12 0·9 | 3 57 44·49 |
| 27 | 4 40 | 15 54·56 | 7 53 | 21 22 5·3 | 4 1 41·05 |
| 28 | 4 39 | 16 1·62 | 7 54 | 21 31 47·5 | 4 5 37·60 |
| 29 | 4 38 | 16 9·14 | 7 55 | 21 41 7·4 | 4 9 34·16 |
| 30 | 4 38 | 16 17·11 | 7 56 | 21 50 4·8 | 4 13 30·71 |
| 31 | 4 38 | 16 25·51 | 7 56 | 21 58 39·4 | 4 17 27·27 |

## — SOLE —

### Giugno

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h m s | h | m | | h | m | s |
| 1 | 4 | 37 | 0 16 34·34 | 7 | 57 | 22° 6′ 51″3 B | 4 | 21 | 23.83 |
| 2 | 4 | 36 | 16 43·56 | 7 | 58 | 22 14 40·0 | 4 | 25 | 20·38 |
| 3 | 4 | 36 | 16 53·17 | 7 | 59 | 22 22 5·5 | 4 | 29 | 16·94 |
| 4 | 4 | 35 | 17 3·17 | 7 | 59 | 22 29 7·5 | 4 | 33 | 13·49 |
| 5 | 4 | 35 | 17 13·52 | 8 | 0 | 22 35 45·0 | 4 | 37 | 10·05 |
| 6 | 4 | 35 | 17 24·54 | 8 | 1 | 22 42 0·7 | 4 | 41 | 6·61 |
| 7 | 4 | 34 | 17 35·24 | 8 | 2 | 22 47 51·7 | 4 | 45 | 3·16 |
| 8 | 4 | 34 | 17 46·57 | 8 | 2 | 22 53 18·6 | 4 | 48 | 59·72 |
| 9 | 4 | 34 | 17 58·18 | 8 | 2 | 22 58 21·4 | 4 | 52 | 56·28 |
| 10 | 4 | 34 | 18 10·05 | 8 | 3 | 23 2 59·9 | 4 | 56 | 52·83 |
| 11 | 4 | 34 | 18 22·17 | 8 | 4 | 23 7 14·3 | 5 | 0 | 49·39 |
| 12 | 4 | 34 | 18 34·58 | 8 | 4 | 23 11 4·3 | 5 | 4 | 45·95 |
| 13 | 4 | 34 | 18 47·00 | 8 | 5 | 23 14 29·7 | 5 | 8 | 42·50 |
| 14 | 4 | 34 | 18 59·67 | 8 | 5 | 23 17 30·6 | 5 | 12 | 39·06 |
| 15 | 4 | 34 | 19 12·45 | 8 | 6 | 23 20 7·0 | 5 | 16 | 35·62 |
| 16 | 4 | 34 | 19 25·33 | 8 | 6 | 23 22 18·6 | 5 | 20 | 32·18 |
| 17 | 4 | 34 | 19 38·27 | 8 | 6 | 23 24 5.5 | 5 | 24 | 28·73 |
| 18 | 4 | 34 | 19 51·25 | 8 | 6 | 23 25 27·7 | 5 | 28 | 25·29 |
| 19 | 4 | 34 | 20 4·25 | 8 | 6 | 23 26 25·0 | 5 | 32 | 21·85 |
| 20 | 4 | 34 | 20 17·24 | 8 | 7 | 23 26 57·5 | 5 | 36 | 18·41 |
| 21 | 4 | 34 | 20 30·20 | 8 | 7 | 23 27 5·0 | 5 | 40 | 14·96 |
| 22 | 4 | 34 | 20 43·12 | 8 | 7 | 23 26 48·0 | 5 | 44 | 11·52 |
| 23 | 4 | 34 | 20 55·97 | 8 | 7 | 23 26 6·1 | 5 | 48 | 8·08 |
| 24 | 4 | 34 | 21 8·73 | 8 | 8 | 23 24 59·4 | 5 | 52 | 4·64 |
| 25 | 4 | 34 | 21 21·38 | 8 | 8 | 23 23 27·9 | 5 | 56 | 1·19 |
| 26 | 4 | 35 | 21 33·90 | 8 | 8 | 23 21 31·8 | 5 | 59 | 57·75 |
| 27 | 4 | 35 | 21 46·26 | 8 | 8 | 23 19 11·1 | 6 | 3 | 53·41 |
| 28 | 4 | 36 | 21 58·45 | 8 | 8 | 23 16 25·7 | 6 | 7 | 50·86 |
| 29 | 4 | 36 | 22 10·45 | 8 | 8 | 23 13 16·0 | 6 | 11 | 47·42 |
| 30 | 4 | 37 | 22 22·24 | 8 | 8 | 23 9 41·8 | 6 | 15 | 43·98 |

## — SOLE —

### Luglio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 4 37 | 0 22 33·81 | 8 8 | 23° 5′ 43″2 B | 6 19 40·53 |
| 2 | 4 37 | 22 45·12 | 8 8 | 23 1 20·5 | 6 23 37·09 |
| 3 | 4 38 | 22 56·17 | 8 8 | 22 56 33·6 | 6 27 33·65 |
| 4 | 4 38 | 23 6·92 | 8 8 | 22 51 22·6 | 6 31 30·20 |
| 5 | 4 39 | 23 17·38 | 8 7 | 22 45 48·8 | 6 35 26·76 |
| 6 | 4 40 | 23 27·54 | 8 7 | 22 39 48·1 | 6 39 23·32 |
| 7 | 4 41 | 23 37·32 | 8 6 | 22 33 26·9 | 6 43 19·87 |
| 8 | 4 41 | 23 46·76 | 8 6 | 22 26 41·1 | 6 47 16·43 |
| 9 | 4 42 | 23 55·84 | 8 5 | 22 19 32·2 | 6 51 12·98 |
| 10 | 4 43 | 24 4·51 | 8 4 | 22 12 0·0 | 6 55 9·54 |
| 11 | 4 44 | 24 12·76 | 8 4 | 22 4 4 9 | 6 59 6·10 |
| 12 | 4 44 | 24 20·57 | 8 3 | 21 55 47·3 | 7 3 2·65 |
| 13 | 4 45 | 24 27·91 | 8 3 | 21 47 7·0 | 7 6 59·21 |
| 14 | 4 46 | 24 34·77 | 8 2 | 21 38 4·4 | 7 10 55·77 |
| 15 | 4 47 | 24 41·12 | 8 2 | 21 28 39·8 | 7 14 52.32 |
| 16 | 4 48 | 24 46·95 | 8 1 | 21 18 53·2 | 7 18 48·88 |
| 17 | 4 49 | 24 52·24 | 8 0 | 21 8 44·9 | 7 22 45·43 |
| 18 | 4 50 | 24 56·98 | 7 59 | 20 58 15·1 | 7 26 41·99 |
| 19 | 4 52 | 25 1·17 | 7 58 | 20 47 24·1 | 7 30 38·55 |
| 20 | 4 53 | 25 3·79 | 7 57 | 20 36 12·2 | 7 34 35·10 |
| 21 | 4 54 | 25 7·84 | 7 56 | 20 24 39·3 | 7 38 31·66 |
| 22 | 4 54 | 25 10·31 | 7 55 | 20 12 46·1 | 7 42 28·21 |
| 23 | 4 55 | 25 12·20 | 7 54 | 20 0 32·6 | 7 46 24·77 |
| 24 | 4 56 | 25 13·49 | 7 53 | 19 47 59·0 | 7 40 21·32 |
| 25 | 4 58 | 25 14·18 | 7 52 | 19 35 5·7 | 7 54 18·88 |
| 26 | 4 59 | 25 14·28 | 7 51 | 19 21 52·8 | 7 58 14·44 |
| 27 | 4 59 | 25 13·78 | 7 50 | 19 8 20·8 | 8 2 10·99 |
| 28 | 5 0 | 25 12·69 | 7 49 | 18 54 28·7 | 8 6 7·55 |
| 29 | 5 2 | 25 11 00 | 7 48 | 18 40 20·1 | 8 10 4·10 |
| 30 | 5 3 | 25 8·71 | 7 46 | 18 25 52·0 | 8 14 0·66 |
| 31 | 5 4 | 25 5·83 | 7 45 | 18 11 5·6 | 8 17 57·21 |

## — SOLE —

### Agosto

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | s | h | m | | h | m | s |
| 1 | 5 | 5 | 0 | 25 | 2·35 | 7 | 45 | 17° 56′ 1″3 B | 8 | 21 | 53·77 |
| 2 | 5 | 6 | | 24 | 58·28 | 7 | 43 | 17 40 39·4 | 8 | 25 | 50·32 |
| 3 | 5 | 7 | | 24 | 53·64 | 7 | 42 | 17 25 0·2 | 8 | 29 | 46·88 |
| 4 | 5 | 9 | | 24 | 48·42 | 7 | 40 | 17 9 3·9 | 8 | 33 | 43·43 |
| 5 | 5 | 10 | | 24 | 42·63 | 7 | 39 | 16 52 50·8 | 8 | 37 | 39·98 |
| 6 | 5 | 11 | | 24 | 36·27 | 7 | 38 | 16 36 21·3 | 8 | 41 | 36·54 |
| 7 | 5 | 12 | | 24 | 29·33 | 7 | 36 | 16 19 35·7 | 8 | 45 | 33·09 |
| 8 | 5 | 13 | | 24 | 21·82 | 7 | 35 | 16 2 34·2 | 8 | 49 | 29·65 |
| 9 | 5 | 15 | | 24 | 13·73 | 7 | 33 | 15 45 17·2 | 8 | 53 | 26·20 |
| 10 | 5 | 16 | | 24 | 5·08 | 7 | 31 | 15 27 45·2 | 8 | 57 | 22 76 |
| 11 | 5 | 17 | | 23 | 55·86 | 7 | 30 | 15 9 58·3 | 9 | 1 | 19·31 |
| 12 | 5 | 18 | | 23 | 46·06 | 7 | 29 | 14 51 56·8 | 9 | 5 | 15·87 |
| 13 | 5 | 19 | | 23 | 35·70 | 7 | 27 | 14 33 21·1 | 9 | 9 | 12·42 |
| 14 | 5 | 21 | | 23 | 24·79 | 7 | 25 | 14 15 16·6 | 9 | 13 | 8·97 |
| 15 | 5 | 22 | | 23 | 13·32 | 7 | 24 | 13 56 28·5 | 9 | 17 | 5·53 |
| 16 | 5 | 23 | | 23 | 1·31 | 7 | 22 | 13 37 32·1 | 9 | 21 | 2·08 |
| 17 | 5 | 24 | | 22 | 48·77 | 7 | 21 | 13 18 22·8 | 9 | 24 | 58·63 |
| 18 | 5 | 25 | | 22 | 35·71 | 7 | 19 | 12 59 0·9 | 9 | 28 | 55·19 |
| 19 | 5 | 27 | | 22 | 22·14 | 7 | 17 | 12 39 26·7 | 9 | 32 | 51·74 |
| 20 | 5 | 28 | | 22 | 8·07 | 7 | 15 | 12 19 40·4 | 9 | 36 | 48·29 |
| 21 | 5 | 29 | | 21 | 53·52 | 7 | 14 | 11 59 42·6 | 9 | 40 | 44·85 |
| 22 | 5 | 30 | | 21 | 38·60 | 7 | 13 | 11 39 33·4 | 9 | 44 | 41·40 |
| 23 | 5 | 31 | | 21 | 23·02 | 7 | 11 | 11 19 13·1 | 9 | 48 | 37·95 |
| 24 | 5 | 33 | | 21 | 7·10 | 7 | 9 | 10 58 42·2 | 9 | 52 | 34·51 |
| 25 | 5 | 34 | | 20 | 50·77 | 7 | 7 | 10 38 0·7 | 9 | 56 | 31·06 |
| 26 | 5 | 35 | | 20 | 34·03 | 7 | 5 | 10 17 9·2 | 10 | 0 | 27·61 |
| 27 | 5 | 36 | | 20 | 16·91 | 7 | 4 | 9 56 7·8 | 10 | 4 | 24·16 |
| 28 | 5 | 37 | | 19 | 59·41 | 7 | 2 | 9 34 57·0 | 10 | 8 | 20·72 |
| 29 | 5 | 39 | | 19 | 41·58 | 7 | 0 | 9 13 36·9 | 10 | 12 | 17·27 |
| 30 | 5 | 40 | | 19 | 23·42 | 6 | 58 | 8 52 7·9 | 10 | 16 | 13·82 |
| 31 | 5 | 41 | | 19 | 4·96 | 6 | 87 | 8 30 30·3 | 10 | 20 | 10·37 |

## — SOLE —

### Settembre

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 5 42 | 0 18 46·20 | 6 55 | 8° 8′ 44″3 B | 10 24 6·93 |
| 2 | 5 43 | 18 27·18 | 6 53 | 7 46 50·4 | 10 28 3·48 |
| 3 | 5 45 | 17 7·92 | 6 51 | 7 24 48·9 | 10 32 0·03 |
| 4 | 5 46 | 17 48·41 | 6 49 | 7 2 40·0 | 10 35 56·58 |
| 5 | 5 47 | 17 28·68 | 6 47 | 6 40 24·1 | 10 39 53·14 |
| 6 | 5 48 | 17 8·76 | 6 45 | 6 18 1·6 | 10 43 49·69 |
| 7 | 5 49 | 16 48 63 | 6 43 | 5 55 32·9 | 10 47 46·24 |
| 8 | 5 51 | 16 28·32 | 6 41 | 5 32 58·2 | 10 51 42·79 |
| 9 | 5 52 | 16 7·86 | 6 39 | 5 10 17·9 | 10 55 39·35 |
| 10 | 5 53 | 15 47·25 | 6 38 | 4 47 32·3 | 10 59 35·90 |
| 11 | 5 54 | 15 26·50 | 6 36 | 4 24 41·8 | 11 3 32·45 |
| 12 | 5 56 | 15 5·63 | 6 34 | 4 1 46·8 | 11 7 29·00 |
| 13 | 5 57 | 14 44·67 | 6 33 | 3 38 47·5 | 11 11 25·55 |
| 14 | 5 58 | 14 23·62 | 6 31 | 3 15 44·2 | 11 15 22·11 |
| 15 | 5 59 | 14 2·51 | 6 29 | 2 52 37·5 | 11 19 18·66 |
| 16 | 6 0 | 13 41·36 | 6 26 | 2 29 27·5 | 11 23 15·21 |
| 17 | 6 1 | 13 20. 18 | 6 25 | 2 6 14·6 | 11 27 11·76 |
| 18 | 6 2 | 12 59·00 | 6 23 | 1 43 7·3 | 11 31 8·31 |
| 19 | 6 4 | 12 37·83 | 6 21 | 1 19 41·7 | 11 35 4·86 |
| 20 | 6 5 | 11 16·70 | 6 19 | 0 56 22·2 | 11 29 1·42 |
| 21 | 6 6 | 11 55·62 | 6 18 | 0 33 1·2 | 11 42 57·97 |
| 22 | 6 7 | 11 34·63 | 6 16 | 0 9 39·1 B | 11 46 54·52 |
| 23 | 6 8 | 11 13·75 | 6 13 | 0 13 44·0 A | 11 50 51·07 |
| 24 | 6 10 | 10 52·99 | 6 11 | 0 37 7·7 | 11 54 47·62 |
| 25 | 6 11 | 10 32·39 | 6 9 | 1 0 31·7 | 11 58 44·17 |
| 26 | 6 12 | 10 11·96 | 6 7 | 1 23 55·6 | 12 2 40·72 |
| 27 | 6 13 | 9 51·75 | 6 6 | 1 47 19·0 | 12 6 37·28 |
| 28 | 6 15 | 9 31·76 | 6 4 | 2 11 41·6 | 12 10 33·83 |
| 29 | 6 16 | 9 12·03 | 6 2 | 2 34 3·5 | 12 14 30·38 |
| 30 | 6 17 | 8 52·58 | 6 0 | 2 57 23·8 | 12 18 26·93 |

## — SOLE —

| Ottobre | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA | | | | | | | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
| | Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | | | | | |
| | h | m | h | m | s | h | m | | | h | m | s |
| 1 | 6 | 18 | 0 | 8 | 33·42 | 5 | 58 | | 3° 20′ 42″3A | 12 | 22 | 23·48 |
| 2 | 6 | 19 | | 8 | 14·58 | 5 | 56 | | 3 43 58·8 | 12 | 26 | 20·04 |
| 3 | 6 | 21 | | 7 | 56·07 | 5 | 54 | | 4 7 12·9 | 12 | 30 | 16·59 |
| 4 | 6 | 22 | | 7 | 37·12 | 5 | 52 | | 4 30 24·0 | 12 | 34 | 13·14 |
| 5 | 6 | 23 | | 7 | 20·14 | 5 | 50 | | 4 53 32·0 | 12 | 38 | 9·69 |
| 6 | 6 | 24 | | 7 | 2 75 | 5 | 49 | | 5 16 36·3 | 12 | 42 | 6·24 |
| 7 | 6 | 26 | | 6 | 45·75 | 5 | 47 | | 5 16 36·4 | 12 | 46 | 2·80 |
| 8 | 6 | 27 | | 6 | 29·18 | 5 | 45 | | 6 2 22·8 | 12 | 49 | 59·35 |
| 9 | 6 | 28 | | 6 | 13·06 | 5 | 43 | | 6 25 24·0 | 12 | 53 | 55·90 |
| 10 | 6 | 29 | | 5 | 57·38 | 5 | 42 | | 6 48 10·3 | 12 | 57 | 52·45 |
| 11 | 6 | 31 | | 5 | 42·17 | 5 | 40 | | 7 10 51·0 | 13 | 1 | 49·00 |
| 12 | 6 | 32 | | 5 | 27·45 | 5 | 38 | | 7 33 25·8 | 13 | 5 | 45·56 |
| 13 | 6 | 33 | | 5 | 13·22 | 5 | 36 | | 7 55 54·4 | 13 | 9 | 42·11 |
| 14 | 6 | 34 | | 4 | 59·51 | 5 | 35 | | 8 18 16·3 | 13 | 13 | 38·66 |
| 15 | 6 | 36 | | 4 | 46·33 | 5 | 33 | | 8 40 31·1 | 13 | 17 | 35·21 |
| 16 | 6 | 38 | | 4 | 33·70 | 5 | 31 | | 9 2 38·5 | 13 | 21 | 31·77 |
| 17 | 6 | 39 | | 4 | 21·64 | 5 | 30 | | 9 24 38·0 | 13 | 25 | 28·32 |
| 18 | 6 | 40 | | 4 | 10·17 | 5 | 28 | | 9 46 29·4 | 13 | 29 | 24·87 |
| 19 | 6 | 41 | | 3 | 59·29 | 5 | 26 | | 10 8 12·0 | 13 | 33 | 21·42 |
| 20 | 6 | 43 | | 3 | 49·03 | 5 | 24 | | 10 29 45·7 | 13 | 37 | 17·98 |
| 21 | 6 | 44 | | 3 | 39·40 | 5 | 23 | | 10 51 10·1 | 13 | 41 | 14·53 |
| 22 | 6 | 45 | | 3 | 30·43 | 5 | 22 | | 11 12 24·6 | 13 | 45 | 11·08 |
| 23 | 6 | 46 | | 3 | 22·14 | 5 | 20 | | 11 33 29·0 | 13 | 49 | 7·63 |
| 24 | 6 | 48 | | 3 | 14·54 | 5 | 18 | | 11 54 22·9 | 13 | 53 | 4·19 |
| 25 | 6 | 50 | | 3 | 7·67 | 5 | 16 | | 12 15 6·0 | 13 | 57 | 0·74 |
| 26 | 6 | 51 | | 3 | 1·53 | 5 | 15 | | 12 35 37·8 | 14 | 0 | 57·29 |
| 27 | 6 | 52 | | 2 | 56·13 | 5 | 14 | | 12 55 57·8 | 14 | 4 | 53·85 |
| 28 | 6 | 53 | | 2 | 51·50 | 5 | 12 | | 13 16 5·9 | 14 | 8 | 50·40 |
| 29 | 6 | 55 | | 2 | 47·65 | 5 | 10 | | 13 36 1·6 | 14 | 12 | 46·95 |
| 30 | 6 | 57 | | 2 | 44·60 | 5 | 8 | | 13 55 44·4 | 14 | 16 | 43·51 |
| 31 | 6 | 58 | | 2 | 42·35 | 5 | 7 | | 14 15 14·0 | 14 | 20 | 40·06 |

## — SOLE —

### Novembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | | Passaggio al meridiano | | | Tramontare | | DECLINAZIONE a mezzodì vero | TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | s | h | m | | h | m | s |
| 1 | 6 | 59 | 0 | 2 | 40·91 | 5 | 6 | 14° 34′ 29″9A | 14 | 24 | 36·61 |
| 2 | 7 | 0 | | 2 | 40·27 | 5 | 4 | 14 53 31·7 | 14 | 28 | 33·17 |
| 3 | 7 | 2 | | 2 | 40·47 | 5 | 3 | 15 12 18·0 | 14 | 32 | 29·72 |
| 4 | 7 | 4 | | 2 | 41·51 | 5 | 1 | 15 30 51·6 | 14 | 36 | 26·28 |
| 5 | 7 | 5 | | 2 | 43·38 | 5 | 0 | 15 49 8·7 | 14 | 40 | 22·83 |
| 6 | 7 | 6 | | 2 | 46·08 | 4 | 59 | 16 7 10·0 | 14 | 44 | 19·39 |
| 7 | 7 | 7 | | 2 | 49·63 | 4 | 58 | 16 24 54·3 | 14 | 48 | 15·94 |
| 8 | 7 | 9 | | 2 | 54·03 | 4 | 56 | 16 42 24·0 | 14 | 52 | 12·50 |
| 9 | 7 | 11 | | 2 | 59·27 | 4 | 55 | 16 59 35·8 | 14 | 56 | 9·05 |
| 10 | 7 | 12 | | 3 | 5·33 | 4 | 54 | 17 16 30·0 | 15 | 0 | 5·60 |
| 11 | 7 | 13 | | 3 | 12·24 | 4 | 53 | 17 33 6·5 | 15 | 4 | 2·16 |
| 12 | 7 | 14 | | 3 | 19·98 | 4 | 52 | 17 49 24·8 | 15 | 7 | 58·71 |
| 13 | 7 | 16 | | 3 | 28·55 | 4 | 50 | 18 5 24·4 | 15 | 11 | 55·27 |
| 14 | 7 | 18 | | 3 | 37·94 | 4 | 49 | 18 21 5·0 | 15 | 15 | 51·82 |
| 15 | 7 | 19 | | 3 | 48·16 | 4 | 48 | 18 36 26·1 | 15 | 19 | 48·38 |
| 16 | 7 | 20 | | 3 | 59·21 | 4 | 48 | 18 51 27·4 | 15 | 23 | 44·93 |
| 17 | 7 | 21 | | 4 | 11·08 | 4 | 47 | 19 6 8·6 | 15 | 21 | 31·49 |
| 18 | 7 | 23 | | 4 | 23·75 | 4 | 46 | 19 20 29·1 | 15 | 31 | 38·05 |
| 19 | 7 | 24 | | 4 | 44·23 | 4 | 45 | 19 34 28·6 | 15 | 35 | 34·60 |
| 20 | 7 | 26 | | 4 | 51·53 | 4 | 44 | 19 48 6·8 | 15 | 39 | 31·16 |
| 21 | 7 | 27 | | 5 | 6·63 | 4 | 44 | 20 1 23·4 | 15 | 43 | 27·71 |
| 22 | 7 | 28 | | 5 | 22·52 | 4 | 43 | 20 14 18·0 | 15 | 47 | 24·27 |
| 23 | 7 | 29 | | 5 | 39·20 | 4 | 42 | 20 28 50·1 | 15 | 51 | 20 82 |
| 24 | 7 | 31 | | 5 | 56·65 | 4 | 41 | 20 38 59·6 | 15 | 55 | 17·38 |
| 25 | 7 | 32 | | 6 | 14·89 | 4 | 40 | 20 50 46·1 | 15 | 59 | 13·93 |
| 26 | 7 | 33 | | 6 | 33·88 | 4 | 40 | 21 2 9·1 | 16 | 3 | 10·49 |
| 27 | 7 | 34 | | 6 | 53·61 | 4 | 39 | 21 13 8·5 | 16 | 7 | 7·05 |
| 28 | 7 | 35 | | 7 | 14·08 | 4 | 39 | 21 23 43·9 | 16 | 11 | 3·60 |
| 29 | 7 | 37 | | 7 | 35·27 | 4 | 38 | 21 33 55·1 | 16 | 15 | 0. 16 |
| 30 | 7 | 38 | | 7 | 57·15 | 4 | 38 | 21 43 41·6 | 16 | 18 | 56·72 |

## — SOLE —

### Dicembre

| Giorno del Mese | Tempo medio di Roma: Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Declinazione a mezzodì vero | Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| | h m | h m s | h m | | h m s |
| 1 | 7 39 | 0 8 19·70 | 4 37 | 21° 53′ 3″1A | 16 22 53·27 |
| 2 | 7 41 | 8 42·91 | 4 37 | 22 1 59·5 | 16 26 49·83 |
| 3 | 7 42 | 9 6·75 | 4 36 | 22 10 30·4 | 16 30 46·39 |
| 4 | 7 43 | 9 31·19 | 4 36 | 22 18 35·5 | 16 34 42·94 |
| 5 | 7 44 | 9 56·20 | 4 36 | 22 26 14·7 | 16 38 39·50 |
| 6 | 7 45 | 10 21·76 | 4 36 | 22 33 27·6 | 16 42 36·06 |
| 7 | 7 46 | 10 47·82 | 4 36 | 22 40 14·1 | 16 46 32·61 |
| 8 | 7 47 | 11 14·37 | 4 36 | 22 46 33·9 | 16 50 29·17 |
| 9 | 7 48 | 11 41·38 | 4 35 | 22 52 26·8 | 16 54 25·73 |
| 10 | 7 49 | 12 9·61 | 4 35 | 22 57 52·6 | 16 58 22·28 |
| 11 | 7 50 | 12 36·58 | 4 35 | 23 2 51·1 | 17 2 18·84 |
| 12 | 7 51 | 13 4·73 | 4 35 | 23 7 21·9 | 17 6 15·40 |
| 13 | 7 52 | 13 33·19 | 4 35 | 23 11 25·5 | 17 10 11·95 |
| 14 | 7 52 | 14 1·94 | 4 36 | 23 15 1·2 | 17 14 8·51 |
| 15 | 7 53 | 14 30·93 | 4 36 | 23 18 9·0 | 17 18 5·07 |
| 16 | 7 53 | 15 0·14 | 4 37 | 23 20 48·8 | 17 22 1·63 |
| 17 | 7 54 | 15 29·55 | 4 37 | 23 23 0.7 | 17 25 58·18 |
| 18 | 7 55 | 15 59·11 | 4 38 | 23 24 44.3 | 17 29 54·74 |
| 19 | 7 55 | 16 28·79 | 4 38 | 23 25 59·6 | 17 33 51·30 |
| 20 | 7 56 | 16 58·57 | 4 38 | 23 26 46·7 | 17 37 47·85 |
| 21 | 7 56 | 17 28·41 | 4 39 | 23 27 5·5 | 17 41 44·41 |
| 22 | 7 57 | 17 58·28 | 4 39 | 23 26 56·1 | 17 45 40·97 |
| 23 | 7 57 | 18 28·16 | 4 40 | 23 26 18·3 | 17 49 37·52 |
| 24 | 7 58 | 18 58·01 | 4 41 | 23 25 12·2 | 17 53 34·08 |
| 25 | 7 58 | 19 27·80 | 4 41 | 23 23 37·9 | 17 57 30·64 |
| 26 | 7 58 | 19 57·51 | 4 42 | 23 21 36·1 | 18 1 27·20 |
| 27 | 7 59 | 20 27·10 | 4 43 | 23 19 4·6 | 18 5 23·75 |
| 28 | 7 59 | 20 56·54 | 4 43 | 23 16 5·7 | 18 9 20·31 |
| 29 | 8 0 | 21 25·80 | 4 44 | 23 12 38·7 | 18 13 16·87 |
| 30 | 8 0 | 21 54·84 | 4 44 | 23 8 43·8 | 18 17 13·42 |
| 31 | 8 0 | 22 23·64 | 4 45 | 23 4 21·1 | 18 21 9·98 |

# — LUNA —

## Gennaio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere h m | | Passaggio al meridiano h m | | Tramontare h m | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | Sera 40 | 0 | Mattino 6 | 7 | Mattino 38 | 15 |
| 2 | 6 | 52 | 1 | 8 | 8 | 30 | 16 |
| 3 | 8 | 5 | 2 | 7 | 9 | 14 | 17 |
| 4 | 9 | 16 | 3 | 3 | 9 | 53 | 18 |
| 5 | 10 | 24 | 3 | 56 | 10 | 26 | 19 |
| 6 | 11 | 31 | 4 | 45 | 10 | 58 | 20 |
| 7 | — | — | 5 | 33 | 11 | 28 | 21 |
| 8 | 0 | Mattino 34 | 6 | 19 | 11 | 57 | 22 |
| 9 | 1 | 36 | 7 | 4 | 0 | Sera 27 | 23 |
| 10 | 2 | 36 | 7 | 49 | 1 | Sera 10 | 24 |
| 11 | 3 | 33 | 8 | 35 | 1 | 35 | 25 |
| 12 | 4 | 29 | 9 | 22 | 2 | 15 | 26 |
| 13 | 5 | 21 | 10 | 9 | 2 | 58 | 27 |
| 14 | 6 | 9 | 10 | 56 | 3 | 46 | 28 |
| 15 | 6 | 53 | 11 | 44 | 4 | 38 | 29 |
| 16 | 7 | 33 | 0 | Sera 31 | 5 | 34 | 1 |
| 17 | 8 | 10 | 1 | Sera 18 | 6 | 33 | 2 |
| 18 | 8 | 43 | 2 | 4 | 7 | 33 | 3 |
| 19 | 9 | 13 | 2 | 50 | 8 | 35 | 4 |
| 20 | 9 | 43 | 3 | 35 | 9 | 37 | 5 |
| 21 | 10 | 12 | 4 | 22 | 10 | 42 | 6 |
| 22 | 10 | 42 | 4 | 69 | 11 | 47 | 7 |
| 23 | 11 | 14 | 5 | 59 | — | — | 8 |
| 24 | 11 | 50 | 6 | 51 | 0 | Mattino 55 | 9 |
| 25 | 0 | Sera 10 | 7 | 46 | 2 | 3 | 10 |
| 26 | 1 | Sera 18 | 8 | 45 | 3 | 11 | 11 |
| 27 | 2 | 13 | 9 | 45 | 4 | 18 | 12 |
| 28 | 3 | 16 | 10 | 46 | 5 | 20 | 13 |
| 29 | 4 | 25 | 11 | 47 | 6 | 15 | 14 |
| 30 | 5 | 37 | — | — | 7 | 3 | 15 |
| 31 | 6 | 50 | 0 | M. 45 | 7 | 45 | 16 |

Ultimo quarto l' 8 a $4^h$ $26^m$ di matt.
Luna nuova il 16 a 9 26 di matt.
Primo quarto il 24 a 2 16 di matt.
Luna piena il 30 a 5 8 di sera.

## Febbraio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere h m | | Passaggio al meridiano h m | | Tramontare h m | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | Sera 2 | 1 | Mattino 41 | 8 | 22 | 17 |
| 2 | 9 | 11 | 2 | 33 | 8 | 55 | 18 |
| 3 | 10 | 18 | 3 | 23 | 9 | 27 | 19 |
| 4 | 11 | 22 | 4 | 11 | 9 | 58 | 20 |
| 5 | — | — | 4 | 58 | 10 | 29 | 21 |
| 6 | 0 | Mattino 24 | 5 | 44 | 11 | 1 | 22 |
| 7 | 1 | 23 | 6 | 31 | 11 | 36 | 23 |
| 8 | 2 | 19 | 7 | 17 | 0 | 13 | 24 |
| 9 | 3 | 13 | 8 | 4 | 0 | 55 | 25 |
| 10 | 4 | 4 | 8 | 51 | 1 | 41 | 26 |
| 11 | 4 | 49 | 9 | 39 | 2 | 32 | 27 |
| 12 | 5 | 31 | 10 | 26 | 3 | 26 | 28 |
| 13 | 6 | 9 | 11 | 13 | 4 | 24 | 29 |
| 14 | 6 | 44 | 12 | 0 | 5 | 24 | 30 |
| 15 | 7 | 15 | 0 | Sera 47 | 6 | 26 | 1 |
| 16 | 7 | 47 | 1 | Sera 33 | 7 | 29 | 2 |
| 17 | 8 | 16 | 2 | 20 | 8 | 34 | 3 |
| 18 | 8 | 47 | 3 | 8 | 9 | 40 | 4 |
| 19 | 9 | 18 | 3 | 57 | 10 | 47 | 5 |
| 20 | 9 | 52 | 4 | 48 | 11 | 54 | 6 |
| 21 | 10 | 31 | 5 | 41 | — | — | 7 |
| 22 | 11 | 15 | 6 | 37 | 1 | 1 | 8 |
| 23 | 0 | Sera 6 | 7 | 35 | 2 | 7 | 9 |
| 24 | 1 | Sera 2 | 8 | 33 | 3 | 8 | 10 |
| 25 | 2 | 7 | 9 | 32 | 4 | 3 | 11 |
| 26 | 3 | 15 | 10 | 30 | 4 | 53 | 12 |
| 27 | 4 | 26 | 11 | 25 | 5 | 37 | 13 |
| 28 | 5 | 38 | — | — | 6 | 15 | 14 |

Ultimo quarto il 6 a $11^h$ $27^m$ di sera.
Luna nuova il 15 a 3 11 di matt.
Primo quarto il 22 a 11 20 di matt.

## — LUNA —

### Marzo

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 6 | 48 Sera | 0 | 19 Mattino | 6 | 51 Mattino | 15 |
| 2 | 7 | 57 | 1 | 10 | 7 | 24 | 16 |
| 3 | 9 | 3 | 1 | 59 | 7 | 55 | 17 |
| 4 | 10 | 7 | 2 | 48 | 8 | 27 | 18 |
| 5 | 11 | 9 | 3 | 35 | 8 | 59 | 19 |
| 6 | — | — | 4 | 23 | 9 | 33 | 20 |
| 7 | 0 | 8 Mattino | 5 | 10 | 10 | 10 | 21 |
| 8 | 1 | 4 | 5 | 57 | 10 | 51 | 22 |
| 9 | 1 | 55 | 6 | 45 | 11 | 35 | 23 |
| 10 | 2 | 43 | 7 | 32 | 0 | 24 Sera | 24 |
| 11 | 3 | 26 | 8 | 19 | 1 | 17 | 25 |
| 12 | 4 | 6 | 9 | 6 | 2 | 8 | 26 |
| 13 | 4 | 41 | 9 | 53 | 3 | 12 | 27 |
| 14 | 5 | 14 | 10 | 40 | 4 | 13 | 28 |
| 15 | 5 | 47 | 11 | 27 | 5 | 16 | 29 |
| 16 | 6 | 17 | 0 | 14 Sera | 6 | 22 | 30 |
| 17 | 6 | 48 | 1 | 2 | 7 | 27 | 1 |
| 18 | 7 | 19 | 1 | 52 | 8 | 36 | 2 |
| 19 | 7 | 54 | 2 | 44 | 9 | 45 | 3 |
| 20 | 8 | 31 | 3 | 37 | 10 | 54 | 4 |
| 21 | 9 | 14 | 4 | 33 | 11 | 59 | 5 |
| 22 | 10 | 2 | 5 | 30 | — | — | 6 |
| 23 | 10 | 57 | 6 | 28 | 1 | 2 Mattino | 7 |
| 24 | 11 | 58 | 7 | 25 | 1 | 59 | 8 |
| 25 | 1 | 3 Sera | 8 | 22 | 2 | 49 | 9 |
| 26 | 2 | 12 | 9 | 16 | 3 | 34 | 10 |
| 27 | 3 | 20 | 10 | 9 | 4 | 13 | 11 |
| 28 | 4 | 30 | 11 | 0 | 4 | 49 | 12 |
| 29 | 5 | 38 | 11 | 49 | 5 | 22 | 13 |
| 30 | 6 | 45 | — | — | 5 | 53 | 14 |
| 31 | 7 | 50 | 0 | 38 M. | 6 | 25 | 15 |

Luna piena l' 1 a 4h 50m di matt.
Ultimo quarto l' 8 a 7 43 di sera.
Luna nuova il 16 a 6 26 di sera.
Primo quarto il 23 a 6 12 di sera.
Luna piena il 30 a 5 29 di sera.

### Aprile

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 8 | 54 Sera | 1 | 26 Mattino | 6 | 56 Mattino | 16 |
| 2 | 9 | 55 | 2 | 14 | 7 | 30 | 17 |
| 3 | 10 | 52 | 3 | 1 | 8 | 6 | 18 |
| 4 | 11 | 46 | 3 | 51 | 8 | 45 | 19 |
| 5 | — | — | 4 | 37 | 9 | 29 | 20 |
| 6 | 0 | 36 Mattino | 5 | 23 | 10 | 15 | 21 |
| 7 | 1 | 21 | 6 | 12 | 11 | 6 | 22 |
| 8 | 2 | 2 | 6 | 59 | 12 | 0 | 23 |
| 9 | 2 | 39 | 7 | 45 | 0 | 58 Sera | 24 |
| 10 | 3 | 12 | 8 | 31 | 1 | 58 | 25 |
| 11 | 3 | 45 | 9 | 18 | 3 | 0 | 26 |
| 12 | 4 | 15 | 10 | 5 | 4 | 4 | 27 |
| 13 | 4 | 46 | 10 | 53 | 5 | 10 | 28 |
| 14 | 5 | 17 | 11 | 42 | 6 | 19 | 29 |
| 15 | 5 | 51 | 0 | 34 Sera | 7 | 29 | 1 |
| 16 | 6 | 28 | 1 | 28 | 8 | 39 | 2 |
| 17 | 7 | 9 | 2 | 25 | 9 | 49 | 3 |
| 18 | 7 | 57 | 3 | 23 | 10 | 54 | 4 |
| 19 | 8 | 51 | 4 | 22 | 11 | 55 | 5 |
| 20 | 9 | 52 | 5 | 21 | — | — | 6 |
| 21 | 10 | 56 | 6 | 18 | 0 | 48 Mattino | 7 |
| 22 | 0 | 3 Sera | 7 | 12 | 1 | 35 | 8 |
| 23 | 1 | 11 | 8 | 3 | 2 | 15 | 9 |
| 24 | 2 | 19 | 8 | 55 | 2 | 51 | 10 |
| 25 | 3 | 26 | 9 | 44 | 3 | 25 | 11 |
| 26 | 4 | 32 | 10 | 32 | 3 | 54 | 12 |
| 27 | 5 | 37 | 11 | 19 | 4 | 25 | 13 |
| 28 | 6 | 40 | — | — | 4 | 56 | 14 |
| 29 | 7 | 52 | 0 | 6 Matt. | 5 | 28 | 15 |
| 30 | 8 | 43 | 0 | 54 | 6 | 2 | 16 |

Ultimo quarto il 7 a 3h 32m di sera.
Luna nuova il 15 a 6 41 di matt.
Primo quarto il 22 a 0 10 di matt
Luna piena il 29 a 7 4 di matt.

# — LUNA —

## Maggio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|
| | h m | h m | h m | |
| 1 | 9 Sera 37 | 1 Mattino 42 | 6 Mattino 40 | 17 |
| 2 | 10 Sera 29 | 2 Mattino 28 | 7 Mattino 23 | 18 |
| 3 | 11 Sera 16 | 3 Mattino 18 | 8 Mattino 8 | 19 |
| 4 | 11 Sera 59 | 4 Mattino 5 | 8 Mattino 58 | 20 |
| 5 | ——— | 4 Mattino 52 | 9 Mattino 50 | 21 |
| 6 | 0 Mattino 38 | 5 Mattino 39 | 10 Mattino 45 | 22 |
| 7 | 1 Mattino 12 | 6 Mattino 24 | 11 Mattino 44 | 23 |
| 8 | 1 Mattino 44 | 7 Mattino 10 | 0 Sera 44 | 24 |
| 9 | 2 Mattino 14 | 7 Mattino 55 | 1 Sera 46 | 25 |
| 10 | 2 Mattino 44 | 8 Mattino 42 | 2 Sera 51 | 26 |
| 11 | 3 Mattino 15 | 9 Mattino 30 | 3 Sera 58 | 27 |
| 12 | 3 Mattino 46 | 10 Mattino 20 | 5 Sera 6 | 28 |
| 13 | 4 Mattino 22 | 11 Mattino 14 | 6 Sera 18 | 29 |
| 14 | 5 Mattino 1 | 0 Sera 8 | 7 Sera 29 | 30 |
| 15 | 5 Mattino 47 | 1 Sera 9 | 8 Sera 39 | 1 |
| 16 | 6 Mattino 39 | 2 Sera 10 | 9 Sera 44 | 2 |
| 17 | 7 Mattino 39 | 3 Sera 11 | 10 Sera 42 | 3 |
| 18 | 8 Mattino 44 | 4 Sera 11 | 11 Sera 33 | 4 |
| 19 | 9 Mattino 52 | 5 Sera 8 | ——— | 5 |
| 20 | 11 Mattino 2 | 6 Sera 2 | 0 Mattino 16 | 6 |
| 21 | 0 Sera 11 | 6 Sera 53 | 0 Mattino 53 | 7 |
| 22 | 1 Sera 19 | 7 Sera 42 | 1 Mattino 27 | 8 |
| 23 | 2 Sera 24 | 8 Sera 30 | 1 Mattino 58 | 9 |
| 24 | 3 Sera 29 | 9 Sera 17 | 2 Mattino 29 | 10 |
| 25 | 4 Sera 32 | 10 Sera 3 | 2 Mattino 58 | 11 |
| 26 | 5 Sera 33 | 10 Sera 50 | 3 Mattino 30 | 12 |
| 27 | 6 Sera 33 | 11 Sera 37 | 4 Mattino 3 | 13 |
| 28 | 7 Sera 30 | ——— | 4 Mattino 39 | 14 |
| 29 | 8 Sera 24 | 0 Mattino 25 | 5 Mattino 19 | 15 |
| 30 | 9 Sera 13 | 1 Mattino 13 | 6 Mattino 3 | 16 |
| 31 | 9 Sera 57 | 2 Mattino 0 | 6 Mattino 51 | 17 |

Ultimo quarto il 7 a $9^h$ $32^m$ di matt.
Luna nuova il 14 a 4 7 di sera.
Primo quarto il 21 a 6 34 di matt.
Luna piena il 28 a 9 20 di sera.

## Giugno

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|
| | h m | h m | h m | |
| 1 | 10 Sera 37 | 2 Mattino 48 | 7 Mattino 42 | 18 |
| 2 | 11 Sera 13 | 3 Mattino 34 | 8 Mattino 37 | 19 |
| 3 | 11 Sera 46 | 4 Mattino 20 | 9 Mattino 33 | 20 |
| 4 | ——— | 5 Mattino 5 | 10 Mattino 32 | 21 |
| 5 | 0 Mattino 16 | 5 Mattino 50 | 11 Mattino 32 | 22 |
| 6 | 0 Mattino 45 | 6 Mattino 45 | 0 Sera 35 | 23 |
| 7 | 1 Mattino 14 | 7 Mattino 21 | 1 Sera 38 | 24 |
| 8 | 1 Mattino 44 | 8 Mattino 9 | 2 Sera 45 | 25 |
| 9 | 2 Mattino 16 | 8 Mattino 59 | 3 Sera 54 | 26 |
| 10 | 2 Mattino 53 | 9 Mattino 53 | 5 Sera 4 | 27 |
| 11 | 3 Mattino 35 | 10 Mattino 50 | 6 Sera 15 | 28 |
| 12 | 4 Mattino 23 | 11 Mattino 51 | 7 Sera 24 | 29 |
| 13 | 4 Mattino 24 | 0 Sera 53 | 8 Sera 28 | 1 |
| 14 | 5 Mattino 20 | 1 Sera 56 | 9 Sera 32 | 2 |
| 15 | 7 Mattino 34 | 2 Sera 56 | 10 Sera 12 | 3 |
| 16 | 8 Mattino 46 | 3 Sera 54 | 10 Sera 52 | 4 |
| 17 | 9 Mattino 59 | 4 Sera 43 | 11 Sera 30 | 5 |
| 18 | 11 Mattino 8 | 5 Sera 39 | ——— | 6 |
| 19 | 0 Sera 16 | 6 Sera 28 | 0 Mattino 2 | 7 |
| 20 | 1 Sera 22 | 7 Sera 15 | 0 Mattino 33 | 8 |
| 21 | 2 Sera 25 | 8 Sera 3 | 1 Mattino 2 | 9 |
| 22 | 3 Sera 27 | 8 Sera 48 | 1 Mattino 34 | 10 |
| 23 | 4 Sera 27 | 9 Sera 35 | 2 Mattino 6 | 11 |
| 24 | 5 Sera 24 | 10 Sera 22 | 2 Mattino 41 | 12 |
| 25 | 6 Sera 19 | 11 Sera 9 | 3 Mattino 18 | 13 |
| 26 | 7 Sera 10 | 11 Sera 57 | 4 Mattino 0 | 14 |
| 27 | 8 Sera 56 | ——— | 4 Mattino 46 | 15 |
| 28 | 8 Sera 38 | 0 Mattino 45 | 5 Mattino 37 | 16 |
| 29 | 9 Sera 15 | 1 Mattino 42 | 6 Mattino 31 | 17 |
| 30 | 9 Sera 49 | 2 Mattino 18 | 7 Mattino 27 | 18 |

Ultimo quarto il 6 a $0^h$ $54^m$ di matt.
Luna nuova il 12 a 11 31 di sera.
Primo quarto il 19 a 2 38 di sera.
Luna piena il 27 a 0 7 di sera.

# — LUNA —

## Luglio

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 10 Sera | 20 | 3 Mattino | 3 | 8 Mattino | 24 | 19 |
| 2 | 10 | 49 | 3 | 47 | 9 | 24 | 20 |
| 3 | 11 | 17 | 4 | 32 | 10 | 24 | 21 |
| 4 | 11 | 46 | 5 | 15 | 11 | 26 | 22 |
| 5 | — | — | 6 | 2 | 0 Sera | 30 | 23 |
| 6 | 0 Mattino | 16 | 6 | 50 | 1 | 35 | 24 |
| 7 | 0 | 50 | 7 | 41 | 2 | 44 | 25 |
| 8 | 1 | 27 | 8 | 34 | 3 | 52 | 26 |
| 9 | 2 | 11 | 9 | 32 | 5 | 2 | 27 |
| 10 | 3 | 3 | 10 | 33 | 6 | 8 | 28 |
| 11 | 4 | 2 | 11 | 35 | 7 | 8 | 29 |
| 12 | 5 | 9 | 0 Sera | 38 | 8 | 1 | 1 |
| 13 | 6 | 22 | 1 | 38 | 8 | 47 | 2 |
| 14 | 7 | 36 | 2 | 36 | 9 | 26 | 3 |
| 15 | 8 | 49 | 3 | 30 | 10 | 2 | 4 |
| 16 | 10 | 1 | 4 | 22 | 10 | 35 | 5 |
| 17 | 11 | 9 | 5 | 11 | 11 | 6 | 6 |
| 18 | 0 Sera | 15 | 5 | 59 | 11 | 37 | 7 |
| 19 | 1 | 18 | 6 | 44 | — | — | 8 |
| 20 | 2 | 20 | 7 | 33 | 0 Mattino | 9 | 9 |
| 21 | 3 | 19 | 8 | 20 | 0 | 43 | 10 |
| 22 | 4 | 14 | 9 | 7 | 1 | 20 | 11 |
| 23 | 5 | 6 | 9 | 54 | 2 | 0 | 12 |
| 24 | 5 | 54 | 10 | 42 | 2 | 44 | 13 |
| 25 | 6 | 37 | 11 | 29 | 3 | 33 | 14 |
| 26 | 7 | 16 | — | — | 4 | 25 | 15 |
| 27 | 7 | 51 | 0 Mattino | 15 | 5 | 21 | 16 |
| 28 | 8 | 23 | 1 | 1 | 6 | 18 | 17 |
| 29 | 8 | 53 | 1 | 46 | 7 | 17 | 18 |
| 30 | 9 | 22 | 2 | 31 | 8 | 18 | 19 |
| 31 | 9 | 51 | 3 | 15 | 9 | 18 | 20 |

Ultimo quarto il 5 a 1h 15m di sera.
Luna nuova il 12 a 6 5 di matt
Primo quarto il 19 a 1 9 di matt.
Luna piena il 27 a 3 12 di matt

## Agosto

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 10 Sera | 19 | 4 Mattino | 0 | 10 Matt. | 21 | 21 |
| 2 | 10 | 51 | 4 | 47 | 11 | 24 | 22 |
| 3 | 11 | 26 | 5 | 35 | 0 Sera | 30 | 23 |
| 4 | — | — | 6 | 26 | 1 | 37 | 24 |
| 5 | 0 Mattino | 5 | 7 | 20 | 2 | 34 | 25 |
| 6 | 0 | 51 | 8 | 17 | 3 | 49 | 26 |
| 7 | 1 | 46 | 9 | 17 | 4 | 51 | 27 |
| 8 | 2 | 48 | 10 | 18 | 5 | 47 | 28 |
| 9 | 3 | 57 | 11 | 19 | 6 | 36 | 29 |
| 10 | 5 | 9 | 0 Sera | 18 | 7 | 17 | 30 |
| 11 | 6 | 24 | 1 | 15 | 7 | 57 | 1 |
| 12 | 7 | 38 | 2 | 9 | 8 | 32 | 2 |
| 13 | 8 | 49 | 3 | 1 | 9 | 4 | 3 |
| 14 | 9 | 58 | 3 | 52 | 9 | 37 | 4 |
| 15 | 11 | 5 | 4 | 40 | 10 | 9 | 5 |
| 16 | 0 Sera | 9 | 5 | 28 | 10 | 43 | 6 |
| 17 | 1 | 10 | 6 | 15 | 11 | 20 | 7 |
| 18 | 2 | 7 | 7 | 3 | 11 | 58 | 8 |
| 19 | 3 | 0 | 7 | 51 | — | — | 9 |
| 20 | 3 | 50 | 8 | 38 | 0 Mattino | 41 | 10 |
| 21 | 4 | 35 | 9 | 25 | 1 | 29 | 11 |
| 22 | 5 | 15 | 10 | 12 | 2 | 19 | 12 |
| 23 | 5 | 52 | 10 | 58 | 3 | 14 | 13 |
| 24 | 6 | 25 | 11 | 44 | 4 | 11 | 14 |
| 25 | 6 | 56 | — | — | 5 | 10 | 15 |
| 26 | 7 | 26 | 0 Mattino | 29 | 6 | 10 | 16 |
| 27 | 7 | 54 | 1 | 14 | 7 | 12 | 17 |
| 28 | 8 | 24 | 1 | 59 | 8 | 14 | 18 |
| 29 | 8 | 55 | 2 | 45 | 9 | 17 | 19 |
| 30 | 9 | 27 | 3 | 33 | 10 | 23 | 20 |
| 31 | 10 | 5 | 4 | 22 | 11 | 27 | 21 |

Ultimo quarto il 3 a 10h 45m di sera
Luna nuova il 10 a 1 3 di sera.
Primo quarto il 17 a 2 36 di sera.
Luna piena il 25 a 6 15 di sera

# — LUNA —

## Settembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|
| | h m | h m | h m | |
| 1 | 10 Sera 47 | 5 Mattino 14 | 0 Sera 33 | 22 |
| 2 | 11 37 | 6 9 | 1 38 | 23 |
| 3 | ——— | 7 6 | 2 38 | 24 |
| 4 | 0 Mattino 35 | 8 4 | 3 35 | 25 |
| 5 | 1 37 | 9 4 | 4 26 | 26 |
| 6 | 2 46 | 10 2 | 5 11 | 27 |
| 7 | 3 59 | 10 59 | 5 50 | 28 |
| 8 | 5 12 | 11 54 | 6 27 | 29 |
| 9 | 6 25 | 0 Sera 47 | 7 1 | 1 |
| 10 | 7 36 | 1 39 | 7 34 | 2 |
| 11 | 8 45 | 2 29 | 8 6 | 3 |
| 12 | 9 52 | 3 18 | 8 40 | 4 |
| 13 | 10 55 | 4 7 | 9 16 | 5 |
| 14 | 11 56 | 4 56 | 9 55 | 6 |
| 15 | 0 Sera 51 | 5 44 | 10 38 | 7 |
| 16 | 1 43 | 6 32 | 11 23 | 8 |
| 17 | 2 30 | 7 20 | ——— | 9 |
| 18 | 3 13 | 8 7 | 0 Mattino 13 | 10 |
| 19 | 3 50 | 8 53 | 1 6 | 11 |
| 20 | 4 25 | 9 39 | 2 1 | 12 |
| 21 | 4 57 | 10 24 | 3 0 | 13 |
| 22 | 5 27 | 11 9 | 3 59 | 14 |
| 23 | 5 56 | 11 55 | 5 1 | 15 |
| 24 | 6 26 | ——— | 6 4 | 16 |
| 25 | 6 54 | 0 Mattino 42 | 7 8 | 17 |
| 26 | 7 30 | 1 29 | 8 13 | 18 |
| 27 | 8 6 | 2 19 | 9 20 | 19 |
| 28 | 8 47 | 3 11 | 10 26 | 20 |
| 29 | 9 34 | 4 5 | 11 31 | 21 |
| 30 | 10 28 | 5 1 | 0 S. 33 | 22 |

Ultimo quarto il 2 a 6h 4m di matt.
Luna nuova il 8 a 9 33 di sera.
Primo quarto il 16 a 7 4 di matt.
Luna piena il 24 a 8 44 di matt.

## Ottobre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|
| | h m | h m | h m | |
| 1 | 11 S. 28 | 5 58 | 1 Ser 30 | 23 |
| 2 | ——— | 6 56 | 2 21 | 24 |
| 3 | 0 Mattino 34 | 7 53 | 3 6 | 25 |
| 4 | 1 42 | 8 48 | 3 46 | 26 |
| 5 | 2 54 | 9 43 | 4 24 | 27 |
| 6 | 4 4 | 10 35 | 4 57 | 28 |
| 7 | 5 15 | 11 26 | 5 30 | 29 |
| 8 | 6 24 | 0 Sera 17 | 6 3 | 1 |
| 9 | 7 33 | 1 7 | 6 36 | 2 |
| 10 | 8 38 | 1 55 | 7 11 | 3 |
| 11 | 9 41 | 2 56 | 7 49 | 4 |
| 12 | 10 40 | 3 35 | 8 30 | 5 |
| 13 | 11 34 | 4 24 | 9 11 | 6 |
| 14 | 0 Sera 24 | 5 12 | 10 4 | 7 |
| 15 | 1 8 | 6 0 | 10 55 | 8 |
| 16 | 1 47 | 6 46 | 11 50 | 9 |
| 17 | 2 24 | 7 32 | ——— | 10 |
| 18 | 2 56 | 8 17 | 0 Mattino 47 | 11 |
| 19 | 3 27 | 9 2 | 1 46 | 12 |
| 20 | 3 56 | 9 48 | 2 47 | 13 |
| 21 | 4 26 | 10 32 | 3 49 | 14 |
| 22 | 4 56 | 11 22 | 4 53 | 15 |
| 23 | 5 28 | ——— | 5 59 | 16 |
| 24 | 6 4 | 0 Mattino 11 | 7 6 | 17 |
| 25 | 6 44 | 1 4 | 8 15 | 18 |
| 26 | 7 30 | 1 58 | 9 22 | 19 |
| 27 | 8 23 | 2 55 | 10 26 | 20 |
| 28 | 9 22 | 3 53 | 11 26 | 21 |
| 29 | 10 26 | 4 51 | 0 Sera 20 | 22 |
| 30 | 11 33 | 5 8 | 1 6 | 23 |
| 31 | ——— | 6 44 | 1 48 | 24 |

Ultimo quarto l' 1 a 0h 18m di sera.
Luna nuova l' 8 a 8 21 di matt.
Primo quarto il 16 a 2 10 di matt.
Luna piena il 23 a 10 12 di sera.
Ultimo quarto il 30 a 6 47 di sera.

## — LUNA —

### Novembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 0 | Mattino 52 | 7 | Mattino 37 | 2 | Sera 25 | 25 |
| 2 | 1 | 52 | 8 | 29 | 2 | 59 | 26 |
| 3 | 3 | 1 | 9 | 19 | 3 | 30 | 27 |
| 4 | 4 | 9 | 10 | 9 | 4 | 1 | 28 |
| 5 | 5 | 17 | 10 | 58 | 4 | 33 | 29 |
| 6 | 6 | 22 | 11 | 47 | 5 | 7 | 30 |
| 7 | 7 | 26 | 0 | Sera 37 | 5 | 43 | 1 |
| 8 | 8 | 17 | 1 | 26 | 6 | 24 | 2 |
| 9 | 9 | 24 | 2 | 16 | 7 | 7 | 3 |
| 10 | 10 | 17 | 3 | 3 | 7 | 54 | 4 |
| 11 | 11 | 3 | 3 | 53 | 8 | 45 | 5 |
| 12 | 11 | 45 | 4 | 40 | 9 | 39 | 6 |
| 13 | 0 | Sera 22 | 5 | 26 | 10 | 35 | 7 |
| 14 | 0 | 56 | 6 | 11 | 11 | 32 | 8 |
| 15 | 1 | 27 | 6 | 55 | ——— | | 9 |
| 16 | 1 | 56 | 7 | 39 | 0 | Mattino 31 | 10 |
| 17 | 2 | 24 | 8 | 24 | 1 | 32 | 11 |
| 18 | 2 | 54 | 9 | 11 | 2 | 34 | 12 |
| 19 | 3 | 24 | 9 | 59 | 3 | 39 | 13 |
| 20 | 3 | 58 | 10 | 51 | 4 | 46 | 14 |
| 21 | 4 | 36 | 11 | 45 | 5 | 55 | 15 |
| 22 | 5 | 20 | ——— | | 7 | 4 | 16 |
| 23 | 6 | 12 | 0 | Mattino 42 | 8 | 12 | 17 |
| 24 | 7 | 10 | 1 | 42 | 9 | 17 | 18 |
| 25 | 8 | 14 | 2 | 42 | 10 | 14 | 19 |
| 26 | 9 | 23 | 3 | 42 | 11 | 6 | 20 |
| 27 | 10 | 33 | 4 | 39 | 11 | 50 | 21 |
| 28 | 11 | 43 | 5 | 35 | 0 | Sera 28 | 22 |
| 29 | ——— | | 6 | 27 | 1 | 3 | 23 |
| 30 | 0 | M 37 | 7 | 17 | 1 | 34 | 24 |

Luna nuova il 6 a 9h 52m di sera.
Primo quarto il 14 a 10 39 di sera.
Luna piena il 22 a 10 29 di matt.
Ultimo quarto il 29 a 2 46 di matt.

### Dicembre

| GIORNO del Mese | TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | GIORNO della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | m | h | m | h | m | |
| 1 | 2 | Mattino 0 | 8 | 6 | 2 | Mattino 5 | 25 |
| 2 | 3 | Mattino 7 | 8 | 54 | 2 | 35 | 26 |
| 3 | 4 | 11 | 9 | 42 | 3 | 8 | 27 |
| 4 | 5 | 16 | 10 | 31 | 3 | 43 | 28 |
| 5 | 6 | 17 | 11 | 19 | 4 | 20 | 29 |
| 6 | 7 | 16 | 0 | Sera 9 | 5 | 2 | 30 |
| 7 | 8 | 10 | 0 | Sera 58 | 5 | 47 | 1 |
| 8 | 8 | 59 | 1 | 46 | 6 | 36 | 2 |
| 9 | 9 | 43 | 2 | 34 | 7 | 29 | 3 |
| 10 | 10 | 22 | 3 | 20 | 8 | 24 | 4 |
| 11 | 10 | 57 | 4 | 6 | 9 | 5 | 5 |
| 12 | 11 | 29 | 4 | 50 | 10 | 19 | 6 |
| 13 | 11 | 58 | 5 | 34 | 11 | 18 | 7 |
| 14 | 0 | Sera 26 | 6 | 17 | ——— | | 8 |
| 15 | 0 | Sera 54 | 7 | 2 | 0 | Sera 15 | 9 |
| 16 | 1 | 23 | 7 | 48 | 1 | 20 | 10 |
| 17 | 1 | 54 | 8 | 37 | 2 | 25 | 11 |
| 18 | 2 | 29 | 9 | 28 | 3 | 31 | 12 |
| 19 | 3 | 9 | 10 | 24 | 4 | 39 | 13 |
| 20 | 3 | 56 | 11 | 23 | 5 | 48 | 14 |
| 21 | 4 | 51 | ——— | | 6 | 56 | 15 |
| 22 | 5 | 54 | 0 | Mattino 24 | 7 | 59 | 16 |
| 23 | 7 | 4 | 1 | Mattino 26 | 8 | 56 | 17 |
| 24 | 8 | 17 | 2 | 27 | 9 | 44 | 18 |
| 25 | 9 | 29 | 3 | 26 | 10 | 27 | 19 |
| 26 | 10 | 41 | 4 | 21 | 11 | 5 | 20 |
| 27 | 11 | 51 | 5 | 14 | 11 | 38 | 21 |
| 28 | ——— | | 6 | 4 | 0 | Mattino 10 | 22 |
| 29 | 0 | Mattino 59 | 6 | 53 | 0 | Mattino 40 | 23 |
| 30 | 2 | Mattino 4 | 7 | 39 | 1 | 12 | 24 |
| 31 | 3 | Mattino 8 | 8 | 27 | 1 | 45 | 25 |

Luna nuova il 6 a 2h 6m di sera.
Primo quarto il 14 a 7 11 di sera.
Luna piena il 21 a 9 48 di sera.
Ultimo quarto il 28 a 1 11 di sera.

# ECCLISSI

## (1885)

---

16 *Marzo.* Ecclisse annulare di Sole invisibile a Torino.

30 » Ecclisse parziale di Luna in parte visibile a Torino.

Uscita dall'ombra . . . . . $6^h$ $59^m$ pom.

Ultimo contatto coll'ombra a 104° dal punto più boreale del disco lunare verso ovest (immagine diritta).

8 *Settembre.* Ecclisse totale di Sole invisibile a Torino.

24 » Ecclisse parziale di Luna invisibile a Torino.

**P I**

| TEMPO MEDIO DI ROMA | MERCURIO | | | VENERE | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontare | Nascere | Passaggio al meridiano | Tramontar |
| | h m | h m | h m | h m | h m | h |
| 1 Gennaio ..... | 8 9 Mattino | 0 46 S. | 5 17 Sera | 5 41 Mattino | 10 14 Mattino | 2 Sera |
| 11 » ..... | 6 43 | 11 20 Mattino | 3 57 | 6 3 | 10 27 | 2 |
| 21 » ..... | 6 17 | 10 47 | 3 17 | 6 20 | 10 42 | 3 |
| 1 Febbraio ..... | 6 26 | 10 52 | 3 20 | 6 31 | 10 58 | 3 |
| 11 » ..... | 6 38 | 11 11 | 3 47 | 6 35 | 11 11 | 3 |
| 21 » ..... | 6 44 | 11 34 | 4 26 | 6 32 | 11 23 | 4 |
| 1 Marzo ..... | 6 46 | 11 55 | 5 8 | 6 27 | 11 31 | 4 |
| 11 » ..... | 6 41 | 0 24 Sera | 6 8 | 6 17 | 11 39 | 5 |
| 21 » ..... | 6 42 | 0 55 | 7 13 | 6 4 | 11 46 | 5 |
| 1 Aprile ..... | 6 31 | 1 25 | 8 23 | 5 47 | 11 53 | 5 |
| 11 » ..... | 6 10 | 1 27 | 8 46 | 5 36 | 11 59 | 6 |
| 21 » ..... | 5 36 | 0 53 | 8 10 | 5 23 | 0 6 Sera | 6 |
| 1 Maggio ..... | 4 57 | 11 55 Mattino | 6 50 | 5 25 | 0 14 | 7 |
| 11 » ..... | 4 27 | 11 10 | 5 53 | 5 6 | 0 23 | 7 |
| 21 » ..... | 3 57 | 10 42 | 5 29 | 5 3 | 0 34 | 8 |
| 1 Giugno ..... | 3 40 | 10 42 | 5 47 | 5 4 | 0 48 | 8 |
| 11 » ..... | 3 39 | 11 4 | 6 34 | 5 14 | 1 3 | 8 |
| 21 » ..... | 4 3 | 11 48 | 7 39 | 5 32 | 1 17 | 9 |
| 1 Luglio ..... | 4 56 | 0 44 Sera | 8 37 | 5 50 | 1 30 | 9 |
| 11 » ..... | 5 58 | 1 30 | 9 4 | 6 15 | 1 42 | 9 |
| 21 » ..... | 6 52 | 1 57 | 9 5 | 6 41 | 1 52 | 9 |
| 1 Agosto ..... | 7 32 | 2 9 | 8 47 | 7 11 | 2 1 | 8 |
| 11 » ..... | 7 44 | 2 1 | 8 17 | 7 37 | 2 7 | 8 |
| 21 » ..... | 7 24 | 1 30 | 7 36 | 7 39 | 2 12 | 8 |
| 1 Settembre ..... | 6 5 | 0 22 Mattino | 6 39 | 8 30 | 2 17 | 8 |
| 11 » ..... | 4 42 | 11 21 | 6 0 | 8 55 | 2 21 | 7 |
| 21 » ..... | 4 34 | 11 9 | 5 16 | 9 21 | 2 27 | 7 |
| 1 Ottobre ..... | 5 17 | 11 30 | 5 43 | 9 48 | 2 34 | 7 |
| 11 » ..... | 6 14 | 11 54 | 5 37 | 10 12 | 2 42 | 7 |
| 21 » ..... | 7 32 | 0 17 Sera | 5 4 | 10 43 | 2 53 | 7 |
| 1 Novembre ..... | 7 57 | 0 41 | 5 27 | 10 58 | 3 5 | 7 |
| 11 » ..... | 8 41 | 1 3 | 5 27 | 11 11 | 3 16 | 7 |
| 21 » ..... | 9 17 | 1 26 | 5 37 | 11 16 | 3 26 | 7 |
| 1 Dicembre ..... | 9 32 | 1 40 | 5 50 | 11 14 | 3 34 | 7 |
| 11 » ..... | 8 59 | 1 19 | 5 39 | 11 4 | 3 37 | 8 |
| 21 » ..... | 7 18 | 11 54 Matt. | 4 28 | 10 47 | 3 36 | 8 |
| 31 » ..... | 6 16 | 10 53 | 3 29 | 10 23 | 3 29 | 8 |

**E T I**

| MARTE | | | | | | GIOVE | | | | | | SATURNO | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | | Nascere | | Passaggio al meridiano | | Tramontare | |
| h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m | h | m |
| 8 | 40 | 1 | 4 | 5 | 28 | 9 | 21 | 4 | 7 | 10 | 53 | 3 | 7 | 10 | 45 | 6 | 23 |
| 8 | 28 | 0 | 58 | 5 | 28 | 8 | 38 | 3 | 25 | 10 | 12 | 2 | 25 | 10 | 3 | 5 | 41 |
| 8 | 11 | 0 | 51 | 5 | 31 | 7 | 55 | 2 | 43 | 9 | 31 | 1 | 43 | 9 | 21 | 4 | 59 |
| 7 | 53 | 0 | 43 | 5 | 33 | 7 | 6 | 1 | 56 | 8 | 46 | 0 | 58 | 8 | 36 | 4 | 14 |
| 7 | 34 | 0 | 35 | 5 | 36 | 6 | 20 | 1 | 12 | 8 | 4 | 0 | 18 | 7 | 56 | 3 | 34 |
| 7 | 10 | 0 | 26 | 5 | 42 | 5 | 33 | 0 | 27 | 7 | 21 | 11 | 39 | 7 | 17 | 2 | 55 |
| 6 | 55 | 0 | 18 | 5 | 43 | 4 | 52 | 11 | 48 | 6 | 44 | 11 | 8 | 6 | 46 | 2 | 24 |
| 6 | 32 | 0 | 8 | 5 | 44 | 4 | 6 | 11 | 4 | 6 | 2 | 10 | 29 | 6 | 8 | 1 | 47 |
| 6 | 10 | 11 | 58 | 5 | 46 | 3 | 21 | 10 | 20 | 5 | 19 | 9 | 52 | 5 | 31 | 1 | 10 |
| 5 | 44 | 11 | 46 | 5 | 48 | 2 | 34 | 9 | 34 | 4 | 34 | 9 | 12 | 4 | 51 | 0 | 30 |
| 5 | 20 | 11 | 35 | 5 | 50 | 1 | 52 | 8 | 53 | 3 | 54 | 8 | 35 | 4 | 15 | 11 | 55 |
| 4 | 57 | 11 | 24 | 5 | 51 | 1 | 12 | 8 | 13 | 3 | 14 | 8 | 0 | 3 | 40 | 11 | 20 |
| 4 | 34 | 11 | 13 | 5 | 52 | 0 | 33 | 7 | 34 | 2 | 35 | 7 | 25 | 3 | 5 | 10 | 45 |
| 4 | 11 | 11 | 2 | 5 | 53 | 11 | 56 | 6 | 56 | 1 | 56 | 6 | 49 | 2 | 30 | 10 | 11 |
| 3 | 49 | 10 | 51 | 5 | 53 | 11 | 21 | 6 | 20 | 1 | 59 | 6 | 15 | 1 | 56 | 9 | 37 |
| 3 | 26 | 10 | 39 | 5 | 52 | 10 | 44 | 5 | 41 | 0 | 38 | 5 | 37 | 1 | 19 | 9 | 1 |
| 3 | 6 | 10 | 29 | 5 | 52 | 10 | 11 | 5 | 6 | 0 | 1 | 5 | 3 | 0 | 45 | 8 | 27 |
| 2 | 48 | 10 | 19 | 5 | 50 | 9 | 39 | 4 | 32 | 11 | 25 | 4 | 29 | 0 | 11 | 7 | 53 |
| 2 | 31 | 10 | 9 | 5 | 47 | 9 | 9 | 3 | 59 | 10 | 49 | 3 | 56 | 11 | 38 | 7 | 20 |
| 2 | 16 | 10 | 0 | 5 | 44 | 8 | 38 | 3 | 26 | 10 | 14 | 3 | 22 | 11 | 4 | 6 | 46 |
| 2 | 3 | 9 | 50 | 5 | 37 | 8 | 9 | 2 | 54 | 9 | 39 | 2 | 48 | 10 | 30 | 6 | 12 |
| 1 | 50 | 9 | 39 | 5 | 28 | 7 | 38 | 2 | 19 | 9 | 0 | 2 | 10 | 9 | 52 | 5 | 32 |
| 1 | 30 | 9 | 29 | 5 | 19 | 7 | 9 | 1 | 47 | 8 | 25 | 1 | 36 | 9 | 18 | 5 | 0 |
| 1 | 31 | 9 | 18 | 5 | 5 | 6 | 41 | 1 | 16 | 7 | 51 | 1 | 1 | 8 | 43 | 4 | 25 |
| 1 | 22 | 9 | 5 | 4 | 48 | 6 | 10 | 0 | 41 | 7 | 12 | 0 | 22 | 8 | 4 | 3 | 46 |
| 1 | 14 | 8 | 52 | 4 | 30 | 5 | 42 | 0 | 10 | 6 | 48 | 11 | 46 | 7 | 27 | 3 | 18 |
| 1 | 6 | 8 | 38 | 4 | 10 | 5 | 14 | 11 | 38 | 6 | 2 | 11 | 10 | 6 | 51 | 2 | 32 |
| 1 | 1 | 8 | 24 | 3 | 49 | 4 | 46 | 11 | 7 | 5 | 28 | 10 | 32 | 6 | 13 | 1 | 54 |
| 0 | 55 | 8 | 8 | 3 | 23 | 4 | 17 | 10 | 35 | 4 | 53 | 9 | 54 | 5 | 35 | 1 | 16 |
| 0 | 46 | 7 | 52 | 3 | 3 | 3 | 49 | 10 | 3 | 4 | 17 | 9 | 15 | 4 | 56 | 0 | 37 |
| 0 | 31 | 7 | 32 | 2 | 35 | 3 | 17 | 9 | 28 | 3 | 39 | 8 | 31 | 4 | 12 | 11 | 53 |
| 0 | 20 | 7 | 13 | 2 | 8 | 2 | 47 | 8 | 55 | 3 | 10 | 7 | 51 | 3 | 32 | 11 | 13 |
| 0 | 4 | 6 | 52 | 1 | 40 | 2 | 16 | 8 | 22 | 2 | 28 | 7 | 9 | 2 | 50 | 10 | 31 |
| 1 | 50 | 6 | 31 | 1 | 12 | 1 | 45 | 7 | 48 | 1 | 51 | 6 | 26 | 2 | 8 | 9 | 50 |
| 1 | 32 | 6 | 7 | 0 | 42 | 1 | 11 | 7 | 13 | 1 | 15 | 5 | 44 | 1 | 26 | 9 | 8 |
| 1 | 10 | 5 | 41 | 0 | 12 | 0 | 38 | 6 | 38 | 0 | 38 | 5 | 1 | 0 | 43 | 8 | 25 |
| 0 | 47 | 5 | 14 | 11 | 41 | 0 | 2 | 6 | 1 | 0 | 0 | 4 | 18 | 0 | 0 | 7 | 42 |

*L'Accademico Segretario*

A. Sobrero.

# SOMMARIO

## Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.


Roiti — Determinazione della resistenza elettrica di un filo in misura assoluta . . . . . *Pag.* 483

Novarese — Sulle accelerazioni nel moto di una figura piana nel proprio piano . . . . . » 501

Genocchi — Presentazione di alcuni opuscoli . . . . . » 504

Guglielmo — Intorno ad alcune modificazioni delle pompe pneumatiche a mercurio . . . . . » 505

Palazzo e Battelli — Intorno alla fusione dei miscugli di alcune sostanze non metalliche . . . . . » 514

Dorna — Prime osservazioni con anelli micrometrici all'Osservatorio di Torino — Nota sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici con stelle . . . . . » 529

Charrier — Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti per l'anno 1885 . . . . . » 558

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

VOL. XIX, DISP. 6ª (*Maggio* 1884)

---

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

**Maggio**

1884.

# CLASSE
## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza dell'11 Maggio 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Cav. Prof. G. Basso presenta e legge la seguente Nota del signor N. Jadanza:

# CANNOCCHIALI RIDOTTI.

## I.

Nelle scienze sperimentali si presenta spesso il caso di avere strumenti forniti di cannocchiali che abbiano un forte ingrandimento senza essere molto lunghi. Nella Topografia e nella Celerimensura dove le distanze si misurano alla stadia questo bisogno diventa maggiore, giacchè la eccessiva lunghezza dei cannocchiali mal si comporta col facile maneggio degli strumenti.

I moderni costruttori di strumenti Geodetici e Topografici son giunti ad avere ingrandimenti considerevoli accoppiando ad obbiettivi di moderate distanze focali oculari di distanze focali piccolissime. Codesto metodo non è il migliore, e mentre in tal modo l'occhio si affatica, non si raggiunge lo scopo delle misure micrometriche poichè vengono ad essere ingranditi anche i fili del reticolo.

Non si potrebbe avere un cannocchiale con obbiettivo composto, tale da avere una grande distanza focale obbiettiva e nello stesso tempo ottenere che esso cannocchiale sia corto? (*).

(*) Il problema così formulato ci fu proposto dal chiarissimo Professore G. B. Daddi, Professore di Geometria pratica nella R. Scuola degli Ingegneri in Torino.

La soluzione di tale problema presentiamo in questa nota, e ad un cannocchiale cosiffatto abbiamo dato il nome di *cannocchiale ridotto* (*).

Le formole che dànno la distanza focale ed i punti cardinali di un sistema composto di due lenti le cui distanze focali sieno $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\varphi = \dfrac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}} \\ E = E_1 + \varphi_1 \dfrac{\Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}; & E^* = E_2^* - \varphi_2 \dfrac{\Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ F = E_1 + \varphi_1 \dfrac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}; & F^* = E_2^* - \varphi_2 \dfrac{\Delta - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \end{array}\right\} (1);$$

dove $\varphi$, $E$, $E^*$, $F$, $F^*$, sono la distanza focale, il primo ed il secondo punto principale, il primo ed il secondo fuoco del sistema composto, e $\varphi_1$, $E_1$, $E_1^*$, $F_1$, $F_1^*$ e $\varphi_2$, $E_2$, $E_2^*$, $F_2$, $F_2^*$ sono le stesse quantità relative alla prima ed alla seconda lente. $\Delta$ rappresenta la differenza $E_2 - E_1^*$ ossia la distanza tra il primo punto principale della seconda lente ed il secondo punto principale della prima, ed è una quantità positiva.

La prima lente, cioè quella che riceve prima la luce sia convergente; vediamo come dovrà essere la seconda lente affinchè sieno soddisfatte le condizioni richieste dal problema.

È chiaro che la distanza focale del sistema composto dovrà essere maggiore di $\varphi_1$. Inoltre, perchè la lunghezza del cannocchiale sia minore di quella che converrebbe alla distanza focale $\varphi$, il secondo punto principale dovrà trovarsi fuori il sistema (innanzi la prima lente), ed il secondo fuoco dovrà anch'esso essere fuori il sistema; ma dalla parte opposta (dopo la seconda lente).

---

(*) Avevamo scritto la presente nota e costruito un cannocchiale ridotto, quando ci venne dato di leggere una Memoria del Prof. Galileo Ferraris sullo stesso argomento. L'illustre Professore ha risoluto il medesimo problema; però le nostre formole sono molto più semplici e pratiche. Chi voglia consultare quel pregevole lavoro lo troverà nel Vol. 16 degli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1880-81), *pag.* 45.

Quest'ultima condizione e la prima $\varphi > \varphi_1$ si esprimono mediante le disuguaglianze seguenti:

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} > \varphi_1$$

$$\varphi_2 \frac{\Delta - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} < 0$$

ovvero per mezzo delle altre:

$$\Delta > \varphi_1$$

$$\varphi_2 (\Delta - \varphi_1) < 0 .$$

Finchè $\varphi_2$ è positiva non è possibile soddisfare alla seconda delle condizioni precedenti, e quindi al problema proposto. Dunque, perchè il problema sia possibile, l'*obbiettivo dovrà essere composto di due lenti*, *la prima convergente*, *la seconda divergente.*

Se nelle formole (1) mutiamo il segno a $\varphi_2$ otterremo le seguenti che convengono al nostro caso.

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\varphi = \dfrac{\varphi_1 \varphi_2}{\Delta + \varphi_2 - \varphi_1}} \\ E = E_1 - \dfrac{\varphi_1 \Delta}{\Delta + \varphi_2 - \varphi_1} \; ; & E^* = E_2^* - \dfrac{\varphi_2 \Delta}{\Delta + \varphi_2 - \varphi_1} \\ F = E_1 - \dfrac{\varphi_1 (\Delta + \varphi_2)}{\Delta + \varphi_2 - \varphi_1} \; ; & F^* = E_2^* - \dfrac{\varphi_2 (\Delta - \varphi_1)}{\Delta + \varphi_2 - \varphi_1} \end{array}\right\} \quad (2).$$

Poniamo $\varphi_1 = k \varphi_2$, $k$ essendo una indeterminata; le formole precedenti diventeranno:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\varphi = \dfrac{k \varphi_2^2}{\Delta - (k-1) \varphi_2}} \\ E = E_1 - \dfrac{k \Delta \varphi_2}{\Delta - (k-1) \varphi_2} \; ; & E^* = E_2^* - \dfrac{\Delta \varphi_2}{\Delta - (k-1) \varphi_2} \\ F = E_1 - \dfrac{k \varphi_2 (\Delta + \varphi_2)}{\Delta - (k-1) \varphi_2} \; ; & F^* = E_2^* - \dfrac{\varphi_2 (\Delta - k \varphi_2)}{\Delta - (k-1) \varphi_2} \end{array}\right\} \quad (3),$$

e se, $m$ essendo una nuova indeterminata, poniamo

$$\varphi = m\,\varphi_2\,;$$

possiamo determinare $\Delta$ in funzione di $k$ ed $m$ mediante l'equazione:

$$\frac{k\,\varphi_2^{\,2}}{\Delta - (k-1)\,\varphi_2} = m\,\varphi_2\,,$$

donde si deduce

$$\Delta = \left[\frac{k}{m} + k - 1\right]\varphi_2.$$

Introducendo questo valore di $\Delta$ ed osservando che si ha:

$$\Delta - (k-1)\,\varphi_2 = \frac{k\,\varphi_2}{m}$$

$$\Delta - k\,\varphi_2 = -\frac{m-k}{m}\,\varphi_2$$

$$\Delta + \varphi_2 = k\,\varphi_2\,\frac{m+1}{m}$$

le formole (3) si trasformeranno nelle seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} & \varphi = m\,\varphi_2 \\ E = E_1 - m\,\Delta\,; & E^* = E_2^* - \dfrac{m}{k}\Delta \\ F = E - k(m+1)\,\varphi_2\,; & F^* = E_2^* + \dfrac{m-k}{k}\,\varphi_2 \\ & \Delta = \left[\dfrac{k}{m} + k - 1\right]\varphi_2. \end{array}\right\}\ (4)\ ;$$

La lunghezza $L$ del cannocchiale, trascurando lo spessore delle due lenti, sarà evidentemente data da:

$$L = \Delta + \frac{m-k}{k}\,\varphi_2$$

ovvero da

$$L = \left[\frac{m}{k} + \frac{k}{m} + k - 2\right]\varphi_2 \qquad \ldots\ldots(5).$$

Si può scegliere $k$ in modo che $L$ sia un *minimo;* basterà porre:

$$\frac{dL}{dk} = 0,$$

ossia

$$1 + \frac{1}{m} - \frac{m}{k^2} = 0,$$

donde

$$k = \frac{m}{\sqrt{m+1}} \qquad \ldots\ldots(6).$$

Sostituendo questo valore di $k$ le espressioni di $\Delta$ ed $L$ diventano:

$$\Delta = [\sqrt{m+1} - 1]\varphi_2 \qquad \ldots\ldots(7);$$

$$L = 2[\sqrt{m+1} - 1]\varphi_2,$$

ovvero

$$L = 2\Delta \qquad \ldots\ldots(8).$$

E quindi: *La lunghezza del cannocchiale* (qui trascuriamo l'oculare che è variabile secondo la natura del cannocchiale, ed intendiamo per lunghezza del cannocchiale la lunghezza del tubo compresa tra la prima lente obbiettiva ed il secondo fuoco principale del sistema composto) *è doppia della distanza delle due lenti che compongono l'obbiettivo.*

La lunghezza $L$, quando l'obbiettivo fosse una semplice lente di distanza focale $m\varphi_2$, dovrebbe essere evidentemente eguale a $m\varphi_2$; quindi il *vantaggio* nella lunghezza del cannocchiale è dato da:

$$V = m\varphi_2 - L,$$

ossia da:

$$V = [m + 2 - 2\sqrt{m+1}]\varphi_2 \qquad \ldots\ldots(9).$$

Colla eliminazione di $k$ le formole (4) diventano:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= m\varphi_2 \\ E &= E_1 - m[\sqrt{m+1} - 1]\varphi_2; \\ E^* &= E_2^* - \sqrt{m+1}[\sqrt{m+1} - 1]\varphi_2 \\ F = E_1 - m\sqrt{m+1}\varphi_2; \quad F^* &= E_2^* + [\sqrt{m+1} - 1]\varphi_2 \\ \Delta &= [\sqrt{m+1} - 1]\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Qualunque sia il valore (positivo) di $m$, i punti cardinali di un obbiettivo composto nel modo innanzi detto, si succedono sempre nell'ordine

$$F,\ E,\ E^*,\ F^*$$

e sono tutti fuori il sistema delle due lenti, i primi tre dalla parte della lente convergente, l'ultimo dalla parte della lente divergente.

## II.

Le equazioni che debbono essere soddisfatte per la determinazione di un obbiettivo di cannocchiale ridotto sono adunque le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{m}{\sqrt{m+1}}\,\varphi_2 \\ \varphi &= m\,\varphi_2 \\ \Delta &= [\sqrt{m+1}-1]\,\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(11),$$

e siccome le quantità da determinarsi sono le cinque seguenti:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ m,\ \varphi,\ \Delta,$$

si vede che il problema è possibile in infiniti modi.

Ecco alcuni casi notevoli:

1° Si voglia p. e. che la lunghezza del cannocchiale sia *la metà* di quella che avrebbe un obbiettivo semplice;

In questo caso dovrà essere $\Delta = \frac{\varphi}{4}$,

ovvero

$$[\sqrt{m+1}-1] = \frac{m}{4},$$

donde

$$m = 8$$

e quindi

$$\frac{m}{\sqrt{m+1}} = 2.6666\ldots$$

Le equazioni (11) diventano:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{8\,\varphi_2}{3} \\ \varphi &= 8\,\varphi_2 \\ \Delta &= 2\,\varphi_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(12).$$

Data una qualunque delle quantità

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi,\ \Delta$$

il problema sarà sempre determinato.

Così, ponendo $\varphi_2 = -0^{\mathrm{m}},\ 10$ si avrà:

$$\varphi_1 = 0^{\mathrm{m}},\ 2667$$

$$\Delta = 0^{\mathrm{m}},\ 20$$

$$\varphi = 0^{\mathrm{m}},\ 80$$

$$L = 0^{\mathrm{m}},\ 40\,.$$

Lo specchio seguente, calcolato colle formole (12), mostra ad evidenza l'utilità di questa nuova specie di cannocchiali e nello stesso tempo dà gli elementi per costruirne l'obbiettivo. Volendo obbiettivi le cui distanze focali non fossero comprese in esso, basterà sempre una semplice interpolazione per ottenerli.

| $\varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi$ | $\Delta$ | $V=L$ |
|---|---|---|---|---|
| m | m | m | m | m |
| 0. 010 | 0. 027 | 0. 080 | 0. 020 | 0. 040 |
| 0. 020 | 0. 053 | 0. 160 | 0. 040 | 0. 080 |
| 0. 030 | 0. 080 | 0. 240 | 0. 060 | 0. 120 |
| 0. 040 | 0. 107 | 0. 320 | 0. 080 | 0. 160 |
| 0. 050 | 0. 233 | 0. 400 | 0. 100 | 0. 200 |
| 0. 075 | 0. 200 | 0. 600 | 0. 150 | 0. 300 |
| 0. 100 | 0. 267 | 0. 800 | 0. 200 | 0. 400 |
| 0. 125 | 0. 333 | 1. 000 | 0. 250 | 0. 500 |
| 0. 150 | 0. 400 | 1. 200 | 0. 300 | 0. 600 |
| 0. 175 | 0. 467 | 1. 400 | 0. 350 | 0. 700 |
| 0. 200 | 0. 533 | 1. 600 | 0. 400 | 0. 800 |
| 0. 250 | 0. 666 | 2. 000 | 0. 500 | 1. 000 |
| 0. 300 | 0. 800 | 2. 400 | 0. 600 | 1. 200 |
| 0. 350 | 0. 933 | 2. 800 | 0. 700 | 1. 400 |
| 0. 400 | 1. 067 | 3. 200 | 0. 800 | 1. 600 |
| 0. 450 | 1. 200 | 3. 600 | 0. 900 | 1. 800 |
| 0. 500 | 1. 333 | 4. 000 | 1. 000 | 2. 000 |

2° Si voglia la lunghezza del cannocchiale eguale ai *due terzi* di quella che avrebbe con obbiettivo semplice; dovrà essere

$$\Delta = \frac{m\,\varphi_2}{3},$$

e quindi
$$\sqrt{m+1}-1=\frac{m}{3},$$

donde
$$m=3\,.$$

Le equazioni (11) diventano:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{3}{2}\varphi_2\\ \varphi &= 3\,\varphi_2\\ \Delta &= \varphi_2\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(13),$$

e quindi, data una qualunque delle quantità $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\Delta$, $\varphi$, il problema sarà perfettamente determinato.

Lo specchio seguente calcolato colle equazioni (13), mostra tutti gli elementi relativi ad un cannocchiale corrispondente ad $m = 3$.

| $\varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi$ | $\Delta = V$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|
| m | m | m | m | m |
| 0. 05 | 0. 075 | 0. 15 | 0. 05 | 0. 10 |
| 0. 10 | 0. 150 | 0. 30 | 0. 10 | 0. 20 |
| 0. 15 | 0. 225 | 0. 45 | 0. 15 | 0. 30 |
| 0. 20 | 0. 300 | 0. 60 | 0. 20 | 0. 40 |
| 0. 25 | 0. 375 | 0. 75 | 0. 25 | 0. 50 |
| 0. 30 | 0. 450 | 0. 90 | 0. 30 | 0. 60 |
| 0. 35 | 0. 525 | 1. 05 | 0. 35 | 0. 70 |
| 0. 40 | 0. 600 | 1. 20 | 0. 40 | 0. 80 |
| 0. 45 | 0. 675 | 1. 35 | 0. 45 | 0. 90 |
| 0. 50 | 0. 750 | 1. 50 | 0. 50 | 1. 00 |
| 0. 55 | 0. 825 | 1. 65 | 0. 55 | 1. 10 |
| 0. 60 | 0. 900 | 1. 80 | 0. 60 | 1. 20 |
| 0. 65 | 0. 975 | 1. 95 | 0. 65 | 1. 30 |
| 0. 70 | 1. 050 | 2. 10 | 0. 70 | 1. 40 |

Potrebbe sembrare a primo aspetto essere preferibile dare ad $m$ quei valori che rendono cortissimo il cannocchiale. L'accorciamento, come si vede, si ottiene per mezzo di una lente divergente la quale potrebbe chiamarsi *lente di allontanamento*. A grandi valori di $m$ corrispondono piccoli valori di $\varphi_2$; le lenti troppo divergenti farebbero perdere molto in chiarezza. In pratica quindi conviene contentarsi di quei valori di $m$ che ad una piccola diminuzione nella chiarezza accoppiano una conveniente diminuzione nella lunghezza (*).

Il caso che può presentarsi sovente è quando, date le distanze focali $\varphi_1$ e $\varphi_2$ delle due lenti (la prima convergente, l'altra divergente), si voglia costruire un obbiettivo per cannocchiale ridotto.

La prima delle (11) dà

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{m}{\sqrt{m+1}}$$

(*) La *lente di allontanamento* è chiamata dal Professore G. Ferraris *lente d'ingrandimento*.

e quindi $m$ sarà dato dalla equazione di secondo grado:

$$m^2 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} m - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} = 0 \qquad \ldots\ldots(14).$$

La radice positiva della precedente equazione sarà il chiesto valore di $m$, cioè:

$$m = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_1 \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2^2}}{2\varphi_2^2} \qquad \ldots\ldots(15).$$

Conosciuto $m$, le equazioni (11) determinano $\varphi$ e $\Delta$.

Esempio:

Sia $\qquad \varphi_1 = 0^m,160, \quad -\varphi_2 = -0,054.$

Si avrà

$$m = \frac{(0,16)^2 + 0,16\sqrt{(0,16)^2 + 4(0,054)^2}}{2(0,054)^2}$$

ovvero

$$m = 9.\ 69$$

e quindi

$$\varphi = 0^m.\ 523$$

$$\Delta = 0.\ 123$$

$$V = 0.\ 27\ .$$

Questo cannocchiale è stato costruito effettivamente e coll'oculare che dà un ingrandimento eguale a 13 non lascia nulla a desiderare.

## III.

Supponiamo $\varphi_1 = \varphi_2$ (in valore assoluto).

Il problema è determinato; il valore di $m$ sarà dato dalla equazione

$$\frac{m}{\sqrt{m+1}} = 1\ ,$$

e quindi esso sarà eguale alla radice positiva della equazione di 2° grado:

$$m^2 - m - 1 = 0$$

donde

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \qquad \ldots\ldots(16),$$

ovvero

$$m = 1.6180$$

$$\sqrt{m+1} - 1 = 0.6180\,.$$

Le equazioni (11) diventano in questo caso

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \varphi &= 1.6180\,\varphi_2 \\ \Delta &= 0.6180\,\varphi_2 \\ V &= 0.3820\,\varphi_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(17).$$

Si vede da queste che il vantaggio nella lunghezza non è grande, tuttavia non è da rigettarsi, specialmente se si osserva che si guadagna in chiarezza.

Eccone alcuni esempi:

1° Con due lenti (una convergente, l'altra divergente) la cui distanza focale è di 34 centimetri, si fa un cannocchiale il cui obbiettivo ha la distanza focale $\varphi = 55$ centimetri e la cui lunghezza è di 42 centimetri. Si guadagnano quindi soltanto 13 centimetri.

2° Un cannocchiale il cui obbiettivo abbia la distanza focale di 34 centimetri sarà formato con due lenti ognuna delle quali abbia la distanza focale di centimetri 21. La lunghezza sarà di centimetri 26 e quindi si guadagneranno 8 centimetri.

Queste misure corrispondono presso a poco alla maggior parte dei cannocchiali di cui sono muniti gli strumenti geodetici e topografici. Potendoli diminuire di 13 centimetri o anche di 8 si potrà ottenere l'altro vantaggio che è quello degli strumenti a cannocchiale concentrico.

Lo specchio annesso, calcolato colle formole (17), mostra gli elementi relativi al caso di $\varphi_1 = \varphi_2$, ossia di $m = 1.618$.

| $\varphi_1 = \varphi_2$ | $\varphi$ | $\Delta$ | $L$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|
| m | m | m | m | m |
| 0.10 | 0.1618 | 0.0618 | 0.1236 | 0.038 |
| 0.15 | 0.2428 | 0.0927 | 0.1854 | 0.057 |
| 0.20 | 0.3237 | 0.1236 | 0.2472 | 0.076 |
| 0.25 | 0.4046 | 0.1545 | 0.3090 | 0.096 |
| 0.30 | 0.4855 | 0.1854 | 0.3708 | 0.115 |
| 0.35 | 0.5665 | 0.2163 | 0.4326 | 0.134 |
| 0.40 | 0.6474 | 0.2472 | 0.4944 | 0.153 |
| 0.45 | 0.7283 | 0.2781 | 0.5562 | 0.172 |
| 0.50 | 0.8092 | 0.3090 | 0.6180 | 0.191 |
| 0.55 | 0.8902 | 0.3399 | 0.6798 | 0.210 |
| 0.60 | 0.9711 | 0.3708 | 0.7416 | 0.229 |
| 0.65 | 1.0523 | 0.4017 | 0.8034 | 0.249 |
| 0.70 | 1.1329 | 0.4326 | 0.8652 | 0.268 |
| 0.75 | 1.2139 | 0.4635 | 0.9270 | 0.287 |
| 0.80 | 1.2948 | 0.4944 | 0.9888 | 0.306 |
| 0.85 | 1.3757 | 0.5253 | 1.0506 | 0.325 |
| 0.90 | 1.4567 | 0.5562 | 1.1124 | 0.344 |
| 0.95 | 1.5376 | 0.5871 | 1.1742 | 0.363 |
| 1.00 | 1.6180 | 0.6180 | 1.2360 | 0.382 |

Il caso di $\varphi_1 < \varphi_2$ (in valore assoluto) dà anche vantaggi minori che il precedente, poichè in questo caso sarà sempre

$$m < 1.618.$$

Nella costruzione di un obbiettivo per cannocchiale ridotto si prenderà per lente convergente una lente acromatica. Queste lenti, come è noto, sono formate di due, una divergente l'altra convergente, e la distanza focale della lente divergente è maggiore della distanza focale della lente convergente. I punti principali di una lente acromatica così formata sono per lo più fuori la lente; quindi il vantaggio è anche maggiore, poichè il tubo che contiene le due lenti che formano l'obbiettivo del cannocchiale ridotto sarà anche minore del calcolato.

Il calcolo esatto richiede la conoscenza dei raggi di curvatura delle facce delle due lenti di flint e di crown, nonchè gl'indici di rifrazione di quelle sostanze.

La fig. 1ª, qui annessa, rappresenta un obbiettivo composto per cannocchiali ridotti. La lente $M$ è la lente convergente i cui punti cardinali sono $F_1$, $E_1$, $E_1^*$, $F_1^*$; la lente $N$ è divergente ed i suoi punti cardinali sono $F_2^*$, $E_2$, $E_2^*$, $F_2$.

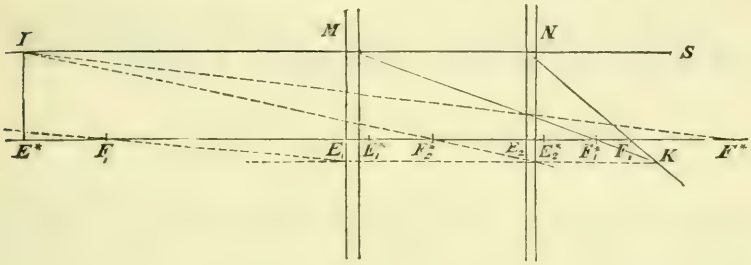



fig. 1ª.

Nella figura è indicata la costruzione che serve alla ricerca dei punti cardinali del sistema composto. Come vedesi il secondo punto principale $E^*$ del sistema composto si è allontanato dalla lente $M$, e quindi mentre la distanza focale obbiettiva è $E^* F^*$, il cannocchiale è lungo soltanto quanto il segmento $E_1 F^*$. Il primo punto principale ed il primo fuoco del sistema composto non sono segnati sulla figura, perchè essi sono troppo lontani dalla lente $M$.

Siccome alla semplice lente $N$ potrebbe sostituirsi un altro sistema divergente, sarà bene passare in rassegna i diversi sistemi divergenti che si possono fare con due lenti.

## V.

Le formole (1), quando le due lenti sono amendue divergenti, diventano:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\varphi = -\dfrac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta}} \\ E = E_1 + \varphi_1 \dfrac{\Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta}, & E^* = E_2^* - \varphi_2 \dfrac{\Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta} \\ F = E_1 + \varphi_1 \dfrac{\Delta + \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta}, & F^* = E_2^* - \varphi_2 \dfrac{\Delta + \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta} \end{array}\right\} (19),$$

la prima delle quali fa vedere che: *un sistema composto di due lenti divergenti è sempre divergente.*

Dividendo numeratore e denominatore della frazione che rappresenta $\varphi$ una volta per $\varphi_1$, un'altra per $\varphi_2$, si vede subito che la distanza focale del sistema è sempre (in valore assoluto) minore di ciascuna delle distanze focali delle lenti componenti. Sicchè un sistema così formato serve ad aumentare la divergenza adoperando lenti poco divergenti.

I punti principali del sistema sono sempre compresi nel segmento $E_1 E_2^*$ e si succedono nell'ordine $E$, $E^*$ poichè si ha:

$$E^* - E = d_1 + d_2 + \frac{\Delta^2}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta},$$

e questa differenza è sempre una quantità positiva se $d_1$ e $d_2$ che rappresentano rispettivamente $E_1^* - E_1$; $E_2^* - E_2$, sono anch'esse positive; ciò che succede sempre che non si adoperano menischi divergenti.

Si ha pure:

$$F^* - F = d_1 + d_2 + \frac{\Delta^2 - 2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta};$$

quindi i fuochi si succederanno nell'ordine $F$, $F^*$ oppure nell'ordine $F^*$, $F$ secondo che la differenza precedente sarà positiva o negativa. Se le due lenti si possono considerare come *infinitamente sottili* sarà $d_1 = d_2 = 0$; in questo caso i fuochi si succederanno nell'ordine $F$, $F^*$, ovvero nell'ordine $F^*$, $F$ secondo che si avrà

$$\Delta^2 \gtrless 2\varphi_1\varphi_2 .$$

Adunque i punti cardinali del sistema composto nel caso di $d_1 = d_2 = 0$ si succederanno nell'ordine

$$E,\ F,\ F^*,\ E^*$$

se si ha

$$\Delta^2 > 2\varphi_1\varphi_2$$

e nell'ordine

$$F^*,\ E,\ E^*,\ F$$

quando è

$$\Delta^2 < 2\varphi_1\varphi_2 .$$

Delle due distanze focali $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sia (in valore assoluto)

$$\varphi_1 > \varphi_2$$

e poniamo

$$\varphi_1 = k\,\varphi_2 \qquad \ldots\ldots(20),$$

si avrà allora:

$$\varphi = -\frac{k\,\varphi_2^{\,2}}{\Delta + (k+1)\,\varphi_2}$$

$$E = E_1 + \frac{k\,\Delta\,\varphi_2}{\Delta + (k+1)\,\varphi_2}, \qquad E^* = E_2^* - \frac{\Delta\,\varphi_2}{\Delta + (k+1)\,\varphi_2}$$

$$F = E_1 + \frac{k\,\varphi_2(\Delta + \varphi_2)}{\Delta + (k+1)\,\varphi_2}, \qquad F^* = E_2^* - \frac{\varphi_2(\Delta + k\,\varphi_2)}{\Delta + (k+1)\,\varphi_2};$$

e se si determina $\Delta$ mediante la equazione

$$\frac{k\,\varphi_2^{\,2}}{\Delta + (k+1)\,\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{m},$$

dove $\qquad m > 1$;

si avrà

$$\Delta = [m\,k - (k+1)\,\varphi_2 \qquad \ldots\ldots(21),$$

e quindi:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = -\dfrac{\varphi_2}{m} & \\ E = E_1 + \dfrac{\Delta}{m}, & E^* = E_2^* - \dfrac{\Delta}{m\,k} \\ F = E_1 + \dfrac{\Delta + \varphi_2}{m}, & F^* = E_2^* - \dfrac{\Delta + k\,\varphi_2}{m\,k} \end{array}\right\} (22).$$

Un sistema divergente della forma ora descritta può sostituire la semplice lente divergente in un obbiettivo di cannocchiale ridotto. In pratica bisognerà scegliere quelli, per cui si ha:

$$\Delta^2 < 2\,\varphi_1\,\varphi_2,$$

ovvero

$$\Delta < \sqrt{2\,k}\,.\,\varphi_2 \qquad \ldots\ldots(23),$$

giacchè sono più corti ed i punti cardinali si succedono, come in una semplice lente divergente.

Così, p. e., con due lenti divergenti, le cui distanze focali sieno $\varphi_1 = -0^m, 08$ e $\varphi_2 = -0^m, 04$ poste alla distanza di $0^m, 02$ si formerà un sistema divergente la cui distanza focale è $\varphi = -0^m, 02286$.

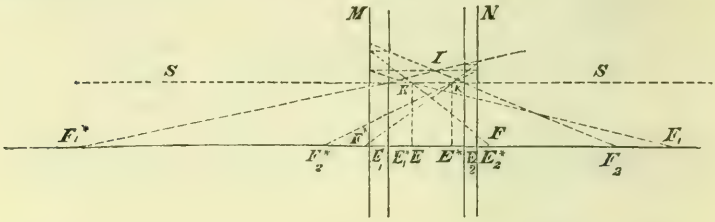



fig. 2.ª

La figura annessa mostra un sistema divergente composto di due lenti divergenti. In essa si vede la costruzione geometrica (*) che serve alla ricerca dei punti cardinali di un sistema composto quando sono dati i punti cardinali dei due sistemi componenti.

## VI.

Un sistema *divergente* si può anche ottenere con due lenti *convergenti*. Le formole (1) possono essere scritte così:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = -\dfrac{\varphi_1 \varphi_2}{\Delta - (\varphi_1 + \varphi_2)} \\ E = E_1 - \dfrac{\varphi_1 \Delta}{\Delta - (\varphi_1 + \varphi_2)} \; ; \quad E^* = E_2^* + \dfrac{\varphi_2 \Delta}{\Delta - (\varphi_1 + \varphi_2)} \\ F = E_1 - \dfrac{\varphi_1 (\Delta - \varphi_2)}{\Delta - (\varphi_1 + \varphi_2)} \; ; \quad F^* = E_2^* + \dfrac{\varphi_2 (\Delta - \varphi_1}{\Delta - (\varphi_1 + \varphi_2)} \end{array}\right\} (24).$$

La prima di queste formole mostra che il sistema sarà divergente, sempre che sarà soddisfatta la condizione

$$\Delta > \varphi_1 + \varphi_2 \qquad \ldots\ldots (25),$$

(*) Vedi G. Ferraris. — *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici.*

e le altre fanno vedere che i punti cardinali si succedono nell'ordine

$$E,\ F;\ F^*,\ E^*$$

e sono tutti fuori il sistema delle due lenti, i primi due nella parte anteriore, gli altri due nella parte posteriore.

Sia $\varphi_1 = k\varphi_2$ e determiniamo $\Delta$ in modo che si abbia in valore assoluto

$$\varphi = m\varphi_2$$

si otterrà:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \left(k+1+\frac{k}{m}\right)\varphi_2 \\ \varphi &= -m\varphi_2 \\ E &= E_1 - [k+m(k+1)]\varphi_2; \\ E^* &= E_2^* + \frac{1}{k}[k+m(k+1)]\varphi_2 \\ F &= E_1 - k(m+1)\varphi_2; \qquad F^* = E_2^* + \frac{m+k}{k}\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad (26).$$

$$\varphi_1 = k\varphi_2 .$$

Poniamo, come è d'uso, $d = E^* - E$; $d_1 = E_1^* - E_1$; $d_2 = E_2^* - E_2$; si avrà:

$$d = d_1 + d_2 + \left[\frac{k}{m} + \frac{m}{k} + mk + 2(m+k+1)\right]\varphi_2 \qquad (27).$$

La indeterminata $k$ può essere determinata in modo che $d$ sia *minimo*, allora dovrà essere:

$$\frac{dd}{dk} = 0 ,$$

ovvero:

$$\frac{1}{m} - \frac{m}{k^2} + m + 2 = 0 ,$$

donde si deduce:

$$k = \frac{m}{m+1} \qquad \ldots\ldots(28),$$

le (26) diventano allora:

$$\left.\begin{array}{ll} & \Delta = 2\varphi_2 \\ E = E_1 - 2m\varphi_2; & E^* = E_2^* + 2(m+1)\varphi_2 \\ F = E_1 - m\varphi_2; & F^* = E_2^* + (m+2)\varphi_2 \\ \varphi = -m\varphi_2 & \varphi_1 = \dfrac{m}{m+1}\varphi_2 \end{array}\right\} \quad (29).$$

Le formole (29) sono convenienti alla costruzione di un oculare per cannocchiali terrestri, essendo il segmento che comprende i punti cardinali il più corto possibile. Gli oculari così fatti sono chiamati *oculari terrestri* perchè fanno vedere diritti gli oggetti. Essendo il fuoco anteriore fuori il sistema delle due lenti, questa specie di oculari agiscono come l'oculare di Ramsden, permettendo di collocare il *reticolo* fuori il sistema.

Lo specchio seguente calcolato col dare ad $m$ i valori 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, dà immediatamente i valori di $\varphi_1$, $\Delta$, $\varphi$ corrispondenti ad un dato valore di $\varphi_2$. Esso può essere utile per la costruzione di un oculare della forma ora considerata.

| | | $m=1$ | | $m=2$ | | $m=3$ | | $m=1/2$ | | $m=1/4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_2$ | $\Delta$ | $\varphi_1$ | $\varphi=-$ | $\varphi_1$ | $\varphi=-$ | $\varphi_1$ | $\varphi=-$ | $\varphi_1$ | $\varphi=-$ | $\varphi_1$ | $\varphi=-$ |
| 1 | 2 | 0. 5 | 1 | 0. 667 | 2 | 0. 75 | 3 | 0. 333 | 0. 50 | 0. 20 | 0. 25 |
| 2 | 4 | 1. 0 | 2 | 1. 333 | 4 | 1. 50 | 6 | 0. 667 | 1. 00 | 0. 40 | 0. 50 |
| 3 | 6 | 1. 5 | 3 | 2. 000 | 6 | 2. 25 | 9 | 1. 000 | 1. 50 | 0. 60 | 0. 75 |
| 4 | 8 | 2. 0 | 4 | 2. 667 | 8 | 3. 00 | 12 | 1. 333 | 2. 00 | 0. 80 | 1. 00 |
| 5 | 10 | 2. 5 | 5 | 3. 333 | 10 | 3. 75 | 15 | 1. 667 | 2. 50 | 1. 00 | 1. 25 |
| 6 | 12 | 3. 0 | 6 | 4. 000 | 12 | 4. 50 | 18 | 2. 000 | 3. 00 | 1. 20 | 1. 50 |
| 7 | 14 | 3. 5 | 7 | 4. 667 | 14 | 5. 25 | 21 | 2. 333 | 3. 50 | 1. 40 | 1. 75 |
| 8 | 16 | 4. 0 | 8 | 5. 333 | 16 | 6. 00 | 24 | 2. 667 | 4. 00 | 1. 60 | 2. 00 |

Volendo il secondo fuoco $F^*$ più vicino possibile alla seconda lente bisognerà rendere minima la distanza $\Delta + E_2^* F^*$ (supposto $d_2$ trascurabile).

Ora dalle (26), ponendo $\delta = \Delta + E_2^* F^*$, si ha:

$$\delta = \left[ \frac{k}{m} + k + \frac{m}{k} + 2 \right] \varphi_2 ,$$

e quindi l'equazione

$$\frac{d\delta}{dk} = \frac{1}{m} + 1 - \frac{m}{k_2} = 0$$

determina il valore di $k$ corrispondente al minimo richiesto.

Si ottiene:

$$k = \frac{m}{\sqrt{m+1}}$$

e quindi le (26) diventano in questo caso:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= [\sqrt{m+1} + 1]\, \varphi_2 \\
\varphi_1 &= \frac{m}{\sqrt{m+1}} \cdot \varphi_2 \\
E &= E_1 - m[\sqrt{m+1} + 1]\, \varphi_2 ; \\
E^* &= E_2^* + \varphi_2 [1 + \sqrt{m+1}] \sqrt{m+1} \\
F &= E_1 - m\sqrt{m+1}\, \varphi_2 ; \qquad F^* = E_2^* + (\sqrt{m+1})\, \varphi_2 \\
\varphi &= - m\, \varphi_2
\end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Dando ad $m$ il valore 1 si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= 2.4142\, \varphi_2 \\
\varphi_1 &= 0.7071\, \varphi_2 \\
E &= E_1 - 2.4142\, \varphi_2 \qquad E^* = E_2^* + 3.4142\, \varphi_2 \\
F &= E_1 - 1.4142\, \varphi_2 \qquad F^* = E_2^* + 2.4142\, \varphi_2 \\
\varphi &= - \varphi_2
\end{aligned}\right\} \quad (31).$$

Gli oculari terrestri costituiti colle formole (31) o, per maggiore generalità, colle formole (30) sono preferibili a quelli dati dalle formole (29) poichè l'anello oculare è più vicino all'ultima lente del cannocchiale.

La fig. 3ª mostra un sistema divergente composto di due lenti convergenti $M$ ed $N$, insieme alla costruzione dei punti cardinali del sistema composto.

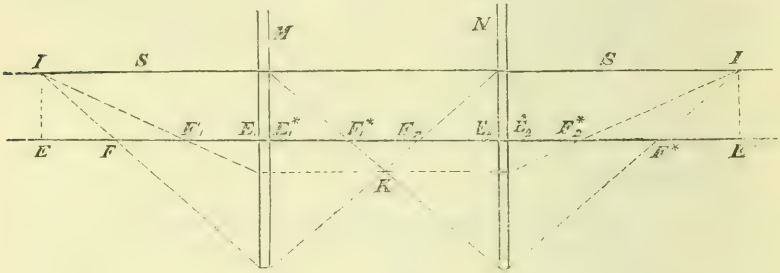



fig. 3.ª

## VII.

Le formole (1), quando la seconda lente è divergente, si possono scrivere come segue:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = -\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 - (\varphi_2 + \Delta)} \\ &E = E_1 + \frac{\varphi_1 \Delta}{\varphi_1 - (\varphi_2 + \Delta)}; \qquad E^* = E_2^* + \frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1 - (\varphi_2 + \Delta} \\ &F = E_1 + \varphi_1 \frac{\Delta + \varphi_2}{\varphi_1 - (\varphi_2 + \Delta}; \quad F^* = E_2^* - \varphi_2 \frac{\varphi_1 - \Delta}{\varphi_1 - (\varphi_2 + \Delta)} \end{aligned}\right\} (32).$$

Se la distanza focale $\varphi_1$ della prima lente è maggiore di $\varphi_2 + \Delta$ il sistema sarà divergente, e la distanza focale di esso (in valore assoluto) sarà *sempre maggiore della distanza focale della seconda lente.*

Si vede facilmente che i punti principali, specialmente quando le due lenti sono infinitamente sottili, si succedono nell'ordine $E^* E$ e che i punti cardinali i quali si succedono nell'ordine

$$F^*, E^*; E, F$$

sono tutti fuori il sistema ad eccezione del primo, cioè del secondo fuoco.

Essendo $\varphi_2$ (in valore assoluto) sempre minore di $\varphi_1$, poniamo

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{k}, \qquad \ldots (33),$$

e determiniamo $\Delta$ in modo che si abbia:

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 - (\varphi_2 + \Delta)} = \frac{\varphi_1}{m},$$

dove $k$ ed $m$ sono due indeterminate.

Si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \dfrac{\varphi_1}{k}\left[k - (m+1)\right] \\ \varphi_2 = \dfrac{\varphi_1}{k} \\ E = E_1 + \dfrac{k-(m+1)}{m}\varphi_1; \quad E^* = E_2^* + \dfrac{k-(m+1)}{mk}\varphi_1 \\ F = E_1 + \dfrac{k-m}{m}\varphi_1; \qquad F^* = E_2^* - \dfrac{m+1}{mk}\varphi_1 \\ \varphi = -\dfrac{\varphi_1}{m} \end{array}\right\} (34).$$

Le formole (34) mostrano chiaramente che dovrà essere sempre $k > m+1$.

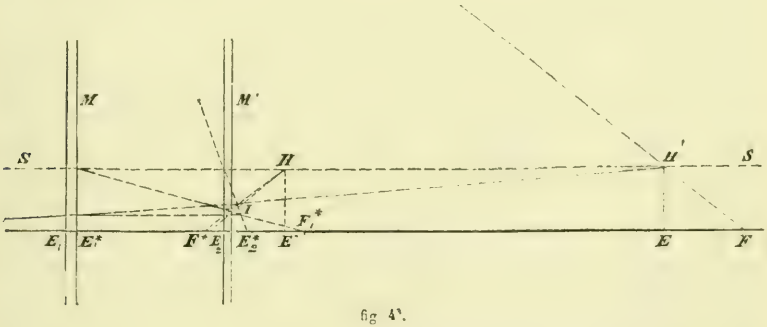



fig 4ª.

La figura qui annessa mostra chiaramente la costruzione dei punti cardinali del sistema composto delle due lenti $M$, $M'$, la

prima convergente, la seconda divergente. Dei quattro punti cardinali il secondo fuoco $F^*$ cade tra le due lenti, gli altri tre sono fuori il sistema delle due lenti dalla parte della lente divergente, ed il primo fuoco $F$ è il più lontano. Così sono situati i punti cardinali in un cannocchiale di Galilei.

Torino, Aprile 1884.

Lo stesso Socio Basso presenta e legge la seguente nota storica del signor Ingegnere Ottavio Zanotti-Bianco,

SOPRA

# UNA VECCHIA E POCO NOTA MISURA

DEL

## SEMIDIAMETRO TERRESTRE.

Giovan Francesco Maurolico nella sua opera intitolata: « *Cosmographia Francisci Maurolyci Messanensis siculi, in tres dialogos distincta, in quibus de forma situ numeroq. tam coelorum q. elementorum, aliisq. rebus ad astronomica rudimenta spectantibus satis disseritur*, pubblicata in Venezia l'anno 1543, al dialogo terzo, dopo un succoso esame storico critico dei metodi tenuti fino ai suoi giorni per misurare il raggio terrestre, ne propone uno scrivendo: « *Adjiciam tamen modum alium metiendi orbis ambitum, a nullo, quem ego sciam datum, ac mehercle, ingeniosissimum quem priusquā exponam, praefabor instrumenti ad comperam seu fastigiorū spatia mensurāda opportuni fabricam, paucis tamen expediam* ». Premessi quindi alcuni principii di geometria pratica basati sull'uso dell'accennato istrumento, che è il *quadrato geometrico*, passa a descrivere il modo da lui proposto per misurare la periferia del meridiano terrestre. Questo in sostanza consiste nel determinare l'altezza di un punto alquanto elevato sulla superficie del mare, dal quale si possa condurre una tangente alla superficie medesima, nel misurare (col mezzo che Maurolico indica col nome di ἐμβαδομετρία, *hoc est pavimenti mensurationem*, fondato sull'uso del quadrato geometrico) la lunghezza di questa tangente, e nel dedurne poi il valore del diametro terrestre col noto teorema, che la tangente è media proporzionale fra tutta la secante, che passa pel centro della Terra, e la sua

parte esterna. Questo metodo di Maurolico, con chiara ed esplicita mensione del suo inventore, fu riprodotto da Silvio Belli nel suo *Libro del misurar con la vista*, Venezia 1565, pagg. 104 e 106 e da Francesco Giuntini nella sua *Sphaera I, de Sacro Bosco emendata*, Lugduni MDLXXVII, 1578, pag. 124 (1). Il Libri a pag. 103 del volume 3° della sua *Histoire des Mathématiques* (2) dice, che Giovanni Picard rammentò il metodo di Maurolico quando si occupò della misura del meridiano. I più recenti storici dell'astronomia Wolf e Marie non hanno neppure un cenno di questo metodo del Maurolico. L'esimio Prof. P. Riccardi a pag. 91 della pregiata sua Memoria citata in nota scrive: « Per quanto mi è noto, questo metodo non è mai stato adoperato; e credo che, attesa la difficoltà di determinare la lunghezza e la direzione di quella tangente, non possa fornire risultati abbastanza esatti ».

Ora a pag. 1 della *Geodesy* dell'illustre geodeta inglese Generale Clarke, troviamo scritto: « Ammettendo che la Terra sia sferica, una sola osservazione di una più precisa natura presa sulla punta di uno scoglio darebbe un valore del raggio della sfera. L'osservazione richiesta è la profondità o l'angolo di depressione dell'orizzonte: questa combinata con una misura lineare, cioè, l'altezza dello scoglio, basterebbe ad una grossolana approssimazione. Questo è un esperimento che fu fatto sul monte Edgecumbe più di due secoli fa, e può darsi che sia stato tentato in altri luoghi ». Il Clarke riporta quindi un'applicazione di ciò alla cima del Ben Nevis, in cui si tien conto anche della rifrazione terrestre, ed ottiene per valore del raggio terrestre 6372887,$^{m}$ e soggiunge: « Ora ciò è veramente assai vicino al vero; ma, ove non si prenda la precauzione di fare le osservazioni ad un'ora conveniente del giorno, l'errore avrebbe potuto essere di parecchie migliaia di metri; infatti il metodo, quantunque serva ad arrivare alle dimensioni della Terra in numeri rotondi, è affatto inadequato a scopi scientifici. — Desideroso di

(1) Riccardi, *Cenni sulla storia della Geodesia in Italia*, parte 1ª, pag. 91 in nota, oppure pag. 519 del volume X, serie III delle *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna* dal quale è estratta questa memoria.

(2) Vedi Picard. *Mesure de la Terre*. Mémoires de l'Académie des Sciences. Vol. VII, parte 1, pag. 186. La data della pubblicazione è 1729. Il Libri non dà alcuna indicazione bibliografica circa il passo accennato.

conoscere da chi fosse stata fatta quella prima applicazione del metodo di Maurolico, mi diressi al Generale Clarke stesso, il quale, con squisitissima cortesia, pari al suo altissimo valore scientifico, e della quale, è mio grato dovere il rendergli pubbliche grazie, mi favorì al riguardo le informazioni che formano oggetto di questa nota. Questa determinazione è dovuta ad Edoardo Wright, la sua descrizione occupa le pagine 224-28 del libro intitolato

*Certains*
*Errors in*
*Navigation*
*Detected and Corrected*
*By Edw^d Wright*
*with*
*many additions that were*
*not in the former edi-*
*tion as appeareth*
*in the next*
*page*

*Printed by Felix Hingsto at London* 1610.

In esse Wright dopo aver accennato all'incertezza che regnava ai suoi giorni, fra i valori del raggio terrestre dati dagli antichi e dai moderni, passa a descrivere l'istrumento di cui si servì. Era questo in forma di un triangolo rettangolo, i cui cateti erano lunghi circa sei piedi inglesi ($1,^{m}80$) ed uno dei quali era diviso in un certo numero di parti eguali. Per ottenere l'altezza del monte egli misurò una linea di base e trovò per quella 375 piedi inglesi; la depressione dell'orizzonte del mare fu osservata di 22 minuti; ed ebbe con quei dati per il raggio terrestre « 18,312,621 foots » piedi inglesi. Prendendo per il piede il valore in metri dato dall'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pel corrente anno $0,^{m}3047$ si ha in metri, per il valore trovato da Wright $5581687^{m}$ (in numeri rotondi).

Wright non dà la data del giorno nel quale fece le osservazioni, ma il Generale Clarke osserva che questa seconda edizione del libro è del 1610, mentre la prima è del 1599 e che molte delle

altre osservazioni riferite in esse furono eseguite fra il 1594 e il 1597. Non è quindi improbabile che anche le riferite osservazioni per la determinazione del raggio terrestre siano state fatte in tal epoca; esse furono istituite sul monte Edgecumbe nel Cornewall in Inghilterra.

A proposito di Edoardo Wright, al quale spetta il merito di aver stabilito su basi esatte il metodo della proiezione di Mercator, giova avvertire l'errore in cui è incorso Mädler a pag. 520 del 2° volume della sua *Geschichte der Himmelskunde* ove fissa l'anno 1599, come quello di sua nascita, mentre invece Wright nacque nel 1560 a Gravestone nel Norfolkshire.

Il Socio Comm. Prof. Michele Lessona, incaricato dal Socio Cav. Prof. L. Bellardi assente, presenta e legge il seguente lavoro del signor Federico Sacco, Assistente al Museo di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Torino:

# L'ALTA VALLE PADANA

DURANTE

# L'EPOCA DELLE TERRAZZE

**in relazione**

COL CONTEMPORANEO SOLLEVAMENTO

DELLA CIRCOSTANTE CATENA ALPINO-APPENNINICA.

Mentre vennero molto accuratamente studiati e descritti i fenomeni riferentisi all'epoca diluvio-glaciale in Piemonte, si può dire che nessuno studio, un po' minuto, venne ancora fatto riguardo ai fenomeni che quivi ebbero luogo nella seguente ed importantissima epoca, vale a dire nell'epoca delle terrazze. Ciò dipende in parte forse dall'opinione dominante in alcuni geologi, che cioè in Piemonte manchino o siano poco importanti le terrazze; mentre al contrario vi esistono numerose vallate le quali presentano terrazzi così belli e numerosi, che poco o nulla hanno da invidiare alle famose valli terrazzate di altre regioni.

Nell'anno scorso percorrendo le valli della Stura di Cuneo, del Pesio, dell'Ellero e del Tanaro per studi geologici, io rimasi colpito dall'osservare certi altipiani isolati ben netti e definiti, certe terrazze lontanissime da ogni attuale corso d'acqua ed altri consimili fenomeni che non sapevo come spiegare. Volli naturalmente rendermi ragione di tutto ciò; quindi mi diedi a percorrere queste regioni in ogni senso, studiandone, oltre la geologia, la distribuzione dei ciottoli, la forma degli altipiani, l'altezza e direzione delle terrazze, ecc., finchè poco a poco riuscii a comprendere la serie delle mutazioni a cui andarono soggetti i corsi d'acqua di tutta l'alta valle Padana dalla fine dell'epoca diluvio-

glaciale sino al presente; e siccome alcune di queste mutazioni sono molto importanti ed istruttive, specialmente per essere in intimo rapporto con fenomeni endogeni, credo opportuno di render noto il risultato di questi miei studi.

Nello stretto senso idrografico la valle Padana attualmente si estenderebbe soltanto sino al torrente Grana, giacchè le correnti acquee che trovansi a S. E. di questo torrente non sboccano più direttamente nel Po, ma confluiscono nel Tanaro che si unisce al Po solo molto più tardi, a valle di Alessandria; l'orografia invece estende la valle Padana sino al piede delle Alpi marittime e degli Appennini, e tale concetto orografico è validamente confermato dallo studio geologico che ci indica come sino ad un'epoca abbastanza recente anche tutte le fiumane situate a S. E. del torrente Grana, unendosi al Tanaro, confluissero nel Po sulla pianura a Sud di Torino.

Premetterò necessariamente alcune brevi considerazioni sui diversi corsi d'acqua che percorrono la regione in discorso e che ebbero tanta importanza riguardo ai fenomeni che vogliamo esaminare, giacchè potremo così in seguito procedere più speditamente nel tessere la storia di queste fiumane durante l'epoca delle terrazze.

Percorrendo l'alveo attuale del fiume *Tanaro* troviamo una quantità grandissima di ciottoli, raramente oltrepassanti 10 centim. di diametro, costituiti di una specie di pasta color rossastro o violaceo od anche verdastro, nella quale spiccano belle macchie bianche o rosee o verdastre di forma per lo più rettangolare; già il Prof. B. Gastaldi li aveva osservati minutamente per le ragioni che esporrò fra poco; credo anzi opportuno di riferirne la sua stessa descrizione (1): « Tra le arenarie metamorfiche sovraccennate (del Mongioie, donde scendono Pesio, Ellero e Tanaro) ve ne sono di quelle, nelle quali il Felspato si sostituisce in parte al Quarzo e comincia a farsi vedere una sostanza verde forse cloritica, forse anche in molti casi felspatica. Questa arenaria felspatico-quarzosa assume sovente l'aspetto del Porfido. In questo caso scompare quasi affatto il Quarzo, e la struttura del Felspato che ha allora il sopravvento, da arenacea si fa compatta, omogenea, con tinte vive ora di rosso

(1) Gastaldi, *Sulla riescavazione dei bacini lacustri per opera degli antichi ghiacciai.* — *Soc. italiana di Scienze naturali*, vol. I, tomo I. Milano, 1865.

cupo, ora di violaceo, or anche di verdastro, ed in questa pasta spiccano moltissimi cristalli di Felspato bianco, roseo o rosso, che paiono appartenere al sesto sistema. È insomma un vero Porfido ». Rimontando la valle del Tanaro si incontra questa roccia porfirica, appartenente probabilmente all'epoca permiana, in molte località, come presso Ormea, il ponte di Nava, Viozene nella vallata del rio Borgo-Sozzo, ecc.; anzi per la sua bellezza è lavorata in alcuni luoghi. Ma l'importanza di questa roccia caratteristica è poi grandissima nello studio della distribuzione dei ciottoli sulla pianura, giacchè noi troviamo tali ciottoli porfirici qua e là sparsi, presso monte a 450 e più metri, come sotto il Frocco, ecc., ed a valle sulla porzione Est delle regioni Banale (400 m.), Piambosco (380 m.), (V. Tav.) e poi abbondantissimi sia presso monte su diversi altipiani residui, sia a valle sull'altipiano di Carrù, di Piozzo, di Lequio, di Cherasco, ecc., ma anche al di là della Stura tra Cervere e Bra, a Sommariva, Caramagna, Carmagnola, Moncalieri, ecc., dove però tali ciottoli porfirici sono già ridotti a dimensioni molto piccole. È specialmente in seguito all'essersi rinvenuti nel 1864 molti ciottoli porfirici presso Bra, facendosi delle trincee per la ferrovia Bra-Alba, che il Prof. Gastaldi giustamente suppose che il Tanaro prima di scavarsi l'attuale suo alveo scorresse per Bra, Carmagnola, ecc. Studi accurati, oltre che sulla distribuzione dei ciottoli, anche sulle terrazze, mi permettono di confermare con certezza la supposizione del Gastaldi ed anche di descrivere abbastanza minutamente il restringersi ed il variare dell'alveo del Tanaro dall'epoca glaciale in poi. A maggiormente provare l'antico passaggio del Tanaro per Bra, Caramagna, ecc., si potrebbero pure accennare, oltre a varie terrazze, il corso di certi canali, alcuni progetti fatti sul principio di questo secolo per portare le acque del Tanaro nel Po presso Torino con canali navigabili pel trasporto, progetti che non furono messi in atto a causa dell'ingente spesa e del rapido sviluppo delle strade ferrate, ecc., ma ciò ci porterebbe troppo in lungo, per cui dobbiamo passar oltre. Debbo però aggiungere che il Gastaldi nella sua sovraccennata Memoria, parlando dei ciottoli trovati sotto la città di Bra, volle concluderne che i ciottoli del *diluvium* si dovettero deporre con un certo ordine, secondo le fiumane che li trasportarono, e non già in un confuso rimescolamento in seno ad una massa d'acqua solcata da violenti correnti o persino rotta dalle onde, come volevano certi geologi

d'allora; ma quantunque io sia della stessa opinione riguardo alla conclusione, debbo avvertire che i ciottoli porfirici di Bra non possono per se stessi confermarla affatto, giacchè non appartengono ad antichi coni di deiezione, ma sono ciottoli dell'*alluvium* depostisi verso la metà dell'epoca delle terrazze, essendo già stati intaccati dalle potenti fiumane d'allora i depositi quaternari ed il Pliocene superiore, per cui i ciottoli in questione giacciono sulle argille azzurre che rappresentano il Pliocene inferiore.

L'*Ellero* presenta pure nel suo attuale alveo gli stessi ciottoli porfirici che abbiamo menzionati pel Tanaro; sono poi molto istruttive, riguardo al corso di questo torrente nell'epoca dei terrazzi, le belle terrazze che osservansi presso monte sulla sua sponda sinistra da Villanuova Mondovì verso il Nord.

Per il *Pesio* dobbiamo notare sempre gli stessi ciottoli porfirici caratteristici, ciottoli che troviamo poi anche sulla sua sponda sinistra, molto in alto, tra Carleveri, Magliano e Carrù; inoltre sono molto importanti le sue alte terrazze di destra presso monte e di sinistra più a valle.

Per il torrente *Iosina* (*Brobbio*) ed il torrente *Colla* non abbiamo ora a menzionare altro che la terrazza di destra tra Beinette e Santa Maria Rocca, mancando già i ciottoli porfirici, mentre abbondano specialmente le Quarziti.

Quanto al torrente *Gesso* troviamo pure che mancano i ciottoli porfirici, mentre sono specialmente abbondanti i ciottoli costituiti di una Quarzite micacea biancastra che si decompone facilmente. Ma ciò che è di grande importanza riguardo all'antico corso del Gesso si è che, mentre ora questo torrente si getta nella Stura sotto Cuneo, io credo poter asserire che, sino alla metà dell'epoca delle terrazze, esso, uscendo dalla valle montana, proseguiva direttamente verso l'E. N. E., scavandosi così il profondo alveo esistente tra le regioni Banale e Piambosco, per gettarsi nel Tanaro là dove oggi si trova la città di Bene-Vagienna. A tutta prima tale opinione può parere abbastanza azzardata, per cui accennerò ora brevemente alle principali considerazioni che mi indussero ad adottarla. 1°) Dobbiamo anzitutto osservare che l'alveo accennato (V. Tav.) ha un'ampiezza ed una profondità tale che non potè essere certamente scavato da un corso d'acqua di poca importanza; orbene nelle vicinanze non esistono altre grandi correnti acquee che il Gesso od il Pesio; ma lo studio della distribuzione

dei ciottoli mi dimostrò non trattarsi del Pesio, giacchè i ciottoli porfirici, che esistono abbondantissimi a Sud dell'altipiano Banale, mancano invece tra le regioni Banale e Piambosco sino a Bene-Vagienna. 2°) Inoltre se il Gesso, durante la prima metà dell'epoca delle terrazze, fosse già stato confluente della Stura, questa, per ciò che si può dedurre dagli antichi alvei dei vicini corsi d'acqua, avrebbe dovuto scavarsi tra la regione Piambosco e la regione Famolasco un alveo molto più ampio di ciò che non abbia fatto. 3°) Varie considerazioni ci portano a credere che sul principio dell'epoca delle terrazze tutte le fiumane di questa regione, dal Po al Pesio, avessero un percorso molto più a S. S. E. che ora non sia. 4°) L'apice S. O. dell'altipiano Banale si prolunga notevolmente più ad Ovest che non quello dell'altipiano Piambosco, ciò che in parte trova la sua causa nel fatto che il primo venendo abbandonato dalle acque del Pesio da una parte e del Gesso dall'altra, potè conservarsi assai più integralmente del secondo, il quale fu eroso più potentemente dalle acque Gesso-Stura che già allora tendevano ad avvicinarsi. 5°) Possiamo anche notare che la valle montana del Gesso al suo sbocco nella pianura Padana ha precisamente una direzione tale che le acque che ne escono pare dovrebbero appunto dirigersi verso E. N. E., cioè verso Bene-Vagienna. 6°) È un fatto notissimo che l'alveo del torrente Gesso è molto spesso completamente asciutto (una delle cause principali per cui sulle rive del Gesso sono molte più rare le febbri malariche che non sulle rive della Stura), il che credo debba attribuirsi in gran parte all'infiltrazione dell'acqua attraverso il terreno diluviale nella direzione antica, cioè verso E. N. E.; tanto è vero ciò che numerosissimi si annoverano i fontanili ed i siti paludosi tra la destra del torrente Gesso e l'aprirsi dell'alveo tra Trinità e Carleveri. 7°) Nella questione in discorso ha pure una certa importanza l'osservazione dell'origine e direzione dei canali e dei torrentelli che ora scorrono nel grande alveo di Bene; orbene noi vediamo che il canale di Bene e di Cherasco partono dalla destra del torrente Gesso alla sua confluenza colla Stura; i canali S. Dalmazzo, del Bosco, del Boschetto, la bealera Ceresana, e lo stesso torrente Moldalavia che è incassato nell'alveo in discorso, hanno la loro origine da numerose sorgenti che trovansi a qualche chilometro dalla destra sponda del torrente Gesso, e specialmente nella regione Prato Folchetto; diversi canali che escono dalla

valle del Gesso, come pure il cosidetto Naviglio che scende dalla montagna tra il torrente Gesso ed il torrente Colla, si dirigono anche verso E. N. E., imboccando poi più o meno direttamente l'alveo esistente tra le regioni Banale e Piambosco; lo stesso dicasi di altri canali minori. 8°) Ma ciò che credo sia di grandissima importanza a questo proposito, si è il fatto che, mentre il cono di deiezione delle correnti fluviali ha generalmente la sua massima inclinazione nella direzione in cui ora scorre il fiume che lo ha originato, per il Gesso si verifica invece che il suo cono di deiezione, partendo dallo spigolo superiore della sponda destra, ha la sua massima inclinazione verso E. o E. N. E., cioè verso Bene-Vagienna, il che dipende in gran parte dalla vicinanza del potente cono di deiezione della Stura e ci indica chiaramente l'antica direzione del Gesso durante l'epoca diluvio-glaciale; da questo fatto derivano le numerose sorgenti già accennate, la direzione dei canali ecc., non che probabilmente anche in parte la formazione delle sorgenti e lago di Beinette, a causa dell'incontro del cono di deiezione del Gesso con quello del Pesio. Sono queste le considerazioni principali che mi hanno indotto ad abbracciare l'opinione dianzi enunciata, e credo sieno sufficienti a sostenerla.

Per la *Stura* di Cuneo abbiamo poco a dire; i suoi ciottoli sono per lo più costituiti di una Quarzite più o meno micacea ed abbastanza facilmente decomponibile, roccia che in posto trovasi specialmente sviluppata nel vallone dell'Arma sino al confine francese; sono rarissimi i ciottoli porfirici, giacchè tale roccia, appartenente probabilmente all'epoca permiana secondo gli studi del Dott. Piolti (1), venne dal Dott. Portis trovata in posto solo nel vallone Roburent (2). Ci spiegheremo fra poco come si formarono le due grandi terrazze Piambosco e Famolasco che da Trinità e Fossano dirigonsi verso il N. E. lateralmente all'attuale corso della Stura su cui sollevansi di oltre 100 metri. Come prova di ciò che diremo sull'antico corso della Stura, possiamo ad esempio menzionare il canale di Bra che escendo dalla sponda sinistra della Stura di fronte a Castelletto, dopo diversi rigiri

---

(1) G. Piolti, *Il porfido del vallone di Roburent.* — Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XIX, 1884.

(2) A. Portis, *Sui terreni stratificati di Argentera.* — Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, Tomo XXXIV, 1881.

passa per Bra e quindi gettasi nel torrente Melletta che sbocca nel Po a monte di Carignano.

Quanto al torrente *Grana*, che dopo Centallo prende il nome di *Mellea*, per il suo mescolarsi con acque provenienti dalla regione Sagnassi sulla sponda sinistra, esso ha una notevole importanza per lo studio che ora facciamo, giacchè gli si deve la formazione della terrazza Ovest dell'altipiano Famolasco, il che viene comprovato sia dall'essersi trovati dall'Avv. C. Calandra ciottoli del torrente Grana nelle vicinanze di Marene, sia dal fatto che anche i vicini corsi d'acqua trovavansi, sul principio dell'epoca delle terrazze, molto più a Sud che non presentemente, sia dall'osservare che nei giorni di piena le acque di Grana tendono a portarsi verso Est, cioè verso Stura, per cui si dovettero costrurre potenti dighe ad impedire questo fatto; quindi si potrebbe abbastanza facilmente far deviare le acque di Grana, Maira e forse anche Varaita nell'alveo della Stura. Inoltre ci conferma nell'opinione già enunciata l'osservazione dei canali che escono dal torrente Grana; giacchè vediamo le bealere Tavolera e Mellea, che escono dal torrente Mellea circa 2 km. e ½ a valle di Centallo, dirigersi verso N. E., finchè si uniscono alla bealera di Bra poco a monte di Fossano; il canale Giovo che ha le sue origini da diversi fontanili in territorio di Genola, poco lungi dal torrente Mellea, viene poi quasi a costeggiare l'altipiano Famolasco sin oltre il Motturone; altri canali come la bealera del Marchese, il canale del Molino, ecc., escendo dal torrente Mellea a valle di Savigliano si dirigono verso l'E. N. E., cioè verso Sommariva Bosco, riunendosi poi, poco lungi dalla terrazza Sanfrè-Sommariva ecc., coi torrenti che scendono dalla collina Braidese.

I ciottoli della *Maira* o *Macra* non sono molto caratteristici; constano in gran parte di Quarzo e di Gneiss con lamelle di Mica nera, roccia che in posto trovasi specialmente allo sbocco della valle montana; possiamo menzionare anche in questo caso varii canali, come il canale Brunetta, il canale del Molino del Principe, il canale di Streppe, ecc., i quali uscendo dalla destra della Maira si dirigono verso N. E. sino a congiungersi coi torrenti che discendono dalle colline Braidesi.

Per il torrente *Varaita* sono abbastanza caratteristici certi ciottoli serpentinosi molto resistenti e di color nerastro; a nostro riguardo è importantissimo il fatto che in un rivo a S. O. di Caramagna si rinvengono comunemente questi ciottoli neri, che

vengono quivi usati per disegni ed ornamentazione nelle selciature; a confermarci nell'opinione dell'antico passaggio della Varaita per Caramagna, ciò che sarebbe già provato dal fatto enunciato, possiamo pure osservare come diversi canali e bealere uscendo dalla destra di questo torrente, dirigonsi verso E. N. E.

Riguardo al *Po* si può supporre naturalmente che il suo corso abbia subìto mutamenti analoghi a quelli dei corsi d'acqua che gli stanno a destra. Per le ultime quattro correnti acquee menzionate si può eziandio notare come: le numerose infiltrazioni a cui esse vanno soggette, per cui spesso il loro alveo resta perfettamente all'asciutto per certi tratti poco lungi da monte; i non rari trabocchi di queste correnti verso E., durante le piene, nonchè le numerose paludi, per esempio di Priglia, Sagnassi, Sanfrè, ecc. (in gran parte però già asciugate per opera specialmente dei monaci di Staffarda sul principio del secolo scorso), ci indicano essere avvenuti mutamenti notevoli nel corso dei fiumi dell'alta valle Padana.

Debbo ora accennare a certi caratteristici agglomerati di color nero e di aspetto scoriaceo che servono molto bene per riferire ad uno stesso unico altipiano preesistente i diversi altipiani isolati che riscontransi ora nell'alta valle Padana. Già da qualche tempo avevo notato nella parte superiore degli altipiani Famolasco e Piambosco, sotto uno strato più o meno potente di argilla giallorossiccia, certi pseudociottoli bruni di dimensioni svariatissime, del diametro talora di oltre 80 centim., composti di una specie di pasta nera talora un po' iridescente, costituita per oltre $^{30}/_{100}$ di ossido di Manganese, a struttura pseudosferolitica per modo da lasciar numerosi interstizi vuoti oppure riempiti da limonite giallastra o da argilla sabbiosa biancastra; inoltre spesso in mezzo a questa sostanza osservavo dei ciottoli più o meno grossi fortemente cementati dalla pasta sopra descritta. Sciogliendo un pezzo di questa sostanza nell'acido cloridrico, si forma un deposito insolubile biancastro di sabbia ed argilla, ed inoltre il Prof. G. Spezia vi potè verificare una certa quantità d'acido fosforico, assai caratteristico delle formazioni torbose, ciò che ci fa presumere che la sostanza in questione siasi formata in ristagni d'acqua dolce dove verificavasi anche una vegetazione palustre; per tal modo si comprende come questa sostanza nella sua formazione abbia potuto inglobare altresì ciottoli di varia dimensione, e, questo fatto compiendosi generalmente per accentramenti, come

siensi potuti costituire questi blocchi più o meno voluminosi e quasi isolati dal terreno circostante; d'altronde accentramenti di simil genere, quantunque quasi sempre più piccolo e meno resistenti, vediamo formarsi tuttora per depositi di ossidi specialmente di Manganese e di Ferro in mezzo a conglomerati ecc. Ma ciò che è per noi molto importante si è che questi pseudociottoli, i quali nella regione Famolasco ricevettero dai contadini il nome di *gret*, *gret cisi* o *ghërle* e nella regione Piambosco di *ghërle* o *ghërloun*, trovansi pure abbondanti sulla parte più alta dell'altipiano Banale, dove appellansi pure *gherloun* o *terra d'ombra*, perchè si usa talora di triturarli, mescolarli, con acqua ed adoperarne il deposito melmoso giallastro o nerastro, che così si forma, come colore per usi grossolani; infine noi troviamo lo stesso materiale con identico nome ed uso più a Sud, presso monte, sull'altipiano di Roracco, S. Grato, Madonna del Pasco, ecc.; se invece ci portiamo a Nord della Stura e precisamente su quell'altipiano che dalle colline Braidesi si estende verso Nord, essendo limitato ad ovest dalla terrazza Sanfrè-Sommariva-Crocetta ecc., non chè in diverse località nelle stesse colline Braidesi, troviamo nuovamente il materiale in discorso, che quivi appellasi *mürs* dai contadini, e che per la sua resistenza ed abbondanza viene spesso ridotto in frammenti ed usato come materiale da costruzione. Da ciò che ho detto si può di leggieri comprendere come questo materiale caratteristico, mentre è dannoso all'agricoltura nei pochi luoghi dove non è coperto da uno strato di argilla giallo-rossa, rendendo quasi inutile l'opera del concime, è invece utilissimo per lo studio che vogliamo fare, dimostrandoci chiaramente come le regioni che lo presentano alla loro superficie formarono parte di un antico altipiano unico, separato in seguito per azione delle acque erodenti; dobbiamo però notare che anche sugli altipiani delle più antiche terrazze secondarie trovansi talora questi grossi ciottoli che vi furono trasportati dalle acque erodenti dell'epoca delle terrazze, ma più spesso trovansi su tali terrazze minute sfericciole composte del materiale esaminato, e che risultano probabilmente dalla decomposizione dei grossi blocchi tolti al distrutto altipiano, benchè possano altresì essersi formate per minori accentramenti di ossidi, specialmente di Manganese e di Ferro, di cui sono tanto ricchi i terreni di queste regioni.

Dopo questi brevi cenni credo opportuno di passare senz'altro a tessere brevemente la storia delle fiumane di questa regione

durante l'epoca dei terrazzi, giacchè il descriverne le numerose e belle terrazze, ciò che sarebbe molto interessante, ci porterebbe troppo in lungo, obbligandoci poi a fare inutili ripetizioni, poichè dove passarono le correnti acquee di quell'epoca ivi generalmente scavarono il terreno terrazzandolo, eccetto là ove rasentavano regioni collinose. Debbo ancora avvertire che in questa regione, come d'altronde credo in nessun altro luogo, non si può assolutamente distinguere l'epoca delle terrazze da quella antropozoica, osservandosi spesso terrazze sino al livello attuale delle correnti acquee; credo quindi che dell'epoca antropozoica si debba fare soltanto una suddivisione, un periodo dell'epoca delle terrazze, e non già un'epoca distinta e posteriore alla prima come vorrebbero alcuni geologi, tanto più che probabilmente esse sono del tutto contemporanee.

Sul finire dell'Epoca pliocenica sulla terra, a causa di un generale abbassamento dei continenti (fatte naturalmente le debite eccezioni locali), le acque, sia marine che lacustri, avevano preso un notevole sopravvento sulle superficie emerse, per cui, essendosi di molto accresciuta la superficie evaporante sul nostro globo, aumentò enormemente la quantità dei vapori atmosferici; ciò produsse la straordinaria caduta di pioggie e di nevi, e conseguentemente lo straordinario sviluppo dei ghiacciai che caratterizzarono appunto l'epoca detta perciò diluvio-glaciale.

È in quest'epoca che i ghiacciai del Tanaro, Ellero e Pesio spingevansi molto in basso, come ce lo provano gli enormi ciottoli, di 1 a 2 metri di diametro (1), che trovansi sparsi allo sbocco di queste valli sui diversi piani delle terrazze e che sono probabilmente i resti delle cosidette *alluvioni moreniche*, resti che per la loro mole non poterono venir trasportati più a valle ma rimasero mescolati colle alluvioni delle terrazze e recenti, benchè trovinsi poi ancora ciottoli di 50, 80 centim. di diametro più a Nord sugli altipiani Banale, Piambosco, ecc.; nella valle del Gesso il

(1) Notisi che alcuni di questi ciottoli provengono dallo sfacelo di conglomerati miocenici.

ghiacciaio si avanzava sin quasi a Roccavione (1); quello della Stura sin presso alla Beguda, avendo una lunghezza di 46 km. circa; quello di Grana sin oltre il paese di Valgrana; in val Maira il ghiacciaio oltrepassava Dronero; in val Varaita si spingeva sin presso a Venasca, mentre in val Po non giungeva a Sanfront; e così via via per le valli più a Nord, talora verificandosi il fatto che il ghiacciaio esciva dalla valle montana costruendo sulla pianura un grande anfiteatro morenico, come avvenne per le due Dore. In quell'epoca la pianura dell'alta valle Padana non si presentava così bizzarramente solcata come attualmente, ma costituiva invece un altipiano solo, più o meno ondulato, che discendendo gradatamente dalle pendici degli Appennini si protendeva sino al piede delle Alpi; del quale altipiano unico troviamo tuttora i resti nei singoli altipiani di Roracco e S. Grato, Banale, Piambosco, Famolasco, Sanfrè sup., Sommariva Bosco sup., Ceresole, ecc. Su questo altipiano unico si allargavano le enormi fiumane che sboccavano dalle varie valli alpine confondendo spesso le loro sponde, ma conservando però una direzione abbastanza indipendente per qualche tempo; costruiva così ognuna un proprio cono di deiezione più o meno esteso e potente, modificando per tal modo notevolmente la pianura preesistente.

Ma sul finire di quest'epoca diluvio-glaciale, al generale abbassamento dei continenti sulla nostra terra succedette poco a poco un movimento in senso inverso, cioè un sollevamento generale, per cui gradatamente le acque oceaniche e lacustri si ritirarono negli attuali limiti; essendosi per tal modo notevolmente ristrette le superficie acquee, scemò pure grandemente l'evaporazione, tanto più che la temperatura terrestre aveva continuato a lentamente abbassarsi; per essere molto minore la quantità di vapori contenuti nell'atmosfera, pure assai minore divenne la caduta di pioggie e di nevi, per cui, mancando d'alimento, i ghiacciai cominciarono a ritirarsi verso i loro attuali limiti e le grandi fiumane (anche per il contemporaneo sollevamento) a disegnare meglio il loro corso scavandosi nello stesso tempo un alveo più o meno ampio; incominciò cioè l'EPOCA DELLE TERRAZZE.

---

(1) Naturalmente tutti i nomi di paesi, cascine ecc. sono soltanto usati come punto, direi, di ritrovo per far comprendere meglio i fenomeni che si verificarono nell'epoca delle terrazze; sarebbe quindi utilissimo al lettore d'aver sott'occhi le ultime carte topografiche dello Stato Maggiore Italiano, donde vennero tolti i nomi ed i dati ipsometrici che verrò menzionando.

Sul principio di quest'epoca (1° PERIODO DI TERRAZZAMENTO) il *Tanaro* sboccando dalla valle montana si allargava enormemente, rasentando colla sponda destra la base delle colline delle Langhe sino alle colline Braidesi (1) continuando poi verso N. N. O. per modo da cominciare a disegnare la terrazza Sanfrè-Sommariva, ecc., mentre che colla sponda sinistra, dopo aver rasentato le colline di Vicoforte ed aver ricevuto il tributo di Ellero e Pesio, si estendeva sino a S. Bernardo sopra Magliano, Pilone bianco (421 m.), Bricco d'Isola (415 m.), dopochè, unendosi alle acque del Gesso, continuava per Burey (406 m.), Mellani (392 m.) e Salmour (391 m.), costruendo così una terrazza di 15 a 20 m. di altezza, ma ora poco spiccata a causa della sua relativa antichità; dopo Salmour il Tanaro unito alla Stura rasentava per poco l'altipiano di Famolasco unendosi, presso la C. S. Anna (360 m.) circa, colle acque di Grana e poco dopo con Maira e Varaita, continuando in seguito verso Nord sino a raggiungere il Po probabilmente a Sud di Carmagnola; in quel periodo il Tanaro aveva sulla pianura una larghezza di 5 a 10 km., e scorreva sopra un letto di cui conservansi solo più alcuni lembi staccati, come ad esempio la porzione E. degli altipiani delle regioni Banale e Piambosco, dove sono i Massimini (415 m.), Gorra (397 m.), regione Bosco (400 m.), S. Bernardo (385 m.), Eremo di Cherasco (374 m.), ecc. Contemporaneamente l'*Ellero* uscendo dalla valle natia rasentava colla sponda destra le colline di Monastero di Vasco e di Mondovì sino al suo sbocco nel Tanaro, mentre colla sponda sinistra rasentava l'altipiano di Roracco, ecc., passando per Villanuova Mondovì sup. (613 m.), Madonna del Pasco (550 m.), Castellino (525 m.), finchè dopo La Torre (508 m.) si univa colle acque del Pesio volgendo tosto verso Est, avendo così una larghezza di circa 4 o 5 km. Intanto il *Pesio* giunto alla pianura si costituiva pure in fiumana di 4 o 5 km. di larghezza; rasentava sulla destra l'altipiano di regione Roracco, ecc., passando presso C. Domenici (556 m.), Roracco (545 m.), ecc., poi, volgendo ad Est, presso C. Giugia (510 m.), ecc., finchè dopo La Torre (508 m.)

(1) Si noti che nella Tavola sono alquanto esagerate in dislivello le terrazze più importanti pel nostro studio, e che inoltre le linee colorite non vogliono sempre indicare la linea mediana delle correnti dell'epoca in questione, ma piuttosto la loro direzione più notevole rispetto a questo lavoro.

si univa colle acque dell'Ellero; invece sulla sinistra non lasciò traccie molto notevoli di terrazze presso monte, ma, dopo essersi unito alle acque di Colla e Iosina, volgendo ad Est, incominciò a scavarsi un alveo nella pianura, passando per C. La Torre (410 m.), S. Rocco, C. Rovere (421 m.), finchè presso S. Bernardo si gettava nelle acque del Tanaro. In quell'epoca le acque dei torrenti *Iosina* e *Colla* escendo dalla loro valle si ripiegavano ad E. N. E. unendosi presto colle acque del Pesio.

Nello stesso periodo le acque del *Gesso*, siccome il suo cono di deiezione inclinava ad E. N. E., si dirigevano verso l'E. N. E. passando tra Morozzo e Montanera e scavandosi poco dopo un alveo, di cui vediamo ora le sponde (benchè incompiute, specialmente a sinistra), a destra nell'altipiano Banale tra C. La Torre (410 m.), C. La Tous (411 m.), il Casino (416 m.) e Bricco d'Isola (415 m.), ed a sinistra nell'altipiano Famolasco tra Trinità alta (400 m.), C. Racchio (397 m.), il Palazzo (404 m.), e Burey (406 m.); quivi il Gesso sboccando nel Tanaro, dopo oltre 30 km. di percorso sulla pianura con un alveo ampio da 2 a 4 e più km. Allora la *Stura* aveva ad un dipresso la direzione che ha presentemente, solo che portavasi alquanto più a destra e dopo Montanera incominciava ad incassarsi in un alveo, la cui parete destra è ora conservata solo partendo dalla Trinità sup. (400 m.), e quella sinistra partendo da Fossano (380 m.); per cui possiamo dire che la Stura di quell'epoca, dopo aver rasentato colla sponda destra, dopo la Trinità, C. Bric (403 m.), Madonna di Loreto (399 m.), C. Lombarda (395 m.), ecc., situate sull'altipiano Piambosco, e colla sponda sinistra, dopo Fossano, C. Sacèrdote (375 m.), Cappella S. Michele (368 m.), C. Maiotti (370 m.), C. Ariè (365 m.), ecc., situate sull'altipiano Famolasco, si gettava nel Tanaro tra il paese di Salmour (391 m.) e la C. S. Anna (360 m.) circa, dopo oltre 35 km. di lunghezza, raggiungendo la larghezza persino di 5 km. in alcuni punti.

Le acque di *Grana* in quell'epoca escendo dalla valle montana invece di volgere tosto a Nord come fanno ora, seguendo l'inclinazione del proprio cono di deiezione, si dirigevano verso l'E. N. E., cioè verso Fossano, costruendo colla sponda destra una terrazza (lato Ovest dell'altipiano Famolasco) che vediamo ora conservata cominciando da Fossano (380 m.); e dopo aver rasentato a destra C. Alamandri (365 m.), C. Celebrini (360 m.), C. Sacco

(367 m.), pilone S. Bartolomeo (365 m.), C. Gastaldi (365 m.), C. Famolasco (360 m.), C. S. Anna (360 m.), gettavansi nelle acque del Tanaro; invece dalla parte sinistra le acque di Grana si confondevano quasi con quelle di *Maira*, che correva parallelamente a Grana e gettavasi nel Tanaro poco a Nord del punto di sbocco delle acque di Grana. Anche le acque di *Varaita* gettavansi nel Tanaro a Sud di Caramagna; notiamo però naturalmente che quivi la pianura era alquanto più rialzata che ora non sia, essendo essa allora una continuazione dell'altipiano Famolasco e Ceresole. Il *Po*, come le correnti che trovavansi alla sua destra, si dirigeva pure verso N. E. mescendosi colle acque del Tanaro nelle vicinanze di Carmagnola e continuando quindi verso il Nord. Notiamo tuttavia a questo proposito, che dirigendosi verso il Nord le acque Po-Tanaro dovevano probabilmente stagnare alquanto od almeno rallentare la loro corsa, incontrando le falde dei coni di deiezione costrutti dalle fiumane di sinistra del Po, specialmente il cono di deiezione della Dora Riparia che si protende sino al piede della collina di Torino; tanto è vero ciò che, specialmente nel territorio di Carignano, il *diluvium* è coperto da uno strato di finissima sabbia melmosa della potenza persino di 15 a 20 m., strato che fu deposto appunto dalle acque Po-Tanaro durante la prima metà dell'epoca delle terrazze, e che fu eroso in seguito dalle acque del Po, che vi scavarono il loro alveo attuale; dobbiamo notare anche, a questo riguardo, come assai grande era la quantità di sabbia ed argilla che verso Carignano già allora trasportavano i numerosi torrenti che scendevano dalle colline Braidesi, non ultima delle cause per cui l'alveo del Tanaro, così ben marcato sin oltre Sommariva del Bosco, va man mano scomparendo verso Nord, venendo tuttora riempito dai depositi di questi torrenti; come pure in parte alla stessa causa devesi attribuire la deviazione del Tanaro verso Est, come vedremo.

Riassumendo, possiamo adunque dire, che durante questo primo periodo di terrazzamento cominciarono a rimanere allo asciutto, presso monte l'altipiano più o meno continuo di Roracco (545 m.), S. Grato (510 m.), ecc.; e nella pianura la porzione Ovest degli altipiani Banale (420 m.) e Piambosco (400 m.), la porzione Sud dello stretto altipiano Famolasco (280-260 m.) sino a C. S. Anna circa, e presso la collina Braidese l'altipiano di Accate (359 m.), Paolorio (333 m.), Ceresole d'Alba (300 m.), Contarelli (280 m.), Cappei (273 m.), ecc.

In questo periodo le acque uscenti dalle valli alpine si allargavano ancora molto sulla pianura per modo che spesso confondevansi le loro sponde, conservando essi tuttavia una direzione piuttosto indipendente; inoltre le correnti acquee che scendevano dalle Alpi, come abbiamo notato specialmente per Grana, Stura e Gesso, non scavavansi un letto profondo verso monte, ma solo verso valle, determinando gli isolati altipiani già menzionati; il quale fatto dipende essenzialmente dalla notevole inclinazione verso N. O. della porzione Est dell'alta valle Padana, e si comprende facilmente osservando ciò che verificasi comunemente oggidì sia per le grandi fiumane che per i più umili rigagnoli, ovunque una corrente acquea allargata comincia a restringersi e ad erodere il piano su cui scorre. Frattanto le ultime falde collinose degli Appennini cominciavano a venire intersecate da varii torrentelli che poco a poco escavando le ridussero a quello stato, direi, labirintoideo che le caratterizza attualmente.

Sul finire di questo primo periodo di terrazzamento, essendo gradatamente scemata la quantità d'acqua delle fiumane, per un accentuarsi del moto sollevante le correnti acquee deviarono alquanto dalla loro direzione primitiva (2° PERIODO DI TERRAZZAMENTO). Il *Tanaro* costeggiava sempre colla sua sponda destra le colline delle Langhe e dopo Bra continuava ad approfondire la terrazza Tartapini (366 m.) - Bricco Cerlino - (332 m.) - Sanfrè sup. (316 m.) - Sommariva del Bosco sup. (298 m.) - pilone Montà vecchia (291 m.) - pilone S. Andrea (281 m.) - Ricciardo - Crocetta - C. Bricchetto dell'Ospedale (263 m.), ecc.; invece la sua sponda sinistra si era notevolmente ritirata ad Est, per modò che il Tanaro, con un letto sempre meno largo tra le colline delle Langhe e quelle di Vicoforte, dopo aver ricevuto le acque di Ellero e Pesio, rasentava a sinistra Madonna dei Ronchi (401 m.), Rossini (400 m.), C. Calandri (404 m.), C. Ferrua (401 m.), C. Gazera (394 m.), ecc., finchè alla C. Carassi (394 m.) riceveva il tributo del Gesso; dopo ciò continuava per C. Aragno (384 m.) sopra Podio, C. Borgna (383 m.), C. Bicocca (380 m.), Eremo di Cherasco (374 m.) e Castello Galateri (367 m.), dove si univa colle acque della Stura; in seguito confluiva probabilmente ancora per qualche tempo colle acque di Grana presso la Cappella Tarletta (352 m.) e Costa Lamberti (343 m.); ma essendosi gradatamente portata verso Nord tale confluenza, il Tanaro (dopo lo sbocco della Stura) passava per

C. Bastian (332 m.), C. Montemaggiore (321 m.), Valle di sopra (313 m.), Valle di sotto (310 m.), C. Gatti (305 m.), C. Regina (303 m.), Madonna del Pilone (290 m.), ecc., finchè al Motturone (290 m.) riceveva le acque di Grana e poco dopo di Maira e di Varaita, unendosi alle acque del Po nel territorio di Carmagnola circa; siccome il Tanaro, come quasi tutte le correnti acquee, terrazzò profondamente in questo periodo, così noi troviamo ora molto in basso il suo letto d'allora; di questo letto al piede delle Langhe sono resti, per esempio, il piccolo altipiano dei Pejron e C. Stagna (401 m.), quello tra Case sulla Rocca e C. Cittadella (373 m.), quello della C. il Piano (380 m.), ecc.; ed al piede della collina di Vicoforte la Regione delle Prata (420 m.), Regione Campolungo (405 m.), altipiano di Codevilla (413 m.), Roata soprana (397 m.), Bernolfi (401 m), Basini (404 m.), ecc., parte Est delle Regioni Rifreddo (380 m.) e Gratteria (380 m.); e nella pianura la porzione Ovest della Regione Preosa (370 m.), il piano di Carrù (363 m.), delle Regioni Pettarella (370 m.), Le Mollie (360 m.), Rianasso (355 m.), Prata (350 m.), Castelletto e Gombe (345 m.) ecc., il piano di Pra (353 m.), Roncaglia (340 m.), Lucchi (336 m.), Ghidone (327 m.), Cervere (301 m.), Colombé (293 m.), Cappellassa (313 m.), Veglia (295 m.), Caramagna (255 m.), ecc.; aveva allora il Tanaro un'ampiezza persino di 7 km., notando però, a questo proposito, che verso la metà circa di questo 2° periodo, le acque del Tanaro alla confluenza del Gesso si ritirarono alquanto verso Est, passando allora la loro sponda sinistra per C. Fornaseri, C. Gallo (369 m.), C. Sardot, C. Aragno (361 m.), C. Raspone (350 m.), La Morra, ecc., ma continuando in seguito le acque di Tanaro la loro strada di prima, per modo da costituire per tale deviazione uno stretto altipiano (370-355 m.), che in parte ricevette il nome di Regione Viamarenca, il quale ha una certa importanza come uno dei pochi resti dell'antico letto del Tanaro durante il 1° sottoperiodo del 2° periodo di terrazzamento.

Frattanto l'*Ellero*, sempre rasentando a destra le colline di Mondovì, a sinistra si allontanava dall'altipiano di Roracco passando invece per Villanuova bassa (530), San Luigi (511 m.), Merlo (480 m.), ecc., riunendosi poco dopo colle acque del Pesio; ma dopo qualche tempo si ritirava più ad Est e dopo Villanuova Mondovì passava allora per Bongiovanni (493 m.), Villa Brichetto (462 m.), Avagnina (450 m.), ecc., dove si univa col

Pesio e quindi poco dopo col Tanaro, avendo così una larghezza persino di 4 km., e scorrendo su di un letto, di cui sono resti, per il 1° sottoperiodo l'altipiano di Mazzucco (450 m.), Avagnina (450 m.), ecc., e per il 2° l'altipiano di Mondovì Breo (410 m.), di Carassone (408 m.), del Cimitero di Mondovì (413 m.), e parte delle Regioni Rifreddo (380 m.), Gratteria (380 m.) e piano di S. Quintino (380 m.). Il *Pesio*, dopo aver rasentato ancora per qualche tempo colla sponda destra l'altipiano di Roracco ed averne approfondito la terrazza, per piegarsi poi ad Est per C. Turta (470 m.), ecc. (riunendosi all'Ellero presso C. Zucchi (452 m.) circa), si ritirò alquanto più ad Ovest passando per C. Marenco (530 m.), Ardité (515 m.), Ambrogi (509 m.), Pianfei (503 m.), Bongiovanni (498 m.), C. Revelli (490 m.), ecc., e dopo essersi ripiegato ad Est per C. Mogna (489 m.), Blangetti (480 m.) ecc., si riuniva all'Ellero presso Avagnina (450 m.); mentre che colla sponda sinistra passava per C. Massa (537 m.), Le Combe (536 m.), S. Maria Rocca (504 m.), Simonin (500 m.), dove riceveva le acque di Iosina e Colla; dopo di che piegando ad Est costeggiava l'altipiano di Regione Banale passando per La Torre, S. Bernardo, C. Torre (410 m.), C. S. Luigi (404 m.) ecc., gettandosi poi nel Tanaro alla Madonna dei Ronchi (401 m.); nel qual tempo aveva un letto ampio oltre 6 km. in molti punti; resti del letto del Pesio in questo 2° periodo di potente terrazzamento sono: per il 1° sottoperiodo l'altipiano di Mussi (523 m.), Pianfei (503), Blangetti (480 m.), ecc., e per il 2° sottoperiodo a monte si può quasi dire l'attuale piano del Pesio, ed a valle il piano di Margarita (450 m.), Morozzo (430 m.), Crava (410 m.), Roccadebaldi (415 m.), Zucchi (400 m.), Magliano (390 m.), ecc. Il torrente *Iosina*, dopo aver rasentato colla sponda destra C. Benelli (530 m.), C. Ciambotta (525 m.), ecc., volgeva ad Est passando per Beinette, C. Brobbio (502 m.), ecc., riunendosi colle acque col Pesio ai Simonin (500 m.). Così pure il torrente *Colla*, poco dopo essere sboccato dalla valle montana piegando ad Est, passava per C. Cavallera (565 m.), C. Verde (550 m.), S. Lorenzo (545 m.), ecc., unendosi poi colle acque di Iosina e quindi col Pesio. Il *Gesso* in quell'epoca continuava a dirigersi verso l'E. N. E. sempre più incavando il suo letto verso valle e rasentando, nel 1° sottoperiodo, sulla destra La Torre, Bricco d'Isola, C. Borra (405 m.), Gorra (397 m.), pilone S. Luigi (400 m.), pilone S. Stefano

(396 m.), ecc., gettandosi nel Tanaro alla C. Carassi (394 m.), mentre che nel 2° sottoperiodo si univa col Tanaro presso la C. Ribadella (356 m.) circa; invece colla sua sponda sinistra nel 1° sottoperiodo il Gesso rasentava Trinità, Burey, C. Cristino (391 m.), S. Bernardo (387 m.), C. Renaldi (386 m.), gettandosi poco dopo nel Tanaro, mentre che nel 2° sottoperiodo tale confluenza era portata poco a Sud della C. Raspone (350 m.); l'alveo del Gesso era allora ampio da 2 a 4 km. circa; il letto del Gesso alla fine di questo periodo era, verso valle, il piano dei Dalmazzi (390 m.), di S. Giovanni (385 m.), ecc., sino a Bene-Vagienna (350 m.).

La *Stura* frattanto mentre verso monte non era ben distinta a destra dalle acque del Gesso, verso valle se ne allontanava presso Trinità, continuando poi per Salmour, C. Marghera (373 m.), ecc., finchè si gettava nel Tanaro al Castello Galateri (367 m.); colla sponda sinistra, siccome la fiumana escendo dalla valle montana si espandeva lateralmente, rasentava dapprima C. Spazzafornei, Ruata Rivetta (577 m.), ecc., e nel 2° sottoperiodo passava per C. Moni (600 m.), C. Anfosso (594 m.), S. Croce (586 m.), C. Baronpozzo (562 m.), Confreria, ecc., confondendo alquanto la sua sponda sinistra con quella destra di Grana, da cui però si separava nettamente a Fossano rasentando allora l'altipiano Famolasco sino a Cappella Tarletta e Costa Lamberti (343 m.) circa, dove si gettava nel Tanaro; il suo letto misurava allora in certi punti oltre 4 km. di larghezza, ed è quello su cui stanno ora S. Albano (380 m.), Trinità bassa (375 m.), Chiaramelli (318 m.), Grinzano (320 m.), Cervere (301 m.), Montarossa (315 m.), Cappellassa (313 m.), ecc. Le acque di *Grana* continuavano a costeggiare a destra la Regione Famolasco, unendosi colle acque del Tanaro, dapprima nelle vicinanze di Costa Lamberti (343 m.), e resto di questo passaggio è il rio Grione che, raccogliendo le acque discendenti dal lato Ovest dell'altipiano Famolasco, passa per Castello Salsa, Trucchi e Famolasco volgendo a N. E., finchè raggiunge il torrente Melletta e quindi il Po a monte di Carignano; ma poco a poco le acque di Grana si portarono più a Nord costeggiando a destra Tetti Boita (333 m.), S. Bernardo (315 m.), Marene, C. dei Franca (294 m.), sinchè riunivansi alle acque del Tanaro presso il Motturone (290 m.). Le acque di *Maira* si gettavano allora nel Tanaro poco a Nord della confluenza di

quelle di Grana. Le acque di *Varaita* mescevansi con quelle del Tanaro nel territorio di Caramagna circa. Le acque del *Po* confluendo nel territorio di Carmagnola all'incirca colle acque del Tanaro, continuavano poi verso Nord, certamente con una larghezza considerevole. Il letto di queste ultime correnti fluviali, al termine del periodo in discorso era ad un dipresso l'attuale pianura padana. Alla fine di questo 2° periodo di potentissimo terrazzamento erano rimasti all'asciutto sulla pianura, oltre quelli preesistenti, gli altipiani di S. Maria Rocca, di Pianfei, di San Luigi e Branzola, di Avagnina, la parte Est delle regioni Banale e Piambosco, e la parte Nord della regione Famolasco, di cui erasi allargata lateralmente la porzione Sud.

Frattanto, siccome le correnti acquee non avevano cessato di diminuire di volume, in seguito ad un più potente impulso della forza sollevante, nuovi e notevoli cangiamenti si verificarono nelle fiumane (3° PERIODO DI TERRAZZAMENTO). Il *Tanaro* con una larghezza di solo più 2 o 3 km., si portò sempre più ad Est, rasentando a destra le Langhe e, dopo Bra, la preesistente terrazza Sanfrè-Sommariva, ecc.; la sua sponda sinistra passava per Canton (400 m.), Camigliasca (390 m.), S. Marco (394 m.), C. Zanoni (386 m.) (ricevendo poco dopo il tributo dell'Ellero), i Govoni (370 m.) (mescendosi quindi colle acque del Pesio), C. Rinada (363 m.), Carrù (363 m.), C. Verame (355 m.), Mirra presso Piozzo (345 m.), Lequio (333 m.), Narzole (323 m.), Priosa (325 m.), C. Vallarà (322 m.), C. Costa (314 m.), Castel Varolfo (305 m.), quindi, dopo la confluenza della Stura, continuando sempre verso Nord per Roreto (290 m.), C. Malabaila (289 m.), Tetti alti (283 m.), Case del Bosco (274 m.), Molino della Motta (269 m.), ecc., finchè il Tanaro si univa col Po non lungi da Carignano. Di questo antico letto del Tanaro abbiamo resti sulla destra negli altipiani di regione Carpenera (350 m.), C. Gay (347 m.), S. Nicola (337 m.), ecc., S. Carlo (316 m.), Monchiero (312 m.), ecc.; sulla sinistra troviamo analoghi residui negli altipiani dei Dalmazzoni (376 m.), Niella Tanaro (373 m.), Fornello (372 m.), C. Scarpito (356 m.), i Minet'i (358 m.), la punta Est degli altipiani di S. Quintino, di regione Rifreddo e di regione Preosa, nei piani di S. Pietro (340 m.), di Roatta (337 m.), di C. del Soldato (336 m.), di Piozzo (327 m.), nella punta della regione Grillero (316 m.), nei piani di C. Cavaliera (309 m.), Corno (297 m.), Cherasco (288 m.), Bra (280 m.),

Sanfrè (275 m.), ecc. Durante questo periodo, d'altronde piuttosto breve, le acque di *Ellero*, *Pesio*, *Iosina* e *Colla*, cominciarono a delineare l'attuale loro alveo; poche erano allora le varianti che esse presentavano dall'attuale corso, così per esempio il Pesio non faceva a Morozzo un angolo tanto marcato come attualmente, ma bensì una curva, ecc.; ma in complesso non presentavano fatti importanti. Il *Gesso* invece, cessando di passare per Bene, confluiva colla Stura; confluenza questa che in poco tempo si trasportò verso monte sino a Cuneo. La *Stura* continuò a scavarsi l'alveo che vediamo attualmente così profondo, gettandosi nel Tanaro tra Castel Varolfo e Roreto. Le acque di *Grana*, *Maira*, *Varaita* e *Po* si portarono sempre più a Nord nel loro corso, e probabilmente Grana e Maira cominciarono a fondersi meglio verso valle, continuando forse a gettarsi nel Tanaro. La confluenza del *Po* col Tanaro avveniva probabilmente nelle vicinanze di Carignano.

Infine un più intenso sollevamento fece sì che tutte le correnti acquee di questa regione pigliassero poco a poco l'attuale direzione (4° PERIODO DI TERRAZZAMENTO). Il *Tanaro* si ritirò sempre più ad Est, quindi, anche per trovarsi vieppiù ostacolato a Nord dalle alluvioni dei torrenti che scendevano dalle colline Braidesi, approfittando di una depressione che probabilmente già esisteva tra le Langhe e le colline Braidesi, si volse ad Est definitivamente per modo da raggiungere il Po a valle di Alessandria dopo oltre 276 km. di percorso; notiamo però che, sino ad un tempo molto recente, esso battè in breccia contro le colline Braidesi, escavandole potentemente in arco tra Bra e S.ª Vittoria. *Ellero*, *Pesio*, *Iosina*, *Colla* e *Gesso* continuarono a scavarsi più o meno profondamente l'attuale loro alveo, sempre diminuendo sia in volume che nell'ampiezza delle loro curve, per modo da terrazzare molto bene l'alveo che così si scavarono; lo stesso dicasi della *Stura*, la quale per lungo tempo passò sotto Bra, per modo che, sia per la confluenza quivi di Stura con Tanaro, sia per il punto morto che doveva necessariamente trovarsi all'interno della curva che faceva la Stura in quella località, alla distanza di quasi 1 km. dall'antica sponda sinistra, restò quel piccolo rialzo di terreno, allungato nel senso N. S., che prese il nome di Monte Capriolo (254 m.). Le altre fiumane, portandosi poco a poco a Nord, raggiunsero l'attuale loro posizione senza però incassare molto il loro alveo, quantunque scorressero su terreno alluvionale e quindi facilmente erodibile.

È inutile l'aggiungere come in tutti i periodi di terrazzamento ora menzionati, tanto antichi che recenti, le correnti acquee deponessero sempre, là dove scorrevano, alluvioni più o meno potenti, che io appellerei *alluvium delle terrazze.*

Fatta così sommariamente la storia delle correnti fluviali dell'epoca delle terrazze nell'alta valle padana, possiamo ancora dire poche parole su ciò che contemporaneamente si verificò nelle principali fiumane della valle Padana più a Nord. La *Dora Riparia* prima di scavarsi l'attuale alveo, per qualche tempo si costituì in lago nell'interno del suo anfiteatro morenico, e le acque che traboccavano dirigevansi specialmente verso N. E. È notevole per la *Stura di Lanzo* specialmente la sua grande terrazza di sinistra che da Balangero per Novero (410 m.) e Teppa (325 m.) si prolunga sino a Volpiano, che dista circa 10 km. dall'attuale corso del fiume, indicandoci per tal modo come l'antica direzione della Stura, anche tenendo conto della maggior ampiezza del fiume d'allora, doveva essere molto più ad Est che non attualmente. Quasi lo stesso si può dire per l'*Orco* che costruì sulla sinistra la terrazza Agliè (330 m.) - S. Giorgio Canavese - Foglizzo - Montanaro, dalla quale ora è notevolmente distante, mentre il torrente Malone rasenta quasi la terrazza di destra, Barbania (360 m.) - Rivarossa (286 m.) - Volpiano, che costruì in unione coll'Orco. Possiamo ancora accennare alla *Dora Baltea*, che prima di incassarsi nell'attuale suo alveo, avendo il suo bacino morenico converso in lago, per lungo tempo sboccava presso Cavaglià, dove evvi ora la regione Dora morta, costruendo la terrazza che da S. Quirico (239 m.) si avanza sino alle C. Chiappine presso Carisio (205 m.), cioè con direzione spiccatissima verso l'Est, mentre oggigiorno corre direttamente a Sud, per cui le C. Chiappine distano ora una ventina di km. circa dall'attuale corso della Dora.

Moltissime ed assai interessanti sarebbero le osservazioni sulle varie terrazze, altipiani, ecc. anche in questa parte della valle Padana, nonchè più ad Est nella Lombardia; ma per non dilungarmi troppo, porrò fine a questo lavoro (per l'indole sua già molto minuto) accennando alle principali conclusioni, che credo possansi dedurre dall'esame dei fenomeni sovraccennati:

I° Le più antiche ed importanti terrazze dell'alta valle Padana non possonsi spiegare semplicemente per fenomeni di

idraulica fluviale, cioè per oscillazione ed approfondamento delle correnti erodenti o per sola azione di cernita e di lavaggio (come si verifica per molte altre terrazze, anche di questa regione); ma la loro formazione, oltre che al diminuire di volume delle fiumane durante l'epoca delle terrazze, devesi indubbiamente attribuire a fenomeni endogeni, cioè a sollevamenti; tanto più che molte delle correnti acquee esaminate intaccarono non solo i terreni diluviali, ma anche quelli pliocenici e persino le compatte marne mioceniche.

II° Durante l'epoca delle terrazze la valle Padana e quindi naturalmente le catene montuose che la circondano subirono un notevole sollevamento; sollevamento che continua probabilmente tuttora.

III° Il sollevamento indicato fu massimo per le catene montuose che fanno il passaggio tra le Alpi e gli Appennini, medio per le Alpi Pennine e Lepontine, minimo per la parte Nord delle Alpi Marittime e per le Alpi Cozie; o più semplicemente la forza sollevante si accentuò in particolar modo per le catene montuose dirette E.-O., e specialmente per quelle situate più a Sud.

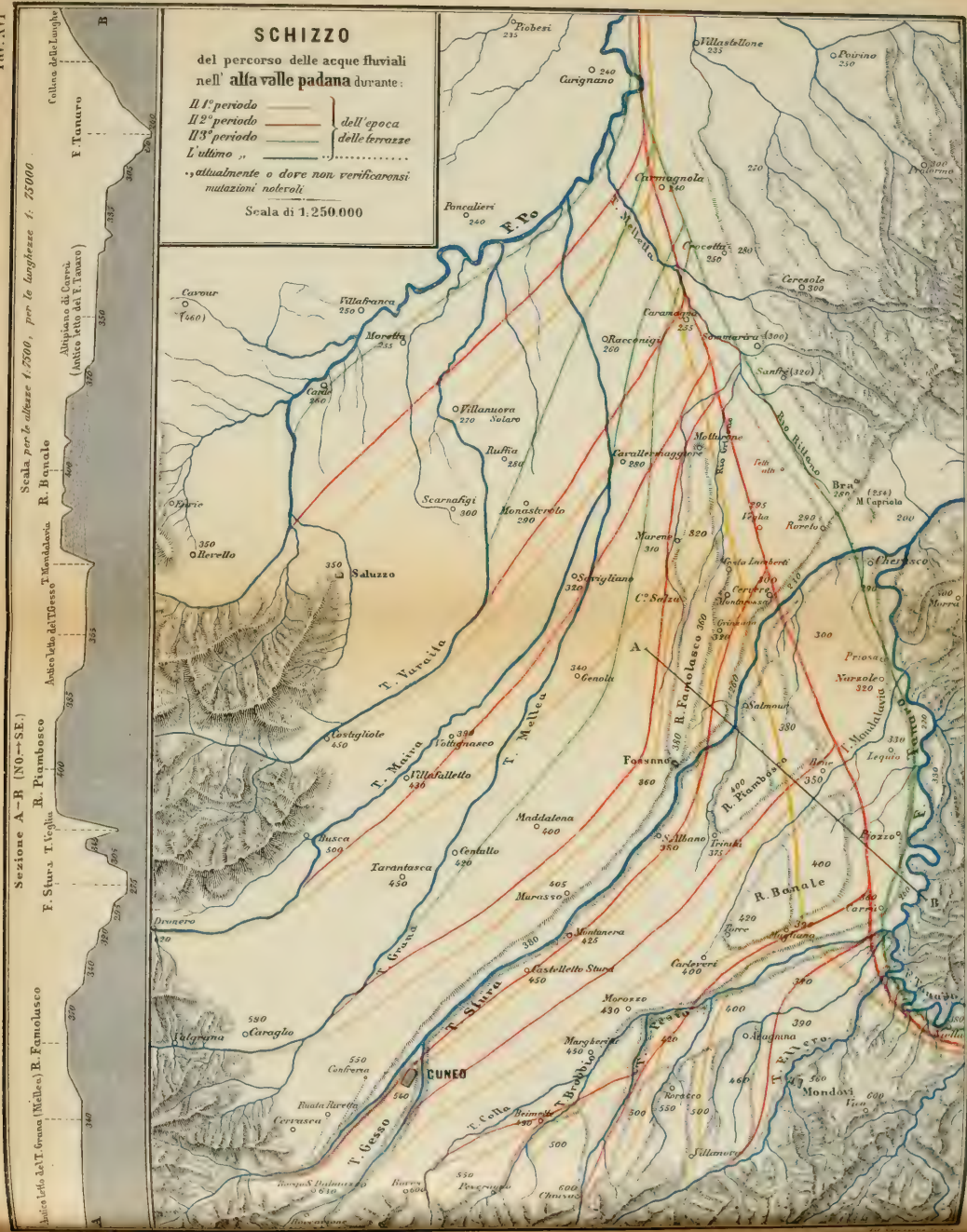
IV° Per l'alta valle Padana tale sollevamento, che sul finire dell'epoca pliocenica era diretto da S. E. verso N. O. (come risulta dalla inclinazione degli strati pliocenici), sul principio dell'epoca delle terrazze si compiè da Sud verso Nord (trasporto dei corsi d'acqua da Sud a Nord), finchè verso la fine dell'epoca delle terrazze si verificò con direzione alquanto verso il N. N. E. (deviazione del Tanaro ad Est), facendo così una curva di quasi 45°.

V° Il moto sollevante si verificò con maggiore intensità nella prima metà dell'epoca delle terrazze.

VI° Il sollevamento si accentuò specialmente di tratto in tratto durante certi periodi che io distinsi in quattro principali nell'alta valle Padana, in considerazione dei fenomeni importanti che li caratterizzarono, mentre che in verità essi furono in numero molto maggiore.

VII° Nell'alta valle Padana l'intensità del sollevamento fu molto maggiore, come pure i diversi periodi di sollevamento furono più distinti a Sud presso monte che non più a valle.

Tav. XVI


SCHIZZO
del percorso delle acque fluviali
nell' alta valle padana durante:
Il 1° periodo
Il 2° periodo
Il 3° periodo
L' ultimo „
dell' epoca delle terrazze
„ attualmente o dove non verificaronsi mutazioni notevoli
Scala di 1.250.000
Scala per le altezze 1:7500, per le lunghezze 1: 75000
Sezione A–B (NO.→SE.)
F. Po
F. Tanaro
R. Bonale
R. Famolasco
R. Piambosco
F. Stura
T. Vraita
T. Maira
T. Mellea
T. Grana
T. Gesso
T. Colla
T. Brobbio
T. Pesio
T. Ellero
T. Mondalavia
Rio Rillano
Rio Verdeno
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Rio Vallone
Probesi
Villastellone
Poirino
Carignano
Carmagnola
Pancalieri
Crescentino
Ceresole
Cavour
Villafranca
Moretta
Raccenigi
Sommariva
Sanfiè
Carde
Villanuova Solaro
Ruffia
Cavallermaggiore
Mottalciona
Bra
Magliano
Isoria
Scarnafigi
Monasterolo
Marene
Ceva
Rarello
Cherasco
Ollerello
Saluzzo
Savigliano
Cà Salza
Grotta Lamberti
Certosa
Montanera
Ginestrino
Morra
Priocca
Narzole
Genola
Salmour
Castiglione
Vottignasco
Villafalletto
Fossano
Lequio
Busca
Centallo
Tarantasca
Maddalena
S. Albano
Trinità
Pozzo
Murasso
Carrù
Dronero
Montanera
Carleveri
Castellello Stura
Morozzo
Roccasparvera
Valgrana
Caraglio
Margherita
Aisone
Cuneo
Confreria
Ruata Turetta
Cervasca
Roccasco
Mondovì
Vico
Sillanoro
Borgo S. Dalmazzo
Roccavione
Pianfei
Chiusa
Pesio
Cuneo
Mondovì
Villanova
Carrù
Dronero
Cervasca
Borgo S. Dalmazzo
Roccavione

Il Socio Comm. Prof. G. Curioni presenta e legge il seguente lavoro del sig. Ingegnere Scipione Cappa, Prof. nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino,

# SUL MOVIMENTO DI ROTAZIONE DI UNA MASSA LIQUIDA INTORNO AD UN ASSE.

Una massa liquida si può immaginare dotata di un movimento di rotazione intorno ad un asse per modo che tutti i punti di ciascuna circonferenza avente il centro sopra il medesimo asse, abbiano nello stesso istante la stessa velocità angolare, la quale può variare col tempo per una stessa circonferenza fluida e può in uno stesso istante essere diversa da circonferenza a circonferenza fluida perchè le molecole liquide sono sciolte le une dalle altre. Evidentemente questo movimento di cui possiamo immaginare dotata una massa liquida, soddisfa alla condizione necessaria della continuità.

Applichiamo a questo movimento le equazioni generali del moto di un punto materiale e perciò incominciamo dal farne l'applicazione più generale ad un punto di una massa fluida che si muova comunque.

Riferita la massa liquida ad un sistema di tre assi coordinati ortogonali, indichiamo con $X$, $Y$, $Z$ le componenti parallele ai tre assi della forza applicata al liquido nel punto di coordinate $x$, $y$, $z$ per ogni unità di massa; rappresentiamo poi con

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

le accelerazioni dello stesso punto parallele ai tre assi,

con $$\frac{dp}{dx}dx\,,\quad \frac{dp}{dy}dy\,,\quad \frac{dp}{dz}dz\,,$$

gli accrescimenti della pressione corrispondenti ai rispettivi incrementi $dx$, $dy$, $dz$ delle coordinate del punto che si considera.

Sia $G$ il peso specifico del liquido, $g$ l'accelerazione della gravità, epperò $\frac{G}{g}$ la densità del liquido.

Le equazioni del moto di un elemento della massa liquida avente la forma di un parallelepipedo rettangolo di lati $dx$, $dy$, $dz$, saranno le seguenti:

$$\frac{G}{g}dx\ dy\ dz\,X-\frac{dp}{dx}dx\ dy\ dz=\frac{G}{g}dx\ dy\ dz\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{G}{g}dx\ dy\ dz\,Y-\frac{dp}{dy}dy\ dx\ dz=\frac{G}{g}dx\ dy\ dz\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{G}{g}dx\ dy\ dz\,Z-\frac{dp}{dz}dz\ dx\ dy=\frac{G}{g}dx\ dy\ dz\frac{d^2z}{dt^2}\,.$$

Sopprimendo i fattori comuni si ha:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{G}{g}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{G}{g}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$\frac{dp}{dz}=\frac{G}{g}\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Passiamo ora al caso particolare del moto rotatorio di cui ci vogliamo occupare.

Supponiamo che il liquido sia omogeneo, che l'asse di rotazione sia lo stesso asse delle $z$ e che il piano delle $xz$ sia verticale, cioè parallelo alla direzione della forza di gravità.

Sia $\alpha$ l'angolo che l'asse di rotazione fa colla verticale. Supponiamo poi che ogni molecola oltre all'essere sollecitata dal peso proprio sia eziandio soggetta per ogni unità di massa ad una

forza $\varphi$ giacente nel piano della circonferenza descritta dalla molecola e diretta secondo la tangente alla circonferenza medesima. Indicheremo questa forza colla denominazione di forza tangenziale; questa forza non ha componente parallelamente all'asse di rotazione. Sia $r$ la distanza del punto della massa liquida che si considera dall'asse di rotazione e sia $\omega$ la sua velocità angolare. Riguarderemo per ora $\omega$ come funzione di $r$, di $z$ e del tempo $t$; così pure riguarderemo per ora $\varphi$ come funzione di $r$, di $z$ e di $t$. Si avrà intanto:

$$X = -\varphi \frac{y}{r} - g \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y = \varphi \frac{x}{r}$$

$$Z = -g \cos \alpha ,$$

e siccome si tratta di un movimento rotatorio intorno all'asse delle $z$, si avrà ancora:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -x\omega^2 - y \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -y\omega^2 + x \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = 0 .$$

Sostituendo nelle equazioni generali, esse diverranno pel caso particolare del moto rotatorio le seguenti:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{G}{g}\left(-\varphi \frac{y}{x} - g \operatorname{sen} \alpha + x\omega^2 + y \frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{G}{g}\left(\varphi \frac{x}{r} + y\omega^2 - x \frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$\frac{dp}{dz} = G \cos \alpha .$$

Ponendo ora: $\qquad \varphi - r \dfrac{d\omega}{dt} = f ,$

le equazioni precedenti diventano:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{G}{g}\left(-f\frac{y}{r} - g \operatorname{sen} \alpha + x\omega^2\right)$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{G}{g}\left(f\frac{x}{r} + y\omega^2\right)$$

$$\frac{dp}{dz} = G \cos \alpha .$$

Per il principio dell'uguaglianza di pressione in ogni verso, dovendo la pressione $p$ essere funzione unicamente delle coordinate $x$, $y$, $z$ del punto della massa liquida che si considera in un certo istante, si avranno tra le derivate parziali della pressione le tre equazioni di condizione seguenti:

$$\frac{d\frac{dp}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{dp}{dy}}{dx}$$

$$\frac{d\frac{dp}{dx}}{dz} = \frac{d\frac{dp}{dz}}{dx}$$

$$\frac{d\frac{dp}{dy}}{dz} = \frac{d\frac{dp}{dz}}{dy}.$$

Nel nostro caso essendo la derivata $\frac{dp}{dz}$ indipendente da $x$ e da $y$, la seconda e la terza delle equazioni di condizione ora scritte si riducono alle seguenti:

$$\frac{d\frac{dp}{dx}}{dz} = 0$$

$$\frac{d\frac{dp}{dy}}{dz} = 0 ;$$

ossia:

$$-\frac{y}{r}\frac{df}{dz}+2x\omega\frac{d\omega}{dz}=0$$

$$\frac{x}{r}\frac{df}{dz}+2y\omega\frac{d\omega}{dz}=0\,.$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per $x$, e la seconda per $y$, e sommando si ha:

$$2\left(x^2+y^2\right)\omega\frac{d\omega}{dz}=0\,,$$

donde si ricava:

$$\frac{d\omega}{dz}=0$$

e per conseguenza anche:

$$\frac{df}{dz}=0.$$

Vedesi quindi, che: *se ha luogo il moto di rotazione attorno ad un asse di una massa liquida soggetta al peso e ad una forza tangenziale, la velocità angolare non può essere funzione della variabile* z, *ossia della coordinata parallela all'asse di rotazione e perciò le superficie cilindriche aventi tutte per asse quello di rotazione, sono superficie di uguale velocità, ossia superficie di cui tutti i punti avranno nello stesso istante la stessa velocità.*

La velocità angolare $\omega$ e la quantità $f$ pertanto non si possono più riguardare come funzioni dell'ordinata $z$, ma solo come funzioni del raggio $r$ e del tempo $t$. Ammessa questa restrizione esaminiamo la prima equazione di condizione:

$$\frac{d\frac{dp}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{dp}{dy}}{dx}\,.$$

Nel nostro caso deve essere:

$$\frac{d\left(-f\frac{y}{r}+x\omega^2\right)}{dy}=\frac{d\left(f\frac{x}{r}+y\omega^2\right)}{dx}\,.$$

Ora osserviamo che:

$$\frac{d(x\omega^2)}{dy} = 2x\omega\frac{d\omega}{dr}\frac{dr}{dy}$$

e siccome

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi:

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

così:

$$\frac{d(x\omega^2)}{dy} = \frac{2xy}{r}\omega\frac{d\omega}{dr};$$

parimente si trova che:

$$\frac{d(y\omega^2)}{dx} = \frac{2yx}{r}\omega\frac{d\omega}{dr},$$

quindi ne concludiamo che

$$\frac{d(x\omega^2)}{dy} = \frac{d(y\omega^2)}{dx}.$$

La prima delle equazioni di condizione si riduce per conseguenza alla seguente:

$$\frac{d\left(-f\frac{y}{r}\right)}{dy} = \frac{d\left(f\frac{x}{r}\right)}{dx},$$

ossia:

$$\frac{-d\frac{f}{r}}{dr}\frac{dr}{dy}y - \frac{f}{r} = \frac{d\frac{f}{r}}{dr}\frac{dr}{dx}x + \frac{f}{r}$$

e ricordando che

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

e

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$$

si avrà ancora:

$$2\frac{f}{r} + \frac{d\frac{f}{r}}{dr}\frac{x^2+y^2}{r} = 0,$$

ossia:

$$2\frac{f}{r}+\frac{d\frac{f}{r}}{dr}r=0\,,$$

donde si ricava:

$$\frac{d\frac{f}{r}}{\frac{f}{r}}=-2\frac{dr}{r}\,.$$

Integrando questa equazione si trova:

$$\log\frac{f}{r}=-2\log r+\text{cost}\,,$$

ossia rappresentando con $M$ una quantità costante

$$\frac{f}{r}=\frac{M}{r^2}$$

ossia ancora

$$f=\frac{M}{r}\,.$$

Vedesi pertanto che: *nel moto di rotazione di una massa liquida attorno ad un asse, la forza* f, *ossia la differenza tra la forza tangenziale* $\varphi$ *riferita all'unità di massa e l'accelerazione tangenziale* $r\frac{d\omega}{dt}$ *non può altrimente essere funzione del raggio* r *fuorchè inversamente proporzionale al raggio medesimo.*

Per determinare la pressione di un punto qualunque della massa liquida rotante, si ha la seguente espressione della differenziale totale:

$$dp=\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz\,.$$

Sostituendo alle derivate parziali

$$\frac{dp}{dx},\ \frac{dp}{dy},\ \frac{dp}{dz},$$

le espressioni già trovate, si ha:

$$dp = \frac{G}{g}\left\{\begin{array}{l}\left(-f\frac{y}{r} - g \operatorname{sen}\alpha + x\omega^2\right)dx \\ + \left(f\frac{x}{r} + y\omega^2\right)dy + g\cos\alpha\, dz\end{array}\right\}.$$

Sostituendo ad $f$ il valore già trovato $f = \frac{M}{r}$,

ossia

$$f = \frac{M}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

si ha:

$$dp = \frac{G}{g}\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{My}{x^2+y^2} - g \operatorname{sen}\alpha + x\omega^2\right)dx \\ + \left(\frac{Mx}{x^2+y^2} + y\omega^2\right)dy + g\cos\alpha\, dz\end{array}\right\}.$$

Integrando si ottiene:

$$p = \text{cost} + Gz\cos\alpha - Gx \operatorname{sen}\alpha$$
$$+ \frac{G}{g} M \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) + \frac{G}{g}\int \omega^2 (x\,dx + y\,dy),$$

ossia avvertendo che

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr$$

si ha:

$$p = \text{cost} + Gz\cos\alpha - Gx \operatorname{sen}\alpha$$
$$+ \frac{G}{g} M \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) + \frac{G}{g}\int \omega^2 r\,dr\,.$$

L'ultimo termine, cioè: $\frac{G}{g}\int \omega^2 r\,dr$ si potrà eseguire ogni qualvolta sarà data o conosciuta $\omega$ in funzione di $r$.

L'equazione determinatrice della pressione $p$ quando si dia a questa pressione un valore determinato e costante, diviene l'equazione di una superficie di livello. Nel caso particolare in cui

l'asse di rotazione sia verticale e quindi sia $\alpha = 0$, si avrà l'equazione:

$$p = \text{cost} + Gz + \frac{G}{g} M \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) + \frac{G}{g} \int \omega^2 r\, dr,$$

dalla quale, riguardando $p$ come costante, si potrà ricavare l'ordinata $z$ di una superficie di livello espressa in funzione delle due altre coordinate $x$ ed $y$.

Se si vuole che la superficie di livello sia eziandio una superficie di rivoluzione intorno all'asse di rotazione, ossia intorno all'asse delle $z$, l'ordinata $z$ dovrà essere unicamente funzione di $r$, ossia di $\sqrt{x^2 + y^2}$. A questa condizione soddisfanno i diversi termini dell'espressione di $z$ che si può ricavare dalla precedente equazione ad eccezione del termine

$$\frac{M}{g} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right)$$

il quale non soddisfa a tale condizione, salvo quando è nullo per essere il fattore $M = 0$; nel qual caso la forza $f$ è nulla, ossia la accelerazione tangenziale è uguale alla forza tangenziale riferita all'unità di massa.

Vedesi pertanto che: *nel moto rotatorio di una massa liquida attorno ad un asse verticale, le superficie di livello non possono essere superficie di rivoluzione intorno all'asse medesimo, se non quando l'accelerazione tangenziale è uguale alla forza tangenziale riferita all'unità di massa.*

Nel caso particolare in cui il moto rotatorio della massa liquida è uniforme cioè allorquando le molecole liquide che si trovano sopra una medesima circonferenza hanno velocità angolare costante, velocità che può tuttavia variare da circonferenza a circonferenza fluida, le superficie di livello non possono essere superficie di rivoluzione intorno all'asse verticale di rotazione se non quando la forza tangenziale è nulla.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta e legge il seguente lavoro dei signori E. Mattirolo ed E. Monaco,

# SULLA COMPOSIZIONE

DI UN

# DIALLAGIO

## PROVENIENTE DAL DISTRETTO DI SYSSERT

## (Monti Urali).

Il Dottore A. Arzruni, Professore di mineralogia nella Università di Breslavia, inviava tempo fa un campione di diallagio da lui raccolto negli Urali al Professore A. Cossa perchè lo volesse esaminare, e questi con cortese invito ce ne affidava lo studio.

Prima di esporre i risultati delle indagini praticate crediamo necessario di riferire testualmente alcune indicazioni comunicateci dallo stesso Professore Arzruni, le quali chiariscono le condizioni di giacimento di quel minerale, che riesce importante pel suo passaggio al serpentino.

« Il diallagio a larghe lamine fu da me raccolto il 7 Agosto 1879 in una mia escursione nel distretto di Syssert.

Il luogo da cui provengono gli esemplari trovasi all'incirca a 56°, 15 lat. Nord e 77°, 45 long. Est dal meridiano delle isole del Ferro, a Chil. 1 $^1/_4$ circa al Nord dal confine del distretto di Syssert col distretto delle usine di Ufalejsk postovi al Sud nella regione sorgentifera del Bobrowka, uno degli affluenti sulla destra della Ciussovaja occidentale.

Tale località in questi ultimi anni è divenuta celebre per depositi di un granato a base di calce e di ferro (1) di color verde

(1) Il Prof. A. Cossa studiò un granato simile a questo, il quale trovasi nell'amianto delle cave di Franscia in Val Malenco (Valtellina). — Vedi A. Cossa, *Ricerche chimiche e microscopiche su roccie e minerali d'Italia.* Torino, 1881.

contenente cromo, il quale fu dapprima ritenuto per crisolito e, sotto il nome di demantoide, fu poi analizzato da A. Lösch (1), Valler (2) e C. Rammelsberg (3).

La regione è paludosa e di rado la roccia si mostra sporgente per modo che io trovai una sol volta il diallagio e precisamente in un luogo dove vennero fatte dapprima ricerche di oro e poi di granato demantoide.

Ad onta di ciò, secondo tutte le apparenze, la roccia in questa località è abbastanza diffusa, poichè il signor Lösch ne raccolse in varii punti dei dintorni. E poichè ebbi anche sott'occhio degli esemplari gentilmente fornitimi dal signor Lösch, potei convincermi che solamente quella varietà a cui trovasi associato il demantoide presenta una spiccata struttura a larghe lamine.

Questo diallagio mostra una serie di passaggi al serpentino, e la bastite si presenta come stadio intermedio della trasformazione.

Il signor Lösch (4) descrisse questo serpentino col nome di serpentino diallagico, onde indicarne per tal modo l'origine.

Del resto, serpentini affatto simili alla matrice del demantoide, formano lungo il corso del Bobrowka intiere serie di colli che si protendono oltre. Questi serpentini adunque possono provenire tutti dalla roccia diallagica e la loro grande diffusione potrebbe fornire un'altra prova dal non essere isolate le manifestazioni di detta roccia. Da una comunicazione ch'ebbi dal signor Lösch, seppi che trovansi anche associati al diallagio piccoli grani di olivina, la quale può altresì aver contribuito alla formazione del serpentino. Io però non riuscii a constatare con qualche sicurezza la presenza della olivina nè nel diallagio, nè nel serpentino ».

I risultati delle ricerche da noi eseguite sul diallagio di Syssert sono i seguenti.

Nei piccoli campioni esaminati il minerale non si mostrava del tutto omogeneo. In alcuni frammenti coll'aiuto della lente si distinguevano cristallini assai minuti di magnetite; in altri si

(1) Verh. russ. min. Ges. St. Petersburg [2] XIII, 432, 1878. Protokoll d. Sitzung vom 19 April 1877, Ausfürlich in: Neues Jahrb. f. Min. etc. 1879, 785.

(2) Geol. För. Forhandl, IV, nº 6, 184.

(3) Zeitschr. deutsch. geol. Ges. XXIX, 819, 1877.

(4) Verh. russ. min. Ges. St. Petersburg [2] XVI, 299, 1881. Protokoll d. Sitzung vom 7. Januar 1880, Auszugsweise in: Zeitschr., für Kristallogr, V, 591.

notarono alcune piccole plaghe leggermente colorate in verde e che separate e cimentate al cannello diedero indizio manifesto della presenza del cromo, mentrechè, operando colla parte principale dei campioni, la reazione del cromo si manifesta in una intensità molto minore.

Il minerale sulle superficie di più facile sfaldatura presenta quella lucentezza madreperlacea e metalloidea caratteristica del diallagio. In laminette sottili è trasparente e debolmente colorato in grigio verdognolo.

Sottili scheggie cimentate al cannello fondono non troppo facilmente in una massa di color verde grigiastro, poco trasparente ed a superficie liscia. Nella fiamma interna si osserva qualche sobbollimento durante la fusione.

Una sottilissima lamina di sfaldatura esaminata al microscopio presenta disseminato con una certa regolarità lungo le strie (parallele alle direzioni di più facile sfaldatura) un minerale nero, opaco, in cristallini minutissimi, costituito da magnetite ed inoltre poche laminette di ferro micaceo e pochissime granulazioni di ferro cromato.

È importante di notare che le scheggie sottili di minerale che coll'esame microscopico sembrano omogenee, sono fortemente attratte dalla calamita.

Trattando le laminette di sfaldatura con acido cloridrico, questo si colorò intensamente in giallo, e le laminette lavate completamente coll'acido, non sono più attirate dalla calamita ed osservate nuovamente al microscopio, all'infuori della scomparsa della magnetite e del ferro micaceo, non presentano traccie sensibili di alterazione, a segno da poter rilevare ancora distintamente i fenomeni di polarizzazione cromatica e la figura assiale che emerge dalle lamine di diallagio parallele alla più facile sfaldatura.

Il peso specifico del minerale risultò di 3,18 a + 15°.

L'analisi chimica diede i seguenti risultati:

| | |
|---|---|
| Silice . . . . . | 51, 45 |
| Allumina . . . . . | 2, 04 |
| Ossido ferrico . . . . . | 2, 99 |
| Ossido ferroso . . . . . | 2, 13 |
| Calce . . . . . | 21, 47 |
| Magnesia . . . . . | 19, 23 |
| Perdita per calcinazione . | 1, 12 |
| | 100, 43 |

Il minerale contiene inoltre traccie non determinabili di anidride titanica e traccie assai difficilmente determinabili di manganese e di cromo. Qualora si avesse avuto a disposizione maggior quantità di sostanza si sarebbe anche potuto tentare la determinazione del manganese.

La separazione dell'ossido ferroso dall'ossido ferrico fu eseguita col metodo di Doelter, impiegando cioè acido fluoridrico puro con eccesso di acido solforico.

Ciò che presenta di caratteristico questo diallagio si è la sua ricchezza in magnesia che è maggiore di quella che riscontrasi nei diallagi comuni. Questo fatto, a nostro parere, potrebbe stare come indizio importante del passaggio della roccia diallagica al serpentino.

Torino. Laboratorio di Chimica della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, come per le precedenti, le *Osservazioni meteorologiche dei mesi di Marzo ed Aprile* di quest'anno, ed i loro rispettivi Riassunti e Diagrammi, dell'Assistente Dottore Angelo CHARRIER.

**Anno XIX** **1884**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Marzo.

Il valor medio delle pressioni barometriche osservate in questo mese è 37,01, superiore di mm. 1,88 del valor medio degli ultimi diciotto anni.

Il quadro seguente contiene i valori massimi e minimi osservati:

| Giorni del mese. | Massimi. | Giorni del mese | Minimi. |
|---|---|---|---|
| 5 . . . . . | 41,65 | 9 . . . . . | 29,95 |
| 15 . . . . . | 46,46 | 22 . . . . . | 28,92 |
| 23 . . . . . | 35,88 | 24 . . . . . | 28,49. |
| 28 . . . . . | 38,39 | | |

La media delle temperature osservate è di 10°,3, superiore di 2°,3 alla media di Marzo degli ultimi diciotto anni. — Le temperature estreme furono + 2°,3 e + 19°,6; si ebbe la prima nel giorno 8, e la seconda nel giorno 19.

Non si ebbe pioggia nella seconda decade; in un solo della prima, cioè nel giorno 10; ed in due nella terza, cioè nel 25 e nel 31. L'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 21,1.

Nel quadro seguente è indicata la frequenza dei venti:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 13 | 15 | 10 | 7 | 3 | 1 | 2 | 10 | 9 | 6 | 2 | 2 | 0 | 3 | 5 |

**Anno XIX** **1884**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Aprile.

La media delle pressioni barometriche osservate nel mese è 30, 45 ; inferiore di mm. 4, 10 alla media di Aprile degli ultimi diciotto anni.

I minimi ed i massimi osservati durante il mese sono contenuti nella seguente tabella :

| Giorni del mese. | Minimi. | Giorni del mese. | Massimi. |
|---|---|---|---|
| 4 . . . . . | 30,61 | 6 . . . . . | 35,96 |
| 8 . . . . . | 26,77 | 13 . . . . . | 37,54 |
| 18 . . . . . | 20,99 | 22 . . . . . | 30,88 |
| 25 . . . . . | 24,38 | 28 . . . . . | 34,35 . |

La temperatura variò fra $+6^\circ,3$ e $+20^\circ,0$ : estremi che si ebbero rispettivamente nei giorni 12 ed 8. — Il valor medio desunto dalle osservazioni fatte è di $+12^\circ,2$, inferiore di $0^\circ,6$ alla media d'Aprile degli ultimi diciotto anni.

Ventuno furono i giorni con pioggia, e l'acqua raccolta raggiunse l'altezza di mm. 161, 8.

Il quadro seguente dà la frequenza dei venti nelle singole direzioni.

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 17 | 25 | 12 | 10 | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 11 | 0 | 10 | 5 | 4 | 4 |

Gli altri lavori sopra accennati vedranno la luce nel solito fascicolo annuale, che si pubblica per cura dell'Accademia.

In questa adunanza vengono presentati due lavori manonoscritti, uno del sig. Dott. Alessandro PORTIS, intitolato « *Contribuzione alla Ornitolitologia italiana* », l'altro del signor Dott. Giuseppe VICENTINI « *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni alcooliche di alcuni cloruri* ». Questi lavori destinati ad essere inserti nei volumi delle *Memorie* sono consegnati a due Commissioni accademiche incaricate di esaminarli e riferirne in una prossima adunanza.

**Adunanza del 25 Maggio 1884**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Conte Prof. Tommaso SALVADORI, condeputato col Socio Comm. Prof. Michele Lessona ad esaminare la memoria del sig. Dott. Alessandro PORTIS, intitolata « *Contribuzione alla Ornitolitologia italiana* », presentata nella precedente adunanza, legge la seguente

## RELAZIONE.

L'autore delle *Contribuzioni alla Ornitolitologia italiana* ha cercato di fare con questa Memoria il primo tentativo di ricostituzione generale della fauna fossile ornitica italiana. Egli comincia descrivendo avanzi fossili di Gralle eoceniche del Veneto, passa poi ad illustrare una serie di ossa di Palmipede stata rinvenuta anni sono nel miocene di Ceva in Piemonte. Dopo aver accennato ad un' altra specie di Palmipede anteriormente conosciuta, e proveniente dalle ligniti mioceniche della Toscana, completandone la descrizione, l' autore si dilunga ad illustrare minutamente le parti rinvenute dello scheletro di un Gruide scoperto ultimamente in una torbiera presso Peschiera.

Dopo la descrizione delle nuove specie, l' autore fa cenno rapidamente di impronte fisiologiche rinvenute in qualche località piemontese, e che attribuir si possono alla classe degli uccelli; egli termina il suo lavoro con una rapida enumerazione dei resti di uccelli fossili italiani anteriormente descritti od accennati dai diversi autori, che di proposito od incidentalmente si occuparono di tale materia.

La descrizione delle nuove specie proposte in questo lavoro è stata fatta con metodo comparativo, avendo l' autore avuto

sempre sott'occhio gli scheletri o le parti di scheletro degli uccelli più affini ai tipi che veniva cercando di far conoscere. Tal materiale di confronto gli è stato fornito dal Museo di Anatomia comparata di questa Università, ed egli se n'è valso largamente ed efficacemente. Per l'ordine seguito nella descrizione delle singole parti di uno stesso scheletro od osso, per la nomenclatura e per la subordinazione dei caratteri osteologici l'autore ha seguito il metodo proposto ed usato da Alphonse Milne-Edwards nella sua splendida opera intitolata: *Recherches zoologiques et paléontologiques pour servir à l'histoire des Oiseaux fossiles de la France*, tenendo conto anche di lavori successivi dello stesso autore e di numerose memorie e note anteriori e recenti di altri autori su argomenti dello stesso genere.

La Memoria è accompagnata da due tavole in fototipia molto bene riuscite, nelle quali sono rappresentati i pezzi più importanti delle tre specie principalmente descritte: nella prima sono figurati gli avanzi delle due specie più antiche, la *Palaeogrus princeps* e la *Chenornis graculoides*; la seconda è quasi tutta dedicata alla illustrazione della *Grus turfa* delle torbiere di Peschiera.

La importanza dell'argomento trattato dal Dottore Portis in questa sua Memoria, la novità quasi intera del medesimo rispetto all'Italia ed il metodo rigorosamente scientifico adoperato nelle ricerche fatte, inducono di buon grado i sottoscritti a proporre alla Classe la lettura del lavoro del Dottor Portis.

Michele Lessona.

T. Salvadori, *Relatore*.

La Classe accoglie la conclusione dei Commissari, e udita la lettura del lavoro del sig. Dott. A. Portis, ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Comm. Prof. Angelo Genocchi presenta e legge, a nome del signor Comm. Prof. P. Tardy, Socio Corrispondente dell'Accademia, la Memoria seguente:

# RELAZIONI

TRA LE

# RADICI DI ALCUNE EQUAZIONI

## FONDAMENTALI DETERMINANTI.

In questa nota ci proponiamo unicamente dimostrare alcuni teoremi enunciati dal signor W. Thomé in una delle sue Memorie *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari*, sviluppando i calcoli da lui omessi.

Sia data un'equazione differenziale lineare omogenea

$$(1) \ldots\ldots \qquad A(y) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} p_\alpha D^{m-\alpha} y = 0 \ ,$$

in cui supponiamo $p_0 = 1$, e i coefficienti $p_\alpha$ funzioni olomorfe della variabile complessa $x$ nell'intorno del punto $a$ eccetto per $x = a$, in cui divengono infiniti di ordine finito. Essi saranno della forma

$$\frac{P_\alpha(x)}{(x-a)^{\pi_\alpha}} \ ,$$

ove $P_\alpha(x)$ non contiene che potenze positive di $x-a$, e $P_\alpha(a)$ è diversa da zero.

Essendo poi $p_0 = 1$, sarà $\pi_0 = 0$.

Dei numeri interi positivi

$$m \ , \quad \pi_1 + m - 1 \ , \quad \pi_2 + m - 2 \ , \quad \ldots\ldots \quad \pi_{m-1} + 1 \ , \quad \pi_m$$

sia $G$ il più grande, e sia $\pi_h + m - h$ il primo che nella serie si presenti uguale a $G$, di modo che

$$\pi_h + m - h$$

è superiore a

$$m\ ,\quad \pi_1 + m - 1\ ,\quad \ldots\ldots\quad \pi_{h-1} + m - h + 1\ ,$$

e non è inferiore a

$$\pi_{h+1} + m - h - 1\ ,\ \pi_{h+2} + m - h - 2\ .\ \ldots\ldots\ ,\ \pi_{m-1} + 1\ .\ \pi_m\ .$$

Sarà perciò $\pi_h$ maggiore dei numeri

$$h\ ,\quad \pi_1 + h - 1\ ,\quad \pi_2 + h - 2\ ,\quad \ldots\ldots\quad \pi_{h-1} + 1\ ,$$

e maggiore od uguale ai numeri

$$\pi_{h+1} - 1\ ,\ \pi_{h+2} - 2\ ,\ \ldots\ldots\ \pi_{m-1} - m + h + 1\ ;\ \pi_m - m + h\ .$$

Il Thomé chiama $h$ *indice caratteristico* dell'equazione differenziale (1).

L'equazione che relativamente al punto $a$ determina gli esponenti del binomio $x - a$, ai quali appartengono gl'integrali regolari della (1), e che dal Fuchs vien detta *equazione fondamentale determinante*, nel nostro caso si riduce alla (*)

$$(1)'\ldots\quad \sum_{s=0}^{s=m-h} r(r-1)\ldots(r-m+h+s+1)\left[p_{h+s} X^{\pi_h+s}\right]_a = 0\ ,$$

ove per brevità abbiamo posto $X = x - a$, e la notazione $\left[p_{h+s} X^{\pi_h+s}\right]_a$ indica che nel prodotto va fatto $x = a$.

L'equazione differenziale dei fattori integranti della (1) assegnata dal Lagrange, e cui suol darsi anche il nome di *equazione aggiunta* della (1), è

$$(2)\ldots\ldots\qquad A_1(M) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} (-1)^\alpha D^{m-\alpha}(p_\alpha M) = 0\ .$$

---

(*) Thomé, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Giornale di Crelle, v. 74, p. 207.

e cerchiamo la corrispondente equazione fondamentale determinante.

Prima di tutto mettiamo la (2) sotto forma

$$(3) \ldots\ldots \qquad \sum_{k=0}^{k=m} q_k D^{m-k} M = 0 \ ,$$

ove evidentemente deve prendersi $q_0 = 1$.

Per la formola del Leibniz abbiamo

$$D^{m-\alpha}(p_\alpha M) = \sum_{\beta=0}^{\beta=m-\alpha} (m-\alpha)_\beta D^\beta p_\alpha D^{m-\alpha-\beta} M \ ,$$

onde la (2) diviene

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \sum_{\beta=0}^{\beta=m-\alpha} (-1)^\alpha (m-\alpha)_\beta D^\beta p_\alpha D^{m-\alpha-\beta} M = 0 \, .$$

Per ottenere il coefficiente $q_k$ di $D^{m-k} M$ basterà nella seconda sommatoria prendere soltanto il termine corrispondente a $\beta = k - \alpha$, ed estendere la prima da $\alpha = 0$ sino ad $\alpha = k$, giacchè

$$(m-\alpha)_{k-\alpha} = 0 \quad \text{per} \quad \alpha > k \ ;$$

avremo quindi

$$(4) \ldots\ldots \qquad q_k = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k} (-1)^\alpha (m-\alpha)_{k-\alpha} D^{k-\alpha} p_\alpha \, .$$

Da qui si vede che i coefficienti $q_k$ nella (3) sono pure funzioni olomorfe nell'intorno del punto $a$, eccetto per $x = a$, e non contengono parimente potenze negative di $x - a$ che in numero finito. Se chiamiamo $\lambda_k$ il numero $\pi$ corrispondente a $q_k$, è chiaro per la (4) che $\lambda_k$ sarà il più grande dei numeri $\pi_\alpha + k - \alpha$, mentre $\alpha$ va da 0 a $k$, ossia

$$\lambda_k + m - k$$

sarà il più grande dei numeri

$$m \ , \quad \pi_1 + m - 1 \ , \quad \pi_2 + m - 2 \ , \quad \ldots\ldots \quad \pi_k + m - k \ ,$$

e perciò, se $k \lesseqgtr h$, sarà

$$\lambda_k + m - k = \pi_h + m - h \ ,$$

per cui

$$\lambda_h = \pi_h \ , \qquad \lambda_k = \pi_h + k - h \ .$$

L'indice caratteristico della (2) è dunque uguale a quello della (1).

Segue da ciò che la sua equazione fondamentale determinante, sarà

$$(2)' \ldots \quad \sum_{s=0}^{s=m-h} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+h+s+1)\left[q_{h+s} X^{\pi_h+s}\right]_a = 0 \ .$$

Poniamo nella (4) $k = h + s$, ed osserviamo che per essere

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha}{X^{\pi_\alpha}} \ ,$$

si à

$$D^{h+s-\alpha} p_\alpha = (-1)^{h+s-\alpha} \pi_\alpha(\pi_\alpha+1)\ldots(\pi_\alpha+h+s-\alpha-1)\frac{P_\alpha}{X^{\pi_\alpha+h+s-\alpha}} + \ldots ,$$

ove i termini che seguono nel 2° membro contengono ne' loro denominatori potenze di $X$ con esponenti minori di $\pi_\alpha + h + s - \alpha$, e che dovendo moltiplicare $q_{h+s}$ per $X^{\pi_h+s}$, e poi fare $x = a$, spariranno tutti i termini corrispondenti ad $\alpha < h$, perchè $\pi_h + s$ è più grande di

$$\pi_1 + h + s - 1 \ , \quad \pi_2 + h + s - 2 \ , \quad \ldots\ldots \quad \pi_{h-1} + s + 1$$

e spariranno ugualmente tutti i termini della derivata $D^{h+s-\alpha} p_\alpha$ eccetto il primo, per ogni valore di $\alpha > h$, perchè $\pi_\alpha + s$ è maggiore od uguale ai numeri

$$\pi_{h+1} + s - 1 \ , \quad \pi_{h-2} + s - 2 \ , \quad \ldots\ldots \quad \pi_m + s - m + h \ ,$$

e quindi si otterrà, ponendo $h + \mu$ invece di $\alpha$,

$$\left[q_{h+s} X^{\pi_h+s}\right]_a = \sum_{\mu=0}^{\mu=s} (-1)^{h+s} (m-h-\mu)_{s-\mu} \pi_{h+\mu}(\pi_{h+\mu}+1)\ldots$$
$$\ldots(\pi_{h+\mu}+s-\mu-1)\left[p_{h+\mu} X^{\pi_{h+\mu}}\right]_a \ .$$

Ora, siccome

$$\pi_h + \mu \gtreqless \pi_{h+\mu} \ ,$$

la quantità $$[p_{h+\mu} X^{\pi_h + \mu}]_a \ ,$$

sarà nulla o diversa da zero, secondo che si à

$$\pi_h + \mu > \pi_{h+\mu} \ , \quad \text{ovvero} \quad \pi_h + \mu = \pi_{h+\mu} \ ;$$

perciò nella precedente espressione possiamo invece di $\pi_{h+\mu}$ mettere $\pi_h + \mu$, ossia

$$G - m + h + \mu \ ,$$

essendo $$G = \pi_h + m - h \ ,$$

e otterremo così, mutando i segni dei fattori contenenti $G$,

$$[q_{h+s} X^{\pi_{h+s}}]_a =$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=s} (-1)^{h+\mu} (m-h-\mu)_{s-\mu} (m-h-\mu-G)(m-h-\mu-G-1)\ldots(m-h-G-s+1);$$

$$[p_{h+\mu} X^{\pi_h + \mu}]_a \ .$$

Sostituendo nella (2)′ essa diverrà

$$(5)\ldots \quad \sum_{s=0}^{s=m-h} \sum_{\mu=0}^{\mu=s} (-1)^{\mu} (m-h-\mu)_{s-\mu} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+h+s+1);$$

$$(m-h-\mu-G)(m-h-\mu-G-1)\ldots(m-h-G-s+1)[p_{h+\mu} X^{\pi_h+\mu}]_a = 0 \ ;$$

e rappresentando con $Q_{h+\tau}$ il coefficiente di $[p_{\mu+\tau} X^{\pi_h+\tau}]_a$ nello sviluppo di questa equazione, può mettersi sotto la forma

$$(6)\ldots \quad \sum_{\tau=0}^{\tau=m-h} Q_{h+\tau} [p_{h+\tau} X^{\pi_h+\tau}]_a = 0 \ .$$

Per avere il valore di $Q_{h+\tau}$ bisognerà nella (5) della seconda sommatoria prendere il solo termine corrispondente a $\mu = \tau$,

ed estendere la prima sommatoria da $s=\tau$ ad $s=m-h$, e fatto poscia $s=\tau+\gamma$ sarà

$$Q_{h+\tau}=\sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-h-\tau}(-1)^{\tau}(m-h-\tau)_{\gamma}\rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+h+\tau+\gamma+1)$$
$$(m-h-\tau-G)(m-h-\tau-G-1)\ldots(m-h-\tau-G-\gamma+1).$$

Ma per una formola nota (*) si à

$$(\mathrm{K})\ldots\sum_{t=0}^{t=c}(c)_t u(u-1)\ldots(u-c+t+1).v(v-1)\ldots(v-t+1)=$$
$$(u+v)(u+v-1)\ldots(u+v-c+1),$$

quindi risulta

$$Q_{h+\tau}=(-1)^{\tau}(\rho+m-h-\tau-G)(\rho+m-h-\tau-G-1)\ldots(\rho-G+1)$$
$$=(-1)^{m-h}(G-\rho-1)(G-\rho-2)\ldots(G-\rho-m+h+\tau),$$

e la (6) finalmente si cambia nella

$$(7)\ldots\quad\sum_{\tau=0}^{\tau=m-h}(G-\rho-1)(G-\rho-2)\ldots(G-\rho-m+h+\tau)\left[p_{h+\tau}X^{\pi_{h+\tau}}\right]_a=0,$$

che è la cercata equazione fondamentale determinante (2)′ della (2).

Paragonandola con quella della (1) cioè con la (1)′ si vede che risulta da questa cambiando $r$ in $G-\rho-1$; si à dunque (**):

Teorema I°. Se indichiamo con $r_1$, $r_2$, $r_{m-h}$ le radici dell'equazione fondamentale determinante (1)′ della (1) $A(y)=0$, quelle dell'equazione fondamentale determinante (2)′ della sua aggiunta (2) $A_1(M)=0$, sono

$$\rho_1=G-1-r_1,\quad \rho_2=G-1-r_2,\quad \ldots\ldots\quad \rho_{m-h}=G-1-r_{m-h},$$

essendo $G$ il più grande de' numeri appartenenti ai coefficienti $p$.

---

(*) Cauchy, *Analyse algébrique*, p. 100.
(**) Giornale di Crelle, t. 76, p. 284.

Richiamiamo ora alcune nozioni fondamentali.

Conoscendo un integrale particolare $M_1$ della equazione differenziale aggiunta

$$(2) \ldots\ldots \qquad A_1(M) = 0$$

la

$$(1) \ldots\ldots \qquad A(y) = 0$$

si riduce, e diviene

$$(8) \ldots\ldots \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} p_\alpha^{(1)} D^{m-\alpha-1} y = \frac{c_m}{M_1} ,$$

ove $c_m$ è una costante, e si à la relazione

$$(9) \ldots\ldots \qquad p_\alpha = p_\alpha^{(1)} + D p_{\alpha-1}^{(1)} + p_{\alpha-1}^{(1)} D \log M_1 ,$$

$$(\alpha = 1 , 2 , \ldots m) ,$$

intendendo che sia

$$p_0^{(1)} = 1 , \quad p_m^{(1)} = 0 .$$

L'equazione

$$(10) \ldots\ldots \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} p_\alpha^{(1)} D^{m-\alpha-1} y = 0 ,$$

à tutti i suoi integrali comuni con la (1), e la (8) è un integrale primo della (1).

La (2) ponendo

$$M = M_1 \int \frac{M^{(1)}}{M_1} dx$$

si riduce alla

$$(11) \ldots\ldots \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (-1)^\alpha D^{m-\alpha-1} (p_\alpha^{(1)} M^{(1)}) = 0 .$$

Se supponiamo noti $k$ integrali della (2)

$$M_1 , \quad M_2 = M_1 \int \frac{M^{(1)}}{M_1} dx , \quad M_3 = M_1 \int dx \frac{M^{(1)}}{M_1} \int \frac{M^{(2)}}{M^{(1)}} dx ,$$

$$M_k = M_1 \int dx \frac{M^{(1)}}{M_1} \ldots \int \frac{M^{(k-1)}}{M^{(k-2)}} dx ,$$

e operiamo successivamente col metodo di riduzione impiegato per passare dalla (2) alla (11), perverremo alla equazione

$$(12)\ldots \quad B_1(M^{(k)}) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-k} (-1)^\gamma D^{m-k-\gamma}(p_\gamma^{(k)} M^{(k)}) = 0 .$$

D'altra parte partendo dall'equazione del 1° ordine, cui soddisfa $M^{(k-1)}$

$$D S^{(k-1)} - g_1^{(k-1)} S^{(k-1)} = 0 ,$$

per cui

$$g_1^{(k-1)} = D \log M^{(k-1)} ,$$

e servendosi delle relazioni (9), in cui si faccia

$$M_1 = M^{(k-2)} , \qquad p_\alpha^{(1)} = g_\alpha^{(k-1)} , \qquad p_\alpha = g_\alpha^{(k-2)} ,$$

si consegue l'equazione del 2° ordine

$$D^2 S^{(k-2)} - D(g_1^{(k-2)} S^{(k-2)}) + g_2^{(k-2)} S^{(k-2)} = 0 ,$$

che à per integrali

$$M^{(k-2)} \quad \text{e} \quad M^{(k-2)} \int \frac{M^{(k-1)}}{M^{(k-2)}} dx ,$$

e così proseguendo si arriverà all'equazione

$$(13)\ldots \quad \sum_{\beta=0}^{\beta=k} (-1)^\beta D^{(k-\beta)}(g_\beta S) = C_1(S) = 0 ,$$

la quale avrà per integrali $M_1$, $M_2$, ... $M_k$.

Le relazioni (9) divengono in generale

$$(14)\ldots\ldots \quad p_\alpha^{(c)} = p_\alpha^{(c+1)} + D p_{\alpha-1}^{(c+1)} + p_{\alpha-1}^{(c+1)} D \log M^{(c)} ,$$

$$(c = 0 , 1 , 2 , \ldots k-1) ,$$

$$(\alpha = 1 , 2 , \ldots m-c) ,$$

intendendo che sia

$$M^{(0)} = M_1 , \qquad p_0^{(c+1)} = 1 , \qquad p_{m-c}^{(c+1)} = 0 .$$

Analoghe relazioni si ànno per i coefficienti $g$.

Intanto la (1) per mezzo di quei $k$ fattori integranti si riduce alla

$$(15)\ldots\ldots \qquad \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-k} p_\gamma^{(k)} D^{m-k-\gamma} y =$$

$$\frac{c_{m-k-1}}{M^{(k-1)}} + \frac{c_{m-k+2}}{M^{(k-1)}} \int \frac{M^{(k-1)}}{M^{(k-2)}} dx + \ldots + \frac{c_m}{M^{(k-1)}} \int dx \frac{M^{(k-1)}}{M_{(k-2)}} \ldots \int \frac{M^{(1)}}{M_1} dx \ ,$$

che per brevità scriveremo

$$(16)\ldots\ldots \qquad B(y) = w \ .$$

Questa equazione è un integrale $(k)^{\text{mo}}$ della (1), e, per la nota reciprocità tra gl'integrali di un'equazione e quelli dell'equazione de' suoi fattori integranti (*), il secondo membro $w$ è l'integrale completo dell'aggiunta dell'equazione (13), cioè della

$$(17)\ldots\ldots \qquad \sum_{\beta=0}^{\beta=k} g_\beta D^{k-\beta} s = C(s) = 0 \ ,$$

mentre il primo uguagliato a zero

$$(18)\ldots\ldots \qquad \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-k} p_\gamma^{(k)} D^{m-k-\gamma} y = B(y) = 0 \ ,$$

che è l'aggiunta della (12), à tutti gl'integrali comuni con la (1).

Adesso importa esprimere i coefficienti $p$ per mezzo dei $p^{(k)}$ e dei $g$.

Servendosi delle relazioni (14) il Thomé à trovato per induzione la formola, che poi à dimostrato rigorosamente col solito metodo di conchiudere da un indice al successivo. Però vi si può pervenire molto più semplicemente con altre considerazioni.

È chiaro che l'equazione

$$C\big(B(y)\big) = \sum_{\beta=0}^{\beta=k} g_\beta D^{k-\beta} \left( \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-k} p_\gamma^{(k)} D^{m-k-\gamma} y \right) = 0 \ ,$$

(*) Thomé, *Zur Theorie* etc., Giorn. de Crelle, t. 76, p. 277.

è un' equazione differenziale lineare di ordine $m$, la quale è soddisfatta da tutti gl'integrali della (1). Infatti per quelli che sono comuni alla (1) e alla

$$(18) \ldots\ldots \qquad B(y)=0 \ ,$$

si à evidentemente

$$C(0)=0$$

e tutti gli altri della

$$(16) \ldots\ldots \qquad B(y)=w \ ,$$

che verificano parimenti la (1), dànno

$$C(w)=0$$

perchè $w$ è l'integrale generale della (17).

Pertanto l'equazione

$$C\big(B(y)\big)=0$$

deve coincidere con la

$$A(y)=0 \ ,$$

avremo dunque

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} p_\alpha D^{m-\alpha} y = \sum_{\beta=0}^{\beta=k} g_\beta \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-k} D^{k-\beta}(p_\gamma^{(k)} D^{m-k-\gamma} y)$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\beta=k} g_\beta \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-k} \sum_{\delta=0}^{\delta=k-\beta} (k-\beta)_\delta D^\delta p_\gamma^{(k)} D^{m-\gamma-\delta-\beta} y \ .$$

Il coefficiente di $D^{m-\alpha} y$ nel 2° membro si otterrà prendendo della sommatoria rispetto a $\gamma$ il solo termine corrispondente a

$$\gamma=\alpha-\delta-\beta \ ,$$

onde sarà

$$(19) \ldots\ldots \qquad p_\alpha = \sum_{\beta=0}^{\beta=k} g_\beta \sum_{\delta=0}^{\delta=k-\beta} (k-\beta)_\delta D^\delta p_{\alpha-\beta-\delta}^{(k)} \ ,$$

ove s'intenda che sia $p_0^{(k)}=1$ e $p^{(k)}$ con indice negativo o con indice superiore a $m-k$ uguale a zero, e questo è appunto il valore dato con altra notazione dal Thomé (*). I coefficienti $p^{(k)}$

(*) Giornale di Crelle, t. 76, p. 281.

e $g$ sono come i $p$ funzioni olomorfe nell'intorno del punto $a$, e per $x=a$ divengono infiniti di ordine finito. Siano $\pi^{(k)}$ e $\omega$ per essi gli esponenti analoghi a' $\pi$; i numeri appartenenti ai coefficienti $p_\alpha$ saranno

$$\pi_\alpha + m - \alpha \ , \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ \ldots\ m) \ ,$$

quelli dei coefficienti $p_\gamma^{(k)}$

$$\pi_\gamma^{(k)} + m - k - \gamma \ , \qquad (\gamma = 0,\ 1,\ \ldots\ m-k) \ ,$$

e quelli dei coefficienti $g_\beta$

$$\omega_\beta + k - \beta \ , \qquad (\beta = 0,\ 1,\ \ldots\ k) \ .$$

Se $h'$ è l'indice caratteristico delle equazioni (17) e (13) e $h''$ quello delle equazioni (18) e (12) risulta dalla formola (19), come à mostrato il Thomé, che l'indice caratteristico delle equazioni (1) e (2) è

$$h = h' + h'' \ ,$$

e di più se rappresentiamo con $G$, $\eta$, $\theta$, i più grandi dei numeri appartenenti ai coefficienti $p$, $g$, $p^{(k)}$ si à

$$G = \eta + \theta$$

e per conseguenza

$$\pi_h = \pi_{h''}^{(k)} + \omega_{h'} \ .$$

L'equazione fondamentale determinante della (17) è

$$(17)' \ldots \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-h'} r'(r'-1)\ldots(r'-k+h'+\lambda+1)\left[g_{h'+\lambda} X^{\omega_{h'+\lambda}}\right]_\alpha = 0 \ ,$$

e quella della (18)

$$(18)' \ldots \sum_{\mu=0}^{\mu=m-k-h''} r''(r''-1)\ldots(r''-m+k+h''+\mu+1)\left[p_{h''+\mu}^{(k)} X^{\pi_{h''+\mu}^{(k)}}\right]_\alpha = 0 \ .$$

Prendendo dalla (19) il valore di $p_{h+s}$, moltiplicando i due membri per

$$X^{\pi_{h+s}} = X^{\omega_{h'} + \pi_{h''}^{(k)} + s} \ ,$$

e poi facendo $x=a$ è chiaro che spariranno nel 2° membro tutti i termini contenenti $g$ con indice minore di $h'$, giacchè essendo

$$\omega_{h'} > \omega_\beta + h' - \beta \ , \quad \text{se} \quad \beta < h' \ ,$$

$$\pi^{(k)}_{h''} + s \gtreqless \pi^{(k)}_{h+s-\beta-\delta} + h'' - h + \beta + \delta \ ,$$

si à
$$\omega_{h'} + \pi^{(k}_{h''} + s > \omega_\beta + \pi^{(k)}_{h+s-\beta-\delta} + \delta \ ,$$

per cui ponendo

$$\beta = h' + \lambda$$

avremo

(20) . . . . .
$$[p_{h+s} X^{\pi_h + s}]_a =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-h'} \sum_{\delta=0}^{\delta=k-h'-\lambda} (k-h'-\lambda)_\delta [g_{h'+\lambda} X^{\omega_{h'}+\lambda}]_a \left[ D^\delta p^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} X^{\pi^{(k)}_{h''}+s-\lambda} \right]_a .$$

Ponendo per la derivata il suo sviluppo ed osservando che

$$\pi^{(k)}_{h''} + s - \lambda \gtreqless \pi_{h''+s-\lambda-\delta} + \delta \ ,$$

resterà

$$\left[ D^\delta p^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} X^{\pi^{(k)}_{h''}+s-\lambda} \right]_a$$

$$= (-1)^\delta \pi^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} \left( \pi^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} + 1 \right) \ldots \left( \pi^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} + \delta - 1 \right) \left[ p^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} X^{\pi^{(k)}_{h''}+s-\lambda-} \right.$$

e siccome questa espressione si annulla o è diversa da zero secondo che si à

$$\pi^{(k)}_{h''} + s - \lambda - \delta > \quad \text{od} \quad = \pi^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} \ ,$$

nel sostituire nella (20) possiamo invece di $\pi^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta}$ mettere $\pi^{(k)}_{h''} + s - \lambda - \delta$ ossia

$$\theta - m + k + h'' + s - \lambda - \delta \ ,$$

ed allora la (20) si cambierà nella

$$\left[ p_{h+s} X^{\pi_h + s} \right]_a = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-h'} \sum_{\delta=0}^{\delta=k-h'-\lambda} (k-h'-\lambda)_\delta \left[ g_{h'+\lambda} X^{\omega_{h'}+\lambda} \right]_a$$

$$\times (m-k-h''-s+\lambda-\theta+\delta)(m-k-h''-s+\lambda-\theta+\delta-1) \ldots\ldots$$

$$\ldots (m-k-h''-s+\lambda-\theta+1) \left[ p^{(k)}_{h+''s-\lambda-\delta} X^{\pi^{(k)}_{h''}+s-\lambda-\delta} \right]_a .$$

L'equazione (1)' perciò diverrà

$$\sum_{s=0}^{s=m-h} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-h'} \sum_{\delta=0}^{\delta=k-h'-\lambda} r(r-1)\dots(r-m+h+s+1)\left[g_{h'+\lambda} X^{\omega_{h'+\lambda}}\right]_a$$

$$\times (k-h'-\lambda)_\delta (m-k-h'-s+\lambda-\theta+\delta)(m-k-h''-s+\lambda-\theta+\delta-1)\dots$$

$$\dots(m-k-h''-s+\lambda-\theta+1)\left[p^{(k)}_{h''+s-\lambda-\delta} X^{\pi^{(h)}_{h''}+s-\lambda-\delta}\right]_a = 0 .$$

Per avere la parte che contiene il fattore $\left[p^{(k)}_{h''+\mu} X^{\pi^{(k)}_{h''}+\mu}\right]_a$ dovremo prendere dalla sommatoria rispetto ad $s$ il solo termine corrispondente a

$$s = \mu + \lambda + \delta ,$$

e perchè nei limiti delle somme è sempre

$$k + h'' \geqq h + \lambda + \delta ;$$

questa parte potrà scriversi così:

$$r(r-1)\dots(r-m+k+h''+\mu+1)\left[p^{(k)}_{h''+\mu} X^{\pi^{(k)}_{h''}+\mu}\right]_a$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-h'} \left[g_{h'+\lambda} X^{\omega_{h'+\lambda}}\right]_a \sum_{\delta=0}^{\delta=k-h'-\lambda} (k-h'-\lambda)_\delta ;$$

$$(r-m+k+h''+\mu)(r-m+k+h''+\mu-1)\dots(r-m+h+\mu+\lambda+\delta+1),$$

$$(m-k-h''-\mu-\theta)(m-k-h''-\mu-\theta-1)\dots(m-k-h''-\mu-\theta-\delta+1),$$

e applicando qui di nuovo la nota formola ($K$) e avuto riguardo che i valori estremi di $\mu$ sono 0 e $m-k-h''$, l'equazione (1)' sarà finalmente trasformata nella

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m-k-h''} r(r-1)\dots(r-m+k+h''+\mu+1)\left[p^{(k)}_{h''+\mu} X^{\pi^{(k)}_{h''}+\mu}\right]_a$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-h'} (r-\theta)(r-\theta-1)\dots(r-\theta-k+h'+\lambda+1)\left[g_{h'+\lambda} X^{\omega_{h'+\lambda}}\right]_a = 0 ;$$

la quale ci mostra che la (1)' è il prodotto delle due equazioni (18)' e (17)' quando siasi posto nella (18)': $r$ invece di $r''$, e nella (17)' $r-\theta$ invece di $r'$. Dunque

TEOREMA 2°. Le radici della (1)' sono le radici della (18)' invariate, e quelle della (17)' aumentate del più grande dei numeri appartenenti ai coefficienti $p^{(k)}$. Indicando con $r_1''$, $r_2''$, ... $r''_{m-k-h''}$ le radici della (18)' e con $r_1'$, $r_2'$ ... $r'_{k-h'}$ quelle della (17)', le radici dell'equazione fondamentale determinante della (1) saranno

$$r_1'', \quad r_2'', \quad \ldots \quad r''_{m-k-h''}, \quad r_1'+\theta, \quad r_2'+\theta_1, \quad \ldots \quad r'_{k-h'}+\theta .$$

Se ora consideriamo le equazioni fondamentali determinanti delle aggiunte della (1), della (17) e della (18) cioè delle equazioni differenziali (2), (13) e (12), che diremo (2)', (13)' e (12)', sappiamo pel Teorema 1° che le radici della (2)' sono

$$G-r_1-1, \quad G-r_2-1, \quad \ldots\ldots, \quad G-r_{m-h}-1,$$

ossia pel Teorema 2°:

$$G-r_1''-1, \quad G-r_2''-1, \quad \ldots\ldots \quad G-r''_{m-k-h''}-1,$$
$$G-r_1'-\theta-1, \quad G-r_2'-\theta-1, \quad \ldots\ldots \quad G-r'_{k-h'}-\theta-1,$$

quelle della (13)'

$$\eta-r'_1-1, \quad \eta-r'_2-1, \quad \ldots\ldots \quad \eta-r'_{k-h'}-1,$$

e quelle della (12)'

$$\theta-r_1''-1, \quad \theta-r''_2-1, \quad \ldots \quad \theta-r''_{m-k-h''}-1$$

ossia, poichè $\qquad G=\eta+\theta$
sono:

$$G-\theta-r_1'-1, \quad G-\theta-r'_2-1, \quad \ldots \quad G-\theta-r'_{k-h'}-1,$$

per la (13)', e

$$G-\eta-r_1''-1, \quad G-\eta-r_2''-1, \quad \ldots \quad G-\eta-r''_{m-k-h''}-1$$

per la (12)', onde:

TEOREMA 3°. Le radici dell'equazione fondamentale determinante (2)' sono quelle della (13)' invariate, e quelle della (12)', aumentate del più grande dei numeri appartenenti ai coefficienti $g$ (*).

(*) THOMÉ, Giornale di Crelle, t. 76, p. 285.

Il Socio Comm. Prof. E. D'Ovidio presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. Gino Loria,

# INTORNO ALLA GEOMETRIA
SU UN
# COMPLESSO TETRAEDRALE.

Scopo del presente scritto è di indicare una via per istudiare la geometria su un complesso tetraedrale e di mostrare alcuni risultati che per essa si possono ottenere. La base del metodo seguito sta in una rappresentazione del complesso tetraedrale sull'ordinario spazio punteggiato, rappresentazione che è già stata indicata da altri sotto forma più o meno diversa (*), ma di cui non credo sia ancora stata posta in evidenza la grande fecondità. Le applicazioni che espongo mi sembrano sufficienti a provocare un giudizio favorevole a tale metodo: tuttavia, colla rappresentazione indicata è così semplice il modo di passare da una figura obbiettiva alla sua imagine, che è ragionevole supporre che altre conseguenze più importanti possano venir tratte col suo mezzo.

Debbo avvertire che, dopochè le presenti ricerche erano state istituite e avevano raggiunto un certo grado di sviluppo, mi venne fatto di vedere che Klein e Lie avevano indicato (**) un metodo analogo a quello da me usato come opportunissimo per lo studio della geometria su un complesso tetraedrale e che il Lie aveva enunciati alcuni teoremi (***) che a me pure si presentarono e che si trovano in parte anche nel citato lavoro del Weiler.

---

(*) Cfr. specialmente: Reye, *Die Geometrie der Lage*, II. Bd., p. 145, 1880. Weiler, *Eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum*. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. XXII, p. 261, 1877. Bertini, *Sulla congruenza di 2° ordine, 2ª classe e 1ª specie dotata soltanto di superficie focale*. Transunti della R. Acc. dei Lincei, Novembre, 1879.

(**) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. LXX, p. 1222 e 1275, 1870.

(***) V. la memoria: *Ueber die Reciprocität-Verhältnisse des* Reye-*schen Complexes*. Gött. Nachrichten, 1870, p. 53.

## § 1.

*Generazione e rappresentazione di un complesso tetraedrale.*

1. Fra i punti d'uno spazio $S$ e quelli d'uno spazio $S'$ si supponga esistere una corrispondenza proiettiva qualunque determinata da cinque coppie $P_\alpha P_\alpha'$ ($\alpha = 1,\ldots,5$) di elementi omologhi. Le rette $p'$ che uniscono le coppie $P, P'$ di punti corrispondenti dei due spazii formano una varietà a tre dimensioni, che, com'è noto (*), è un complesso di secondo grado $C'_2$ avente la superficie singolare costituita, come luogo, dai piani, e, come inviluppo, dai punti uniti della data corrispondenza proiettiva, e che può anche definirsi quale luogo delle rette di $S$ che secano le loro corrispondenti in $S'$: esso si suol chiamare *complesso tetraedrale* (**).

2. Ad ogni punto $P$ di $S$ corrisponde in generale una determinata retta $p'$ del complesso, che è la congiungente del punto $P$ col suo omologo $P'$ in $S'$. Viceversa ad ogni retta $p'$ del complesso $C_2'$ corrisponde un determinato punto di $S$, il quale non è che il punto d'intersezione di $p'$ colla retta che questa, considerata in $S'$, ha per omologa in $S$.

Per conseguenza si può dire che il complesso tetraedrale $C_2'$ è rappresentato univocamente sui punti di $S$: ogni punto di $S$ è imagine della retta del complesso uscente da esso, ogni retta $p'$ del complesso $C_2'$ ha per imagine quel punto di $p'$ il cui omologo in $S'$ sta su $p'$. È utile considerare separato lo spazio $S$ (*spazio rappresentativo*) dallo spazio $S'$ (*spazio del complesso*) perchè una stessa figura si comporta diversamente secondochè vien considerata in $S$ o in $S'$.

---

(*) Cfr. Reye, l. c., p. 135.

(**) È bene avvertire fin d'ora che, affinchè il complesso tetraedrale non degeneri in due lineari, basta (cfr. una nota dell'A. *Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazii* inserita nel vol. 22, p. 1, del *Giornale di matematiche*) che gli elementi uniti della corrispondenza siano in numero finito, e non è necessario di supporli distinti. Spesso accadrà nel discorso di parlare di 4 punti o di 4 piani uniti: notiamo espressamente che con ciò non escludiamo che due o più di essi possano venire a coincidere in direzioni determinate.

## § 2.

### *Elementi eccezionali della rappresentazione.*

3. Siccome su una varietà lineare non si possono rappresentare proiettivamente che varietà lineari, e siccome lo spazio punteggiato $S$ è una varietà lineare mentre non è tale il complesso $C_2'$, così la corrispondenza ora stabilita deve avere degli elementi eccezionali. Quali essi siano, scaturisce dalle considerazioni seguenti:

*a*) Siccome un punto d'uno de' piani uniti della corrispondenza considerato in $S$ ha per omologo in $S'$ un punto del piano stesso, così un punto d'un tal piano è imagine d'una retta di $C_2'$ posta in esso piano; fra i punti d'un piano unito e le rette corrispondenti esiste una corrispondenza quadratica.

*b*) A un punto dell'intersezione di due piani uniti corrisponde in $C_2'$ questa intersezione (che è una retta doppia di $C_2'$).

*c*) A un punto unito della corrispondenza corrisponde una retta qualunque uscente da esso.

Viceversa:

*a'*) Una retta qualunque d'un piano unito è rappresentata da un punto del piano stesso; fra le rette d'un piano unito e le loro imagini esiste una corrispondenza quadratica.

*b'*) A una retta doppia di $C_2'$ corrisponde un punto qualunque di essa.

*c'*) Una retta uscente, da punto unito della corrispondenza ha per imagine il punto stesso.

Così resta stabilito, che i punti uniti della corrispondenza proiettiva, e le loro congiungenti a due a due, sono gli unici elementi eccezionali della rappresentazione. Imprendiamo ora lo studio di questa, cioè stabiliamo la connessione fra le congruenze e le rigate di $C_2'$, e le superficie e le curve che le rappresentano.

## § 3.

### *Rappresentazione degli enti geometrici posti nello spazio del complesso.*

4. Osserviamo anzitutto, che se il punto $P$ descrive una punteggiata sulla retta $r$, il corrispondente $P'$ descriverà una punteggiata proiettiva, e quindi la retta $(PP' \equiv) p'$ corrispondente descriverà un sistema $\rho_2'$ di generatrici d'una quadrica.

Ciò posto, sia $C'_p$ un complesso di grado $p$ dello spazio $S'$: esso seca $C_2'$ in una congruenza di grado $2p$ che chiameremo $\Gamma'_{2p,2p}$, le cui rette saranno rappresentate dai punti d'una superficie $\gamma$; l'ordine di questa è uguale al numero de' suoi punti posti su una retta arbitraria $r$ di $S$: ora i punti di $r$ sono imagini delle generatrici di un sistema d'una quadrica $\rho_2'$, le $2p$ rette, che $\rho_2'$ ha comuni con $C_p'$ sono le imagini dei punti in cui $\gamma$ è secata da $r$; dunque questi sono in numero di $2p$, cioè $\gamma$ è una superficie d'ordine $2p$ che indicheremo con $\gamma_{2p}$. Ogni punto unito della corrispondenza proiettiva è centro d'un cono d'ordine $p$ le cui generatrici appartengono al complesso $C'_p$ e quindi alla congruenza $\Gamma'_{2p,2p}$: tutte queste generatrici hanno per imagini quel punto unito, quindi $\gamma_{2p}$ contiene questo punto. Per trovare l'ordine di molteplicità di tal punto per $\gamma_{2p}$ considereremo una retta $r$ uscente da esso; se un punto $P$ percorre $r$, l'omologo descriverà una retta $r'$ avente comune con quella il punto unito considerato e quindi la retta $p'$ genererà un fascio di raggi; siccome in questo esistono $p$ rette del complesso, così $r$ seca $\gamma_{2p}$ in $p$ punti esterni a quel punto unito, epperò questo è un punto $p$-plo della superficie. Concludiamo pertanto:

*La congruenza di grado* 2p *in cui il complesso tetraedrale è secato da un complesso di grado* p *è rappresentata da una superficie d'ordine* 2p *avente un punto* p*-plo in ogni punto unito della corrispondenza proiettiva.*

5. In particolare:

*Alle congruenze di secondo grado, in cui il complesso tetraedrale è secato dai complessi lineari del suo spazio, corrispondono le quadriche passanti pei punti uniti.*

Siccome poi le congruenze di 2° grado di $C'_2$ corrispondono univocamente ai complessi lineari di $S'$, così potremo anche dire

che agli $\infty^5$ complessi lineari di $S'$ corrispondono (in un certo senso) univocamente le $\infty^5$ quadriche passanti pei punti uniti (*). Vedremo più avanti (n. 8) come siano, in particolare, rappresentate le congruenze determinate su $C'_2$ dai complessi lineari speciali di $S'$ (cioè quali siano le quadriche che corrispondono, in quel senso, alle rette di $S'$), ma intanto notiamo, come conseguenza dell'ultimo teorema, che:

*Alla rigata di quarto grado o alle quattro rette in cui il complesso tetraedrale è secato da due o tre complessi lineari corrispondono risp. una quartica gobba di* 1ª *specie passante pei punti uniti della corrispondenza o una quaterna di punti formanti con questi un'ottupla di punti associati.*

6. Se il punto $P$ descrive in $S$ un piano $\pi$, il punto $P'$ descriverà in $S'$ una superficie $\pi'$ pure piana, epperò la retta $p'$ corrispondente a $P$ genererà una congruenza di 1ª classe e 3° ordine (**) che indicheremo con $\Pi'_{3,1}$.

Sia ora $\sigma'$ un piano qualunque dello spazio $S'$; le rette di $C'_2$ poste in $\sigma'$ inviluppano una conica le cui tangenti corrispondono univocamente ai punti d'una certa curva di $S$: qual è l'ordine di questa curva? Esso è uguale al numero dei punti in cui essa è secata da un piano qualunque $\pi$ di $S$, epperò è anche uguale al numero delle rette della congruenza $\Pi'_{3,1}$ che toccano la conica di $C'_2$ posta in $\sigma'$ cioè (giacchè quella congruenza sta in $C'_2$) al numero delle rette di $\Pi'_{3,1}$ poste in $\sigma'$, vale a dire 1. Dunque *le coniche di* $C'_2$ *sono rappresentate da rette di* S. Siccome poi le coniche di $C'_2$ corrispondono univocamente ai piani di $S'$ così si può anche dire che gli $\infty^3$ piani di $S'$ sono rappresentati da altrettante rette di $S$.

7. La conclusione ottenuta al n° prec. si può trarre con un altro ragionamento che permette di trovare qual sia il luogo delle $\infty^3$ rette di $S$ corrispondenti ai piani di $S'$. A una retta $r$ di $S$ corrisponde in generale il sistema di generatrici d'una quadrica (n. 4) avente per direttrici $r$ e la sua retta omologa $r'$; soltanto quando $r'$ seca $r$ si ottiene invece il sistema delle tangenti di una conica di $C'_2$, sistema i cui elementi sono rappresentati univocamente sui punti di $r$. Segue da ciò che af-

(*) È evidente che una sostituzione analoga non si può fare (almeno in generale) per le congruenze di grado superiore al secondo.

(**) Reye, l. c., p. 94, 95.

finchè $r$ rappresenti coi suoi punti le tangenti d'una conica di $C'_2$, essa deve avere per omologa in $S'$ una retta che la seca; per conseguenza *le rette* r *di* S *che corrispondono alle coniche di* $C'_2$, *costituiscono pure un complesso tetraedrale* $C_2$ avente la stessa superficie singolare di $C'_2$. Il complesso $C_2$ è rappresentato univocamente sui piani dello spazio $S'$, in modo correlativo a quello in cui $C'_2$ è rappresentato sui punti di $S$; epperò *tutto quello che si disse e si dirà sulla rappresentazione del complesso* $C'_2$ *varrà per quella di* $C_2$, *purchè si scambiino le veci di* S, S' *e si muti la parola* punto *nella parola* piano (*).

8. Sia $r'$ una retta qualunque di $S'$ non appartenente a $C'_2$. Un piano $\pi'$ per essa contiene infinite rette della congruenza di 2° grado in cui $C'_2$ è secato dal complesso lineare speciale di asse $r'$: ne viene che la quadrica imagine di questa congruenza (n. 5) conterrà tutta la retta del complesso $C_2$ che corrisponde a $\pi'$ (n. 6 e 7). Facendo ruotare $\pi'$ attorno ad $r'$ si conclude che la quadrica suddetta contiene $\infty^1$ rette del complesso $C_2$, cioè è una quadrica « contenuta » in $C_2$ (**). Dunque:

*Alle congruenze di* 2° *grado in cui il dato complesso* $C'_2$ *è secato dai complessi lineari speciali del suo spazio, corrispondono le quadriche contenute in* $C_2$.

9. Siano $a'$, $b'$ due rette di $S'$ aventi comune un punto $P'$ e un piano $\pi'$. La rigata che hanno comune $C'_2$ e i due complessi lineari speciali di assi $a'$, $b'$ ha per imagine (n. 5) una quartica di 1ª specie comune a due quadriche contenute in $C_2$; ma come quella rigata si spezza nella conica di $C'_2$ posta in $\pi'$ e nel cono di $C'_2$ uscente da $P'$, così questa quartica si scinde nella retta $p$ del complesso $C_2$ che corrisponde al piano $\pi'$ (n. 7) e in una cubica gobba rappresentante il punto $P'$ (considerato come centro d'un cono del complesso $C'_2$). Siccome la retta $p$ in generale non passa per alcuno dei punti uniti della corrispondenza, così la cubica gobba deve contenere tutti questi. Ora un piano $\sigma'$ condotto in $S'$ per $P'$ contiene due rette del complesso $C'_2$ uscenti da $P'$, quindi la retta di $C_2$ che

(*) Conviene avvertire che, ove si supponessero coincidenti gli spazii $S$, $S'$, i complessi $C_2$, $C_2'$, verrebbero a sovrapporsi: ma appunto perchè si ottiene maggior chiarezza distinguendo $C_2$ da $C'_2$ fissammo sin da principio (n. 2) che $S$ e $S'$ fossero distinti.

(**) Reye, l. c., p. 138.

corrisponde a $\sigma'$ conterrà due punti di quella cubica, epperò la congruenza di 1° ordine e 3ª classe di cui questa cubica è curva focale è contenuta (cfr. n. 8) nel complesso $C'_2$. Conchiudiamo dunque:

*Ai coni del complesso dato* $C'_2$ *corrispondono le cubiche gobbe che sono curve focali di congruenze di* 1° *ordine e* 3ª *classe contenute in* $C_2$.

Siccome le congruenze, di cui si parlò al n. prec., corrispondono univocamente alle rette di $S'$ e i coni di $C'_2$ corrispondono univocamente ai punti di $S'$, così è lecito, per brevità di enunciare le due ultime proposizioni nel seguente modo (cfr. n. 6): Alle rette di $S'$ corrispondono le quadriche contenute in $C_2$; ai punti di $S'$ le cubiche gobbe dette dal Reye (l. c., p. 136) *Ordnungscurven* di $C_2$.

## § 4.

### *Congruenze contenute in un complesso tetraedrale; alcune loro figure covarianti.*

10. Da queste proprietà della rappresentazione, che sono le più essenziali riflettenti il passaggio dallo spazio $S'$ allo spazio rappresentativo, altre si possono ottenere che riguardano il passaggio inverso, come ora mostreremo.

Supponiamo che il punto $P$ di $S$ percorra una superficie $\gamma_m$ d'ordine $m$, che supporremo anzitutto non contenere alcun punto unito della corrispondenza; le $\infty^2$ rette che corrispondono alle posizioni di $P$ costituiscono una congruenza $\Gamma'$ di cui vogliamo trovare l'ordine e la classe.

Seguendo Kummer (*), per ordine di $\Gamma'$ s'intende il numero delle sue rette che escono da un punto arbitrario $M'$ di $S'$; quindi esso è uguale al numero delle intersezioni dell'imagine $\gamma_m$ di $\Gamma'$ colla cubica gobba corrispondente (n. 9) ad $M'$; dunque l'ordine cercato è $3m$. Invece la classe di $\Gamma'$ è data dal numero delle sue rette che stanno in un piano arbitrario $\pi'$ di $S'$; quindi essa è uguale al numero delle intersezioni della ima-

(*) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme* u. s. w. Mathematische Abhandlungen d. k. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1866, § 1.

gine $\gamma_m$ di $\Gamma'$ colla retta che (n. 6 e 7) corrisponde in $S$ a $\pi'$; dunque la classe cercata è $m$.

11. La superficie $\gamma_m$ seca in $m$ punti ogni retta doppia di $C'_2$; siccome ognuno di questi punti è imagine di questa retta (n. 3, $b$), così la congruenza $\Gamma'$ ora ottenuta ha per rette $m$-*ple* le rette doppie del complesso tetraedrale in cui è contenuta. Oltre a queste rette multiple, $\Gamma'$ ne può avere delle altre se $\gamma_m$ ha dei punti singolari; infatti, se $\gamma_m$ ha un punto $r$-*plo* $K$, il cono del complesso $C_2$ uscente da $K$ consta di rette ognuna delle quali contiene $r$ punti della superficie coincidente in $K$; per conseguenza ognuno degli $\infty^1$ piani di $S'$ corrispondenti alle generatrici di quel cono, cioè ognuno dei piani del fascio avente per asse la retta $k'$ corrispondente a $K$, conterrà $r$ rette da $\Gamma'$ coincidenti in $k'$, epperò $k'$ è una retta $r$-*pla* di $\Gamma'$. Osserviamo anche che alle $2r$ rette d'intersezione del cono del complesso $C_2$ uscente da $K$ col cono osculatore di $\gamma_m$ in $K$ corrispondono in $S'$ altrettanti piani passanti per $k'$, ognuno dei quali contiene (non solo $r$ ma) $r+1$ rette della congruenza $\Gamma'$ coincidenti in $k'$.

12. Possiamo anche determinare i piani di $S'$ che contengono (invece di $m$) $\infty^1$ rette della congruenza. Anzitutto sono di questa specie i piani uniti della corrispondenza proiettiva; infatti uno qualunque di essi seca $\gamma_m$ in una curva $c_m$ d'ordine $m$ che, considerata in $S$, ha per omologa in $S'$ una curva $c'_m$ dello stesso ordine e posta nel medesimo piano; le $\infty^1$ congiungenti i punti omologhi di $c_m$ e $c'_m$ inviluppano una curva di classe $2m$, avente per tangenti $m$-*ple* le rette doppie di $C'_2$ poste in quel piano (*); tutte le tangenti di tal curva appartengono a $\Gamma'$, epperò il piano considerato gode della proprietà enunciata. Dico ora che in generale non godranno di tale proprietà che i piani uniti: infatti se nello spazio $S'$ esistesse un piano $\pi'$ di tal fatta, la congruenza $\Gamma'$ dovrebbe (eccettuato un caso che più tardi incontreremo) contenere tutte le rette del complesso $C'_2$ poste in $\pi'$, epperò $\gamma_m$ dovrebbe contenere tutti i punti della retta $p$ di $C_2$ corrispondente a $\pi'$; ora, in generale, ciò non è possibile, perchè, generalmente parlando, $\gamma_m$ non contiene alcuna retta, se ne contiene un numero finito nessuna di esse apparterrà in generale a $C_2$, se finalmente ne contiene infinite (cioè se essa è rigata) si ha un caso particolare di cui ci

(*) Se $c_m$ non ha punti *singolari*, la curva *inviluppo* non ha altre tangenti singolari.

occuperemo fra poco. Escludendolo per ora o chiamando *inviluppo piano d'una congruenza* una linea piana, di cui tutte le tangenti appartengono alla congruenza, potremo riassumere le proprietà dimostrate in questi ultimi tre numeri nel teorema seguente:

*Una superficie* $\gamma_m$ *non rigata d'ordine* m *dello spazio* S, *non passante per alcun punto unito della corrispondenza proiettiva, rappresenta una congruenza* $\Gamma'_{3m,m}$ *d'ordine* 3m *e classe* m *avente per rette* m-ple *le rette doppie del complesso, per retta* k-pla *ogni retta avente per imagine un punto* k-plo *di* $\gamma_m$ *e avente infine un inviluppo piano di classe* 2m *con tre tangenti* m-ple *in ogni piano unito della corrispondenza.*

13. Rimoviamo ora l' ipotesi fatta in principio del n. 10 intorno alla posizione di $\gamma_m$ rispetto agli elementi uniti della corrispondenza, cioè supponiamo che $\gamma_m$ abbia per punto $m_\alpha$-*plo* l' $\alpha^{mo}$ punto unito. Allora $\Gamma'_{3m,m}$ si spezzerà in quattro congruenze di ordine 1 classe 0 (cioè nelle stelle aventi i centri nei punti uniti $U_\alpha$ della corrispondenza) contate ordinatamente $m_1, m_2, m_3, m_4$ volte e in una congruenza d'ordine $n = 3m - \sum_1^4 m_\alpha$ e di classe $m$ avente la congiungente dei punti uniti $\alpha^{mo}$, e $\beta^{mo}$ per retta multipla di grado $m - (m_\alpha + m_\beta)$ e nel piano congiungente i punti uniti $\alpha^{mo}, \beta^{mo}, \gamma^{mo}$ un inviluppo piano di classe $2m - (m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)$. In seguito non terremo conto delle congruenze di ordine 1 e classe 0, cioè riterremo come corrispondente a $\gamma_m$ unicamente la congruenza d'ordine $3m - \sum_1^4 m_\alpha$ e classe $m$.

Consideriamo i punti della superficie infinitamente vicini al punto $U_\alpha$; le rette che li congiungono ad $U_\alpha$ costituiscono un cono d'ordine $m_\alpha$; quindi si vede che le rette della congruenza che corrispondono ai punti infinitamente vicini a $U_\alpha$ formano pure un cono d'ordine $m_\alpha$. In altre parole $U_\alpha$ è centro d'un *cono di raggi* (*) d'ordine $m_\alpha$ della congruenza.

---

(*) Kummer, l. c.

Non sarà fuor di proposito il notare qui, che le congruenze $\Gamma'_{3m,m}$ non possono contenere in generale dei coni di raggi. E invero affinchè da un punto $P'$ di $S'$ esca un cono di raggi della congruenza (cono necessariamente di secondo grado se $P'$ non coincide con alcun punto unito) deve la cubica gobba corrispondente (n. 9) a $P'$ essere contenuta nella superficie $\gamma_m$ rappresentatrice di $\Gamma'_{3m,m}$ il che non può accadere, perchè quella cubica passa per tutti i punti uniti della corrispondenza proiettiva, mentre $\gamma_m$ non passa per alcuno di essi.

Le cose dette in questo numero si possono riassumere nel seguente enunciato:

*Una superficie non rigata* $\gamma_m$ *di* S *passante* $m_\alpha$ *volte per* $U_\alpha$ *rappresenta una congruenza di ordine* $3m - \sum_1^4 m_\alpha$ *e classe* m *avente per retta multipla di grado* $m - (m_\alpha + m_\beta)$ *la retta* $U_\alpha U_\beta$, *avente* $U_\alpha$ *per centro d'un cono di raggi d'ordine* $m_\alpha$, *avente un inviluppo piano di classe* $2m - (m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)$ *nel piano* $U_\alpha U_\beta U_\gamma$ *e finalmente una retta* k-pla *per ogni punto* k-plo *di* $\gamma_m$.

14. Occupiamoci finalmente del caso in cui $\gamma_m$ sia una rigata (di $m^{mo}$ grado). Siccome questa rigata e il complesso $C_2$ hanno comuni $2m$ rette (*) ognuna delle quali corrisponde a un piano di $S'$ contenente infinite rette della congruenza rappresentata da $\gamma_m$, così vi saranno $2m$ piani di cui ciascuno contiene un inviluppo piano di 2ª classe della congruenza.

Se però vi sono $m_\alpha$ generatrici della rigata che passano per l'$\alpha^{mo}$ punto fondamentale, fra le $2m$ rette di $S$ di cui ora si è parlato $m_\alpha$ coincidono in quelle generatrici e non sono imagini di piani di inviluppi della congruenza. Laonde potremo dire più generalmente: *La congruenza la cui imagine è una rigata di* $m^{mo}$ *grado avente* $m_\alpha$ *generatrici uscenti dall'*$\alpha^{mo}$ *punto unito della corrispondenza contiene* $2m - \sum_1^4 m_\alpha$ *inviluppi piani di seconda classe.*

È però notevole che ai $\sum_1^4 m_\alpha$ inviluppi piani che scompaiono quando la rigata passa pei punti uniti si vengono in certo modo a sostituire altrettanti fasci di raggi. Per riconoscerlo consideriamo una generatrice $g$ di $\gamma_m$ uscente da un punto unito; tutti i punti di $g$ hanno per omologhi i punti di una retta $g'$ uscenti pure da quel punto; le punteggiate determinanti dai punti omologhi su $g$, $g'$ sono evidentemente prospettive, onde le congiungenti di tali punti omologhi passano per uno stesso punto e costituiscono un fascio contenuto nella congruenza. Siccome le tracce di $g$ e $g'$ sul piano unito della corrispondenza opposto al punto unito da cui escono $g$ e $g'$ sono punti omologhi di queste punteggiate, così il centro di quel fascio di raggi sta nel piano unito predetto. Concludiamo pertanto che *la congruenza corri-*

(*) HALPHEN, *Comptes rendus*, t. LXXIII, 1871, p. 1441.

*spondente a una rigata di* $m^{mo}$ *grado avente l'*$\alpha^{mo}$ *punto unito per punto multiplo d'ordine* $m_\alpha$ *contiene* $\sum_1^5 m_\alpha$ *fasci di raggi i cui centri stanno nei piani uniti e i cui piani passano pei punti uniti della corrispondenza.*

Considerazioni analoghe a quelle testè fatte valgono per una superficie anche non rigata, ma avente delle rette uscenti dai punti fondamentali; notiamo però che se una retta d'una superficie passa per due punti uniti della corrispondenza essa risulta multipla per la congruenza, ma non porge alcun fascio di raggi.

15. Continuando le considerazioni del numero precedente faremo notare che il caso $m = 2$ merita una menzione speciale. In tal caso la superficie $\gamma_m$ (quadrica) è doppiamente rigata onde la considerazione precedentemente fatta può ripetersi due volte e guida a concludere l'esistenza nella congruenza $\Gamma_{6,2}$ (non solo di quattro, ma) di otto inviluppi piani di 2ª classe.

In questo caso particolare si può osservare che, siccome le otto rette rappresentanti in $S$ questi inviluppi sono tali che ognuna incontra quattro delle rimanenti, così *ognuno di tali inviluppi ha quattro tangenti di cui ciascuna appartiene a un altro degli inviluppi stessi.* Una proprietà dei piani di questi inviluppi si ha considerando tre complessi lineari $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ aventi comune uno dei sistemi di generatrici della quadrica $\gamma_2$. In virtù dell'osservazione fatta in fine del n. 7 e dell'ultimo teorema del n. 5, a questi tre complessi corrisponderanno in $S'$ tre quadriche tangenti ai piani uniti della corrispondenza, le quali hanno ancora comuni i piani di quattro degli inviluppi di seconda classe della congruenza $\Gamma_{6,2}$. Dunque:

*I piani degli inviluppi di seconda classe della congruenza* $\Gamma_{6,2}$ *si distribuiscono in due quaterne, ognuna delle quali forma coi piani uniti della corrispondenza un'ottupla di piani associati* (*).

16. Riprendiamo la considerazione della superficie $\gamma_m$ (non rigata) d'ordine $m$. Siccome esistono $\infty^2$ tangenti di $\gamma_m$ appartenenti al complesso $C_2$ e siccome vi sono $\infty^1$ fra queste tangenti che soddisfano a una condizione e un numero finito che soddisfa a due, così vi saranno $\infty^2$ piani di $S'$ che contengono

(*) Reye, *Ueber das Strahlensystem zweiter Classe sechster Ordnung von der ersten Art.* Journal f. d. r. u. a. Mathematik. Bd. 93, 1882, p. 85.

due rette coincidenti della congruenza (*piani focali* della congruenza), fra questi formeranno una sviluppabile quelli soddisfacenti ad una nuova condizione e saranno in un numero finito quelli soddisfacenti ad altre due. Meritano speciale menzione la sviluppabile dei piani caratterizzati dalla proprietà di contenere ciascuno due coppie di rette coincidenti della congruenza (piani che possono chiamarsi *bifocali*) e quella dei piani ognuno dei quali contiene tre rette coincidenti della congruenza (e che indicheremo col nome di *piani osculatori*). Le classi della superficie focale e di queste due sviluppabili si determinano nel seguente modo.

17. A un piano focale $\varphi'$ della congruenza corrisponde in $S$ una retta appartenente al complesso $C_2$ e tangente a $\gamma_m$: ora ai piani dello spazio $S'$ passanti per una retta $r'$ corrispondono le rette del complesso $C_2$ che sono generatrici della quadrica $\rho_2$ corrispondente a $r'$ (n. 8), onde ai piani focali passanti per $r'$ corrisponderanno le rette di $C_2$ poste in $\rho_2$ e tangenti a $\gamma_m$. Ma queste sono in generale $2r$ se $r$ è il rango (*) di $\gamma_m$, dunque la classe della superficie focale è in generale $2r$. Siccome poi $\rho_2$ ha una generatrice in ogni piano unito, così se $\gamma_m$ ha per piano tangente singolare l'$\alpha^{mo}$ piano unito, fra quelle $2r$ tangenti è da annoverarsi questa generatrice di $\rho_2$ contata due volte, e questa non è imagine d'un piano focale passante per $r'$. Epperò potremo enunciare il seguente teorema generale:

*La superficie focale d'una congruenza corrispondente a una superficie di rango* r *avente nei piani uniti* q *piani tangenti singolari è di classe* 2 (r — q).

Questo teorema è dovuto a Klein (**); un altro teorema dovuto allo stesso geometra (***) ci permette di calcolare l'ordine $x$ della superficie focale: ritenendo infatti le notazioni precedentemente usate avremo:

$$x - 2(r - q) = 2 \left\{ 3m - \sum_1^4 m_\alpha - m \right\}$$

(*) Per *rango* intendiamo, come d'uso, il numero delle tangenti alla superficie che appartengono a un qualunque fascio di raggi.

(**) Esso trovasi enunciato alla fine della citata memoria di Lie.

(***) La differenza fra l'ordine e la classe d'una congruenza è la metà della differenza fra l'ordine e la classe della sua superficie focale (Cfr. Lie l. c., e Schubert, *Kalkül der Abzählenden Geometrie*, p. 64, 1879).

donde ricaviamo

$$x = 2 \left\{ 2m - \sum_1^4 m_\alpha + r - q \right\}.$$

Nel caso in cui la superficie $\gamma_m$ sia generale e in posizione qualunque rispetto agli elementi uniti della corrispondenza, l'ordine della superficie focale è $2m(m+1)$ mentre la sua classe è $2m(m-1)$.

18. A un piano bifocale $\beta'$ passante per un punto $P'$ di $S'$ corrisponde una retta bitangente a $\gamma_m$ e bisecante la cubica gobba corrispondente a $P'$. Ora la congruenza delle bitangenti d'una superficie generale d'ordine $m$ è di ordine

$$\frac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3)$$

e classe $$\frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9) \quad (*)$$

mentre la congruenza delle bisecanti d'una cubica gobba è di ordine 1 e classe 3; servendoci dunque d'un noto teorema di Halphen (**) potremo dire che vi sono

$$\frac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3) + \frac{3}{2} m(m-2)(m^2-9)$$
$$= 2m(m-3)(m^2-4)$$

rette di $C_2$ che sono imagini di piani bifocali passanti per $P'$; o, in altre parole, che:

*La sviluppabile bifocale d'una congruenza* $\Gamma_{3m,m}$ *è in generale di classe*

$$2m(m-3)(m^2-4).$$

19. Analogamente: siccome le rette osculatrici d'una superficie generale d'ordine $m$ formano una congruenza d'ordine $m(m-1)(m-2)$ (***) e classe $3m(m-2)$, (****) così:

---

(*) V. le due prime note alla pag. seg.

(**) *Comptes rendus*, t LXVIII, p. 142.

(***) Cremona, *Grundzüge einer allg. Theorie der Oberflächen*, p. 64, 1870.

(****) Come risulta da una delle formole di Plücker.

*La sviluppabile dei piani osculatori d'una congruenza* $\Gamma_{3m,m}$ *è in generale di classe*

$$m(m-2)(m+8).$$

20. Riguardo al numero dei piani focali soddisfacenti due condizioni, noteremo che, siccome le tangenti quadripunte d'una superficie generale d'ordine $m$, le rette aventi con essa un contatto bipunto e un contatto tripunto e le rette aventi con essa tre contatti bipunti, formano tre rigate degli ordini rispettivi

$$2m(m-3)(3m-2),\ m(m-3)(m-4)(m^2+6m-4),$$

$$\frac{1}{3}m(m-3)(m-4)(m-5)(m^2+3m-2)\ (*)$$

e siccome il complesso $C_2$ contiene (in virtù del primo dei citati teoremi di Halphen) rispettivamente

$$4m(m-3)(3m-2),\ 2m(m-3)(m-4)(m^2+6m-4),$$

$$\frac{2}{3}m(m-3)(m-4)(m-5)(m^2+3m-2)$$

generatrici di queste rigate, così:

*Vi sono* $4\,\mathrm{m}\,(\mathrm{m}-3)\,(3\,\mathrm{m}-2)$ *piani ognuno dei quali contiene quattro rette coincidenti della congruenza* $\Gamma_{3\mathrm{m},\,\mathrm{m}}$.

*Vi sono* $2\,\mathrm{m}\,(\mathrm{m}-3)\,(\mathrm{m}-4)\,(\mathrm{m}^2+6\mathrm{m}-4)$ *piani ognuno dei quali contiene una coppia e una terna di rette coincidenti della congruenza* $\Gamma_{3\mathrm{m},\mathrm{m}}$.

*Vi sono* $\frac{2}{3}\,\mathrm{m}\,(\mathrm{m}-3)\,(\mathrm{m}-4)\,(\mathrm{m}-5)\,(\mathrm{m}^2+3\,\mathrm{m}-2)$ *piani ognuno dei quali contiene tre coppie di rette coincidenti della congruenza* $\Gamma_{3\mathrm{m},\mathrm{m}}$ (piani trifocali).

21. Oltrechè render possibile la determinazione di queste singolarità della congruenza, la rappresentazione indicata può servire a tradurre molte altre proprietà delle superficie in altrettante delle congruenze $\Gamma'_{3m,m}$: p. es. essa dà la generazione

---

(*) Cfr. Salmon-Fiedler, *Analytische Geom. d. Raumes*, Bd. II, p. 635, 636, 638; 1880.

delle suddette congruenze mediante stelle proiettive di congruenze d'ordini inferiori.

Di più, i teoremi precedenti possono servire di base a uno studio completo della geometria su un complesso tetraedrale. Infatti il problema fondamentale di un tale studio è la determinazione di tutte le congruenze d'una classe assegnata (ma arbitraria) esistenti nel complesso e delle loro mutue relazioni. Ora la proposizione esposta alla fine del n. 13 ci fa vedere che per assegnare tutte le congruenze di classe $m$ basta determinare i numeri interi positivi soddisfacenti la condizione

$$n = 3m - \sum_1^4 m_\alpha$$

e cercare il sistema delle superficie $\gamma_m$ d'ordine $m$ aventi l'$\alpha^{mo}$ punto unito per $m_\alpha plo$: se esiste un sistema di superficie dotate di queste singolarità, esso è imagine d'un sistema di congruenze $\Gamma'_{n,m}$. Facendo poi tutte le ipotesi possibili sulle singolarità, non situate in elementi eccezionali della corrispondenza, che può acquistare $\gamma_m$ si otterranno anche tutte le specie particolari di congruenze $\Gamma'_{n,m}$. Daremo più avanti alcuni esempii di tali ricerche.

## § 5.

### *Rigate contenute in un complesso tetraedrale.*

22. Proseguendo ora nello studio cominciato al n. 10 facciamo l'ipotesi che il punto $P$ dello spazio $S$ percorra una curva $c_k$ d'ordine $k$ non passante per alcuno dei punti uniti della corrispondenza. La retta $p'$ genererà allora una rigata il cui grado è uguale al numero delle sue rette che incontrano una retta arbitraria $r'$ di $S'$, epperò è anche uguale al numero delle intersezioni di $c_k$ colla quadrica che corrisponde (n. 8) ad $r'$ in $S$, cioè è uguale a $2k$. Se invece rimoviamo l'ipotesi fatta in principio, se, cioè, supponiamo che la data curva passi $k_\alpha$ volte per l'$\alpha^{mo}$ punto unito della corrispondenza, $k_\alpha$ delle intersezioni, di cui si è parlato cadono in quel punto unito, e quindi il grado della rigata diminuisce di $k_\alpha$ unità.

Abbiamo dunque il teorema:

*A una curva d'ordine* k *passante* $k_\alpha$ *volte per l'*$\alpha^{mo}$ *dei punti uniti della corrispondenza, corrisponde una rigata di*

*grado* $2k - \sum_1^4 k_\alpha$, *dello stesso genere della curva*, *avente una generatrice* $r-$pla *per ogni punto* $r-$plo *della curva e di cui* $k-(k_\alpha+k_\beta+k_\gamma)$ *generatrici stanno nel piano in cui si trovano i punti uniti* $\alpha^{mo}$, $\beta^{mo}$, $\gamma^{mo}$.

23. Questo teorema si può considerare come fondamentale per la ricerca delle rigate contenute nel complesso tetraedrale, perchè esso porge la soluzione del problema: Trovare tutte le rigate d'un grado assegnato (ma arbitrario) $g$ contenute nel complesso. E invero a ogni tale rigata corrispondono cinque numeri $k$, $k_1, \ldots, k_4$ soddisfacenti le condizioni:

$$g = 2k - \sum_1^4 k_\alpha, \quad k_\lambda + k_\mu + k_\nu \leqq k,$$

e viceversa trovati cinque tali numeri e riconosciuta la possibilità che una curva d'ordine $k$ abbia le singolarità indicate dai numeri $k_1, \ldots, k_4$, si otterrà una rigata o una schiera di rigate contenute nel complesso (*).

Facendo p. es. $g=1$ si deve prendere $k=1$, uno dei $k_\alpha=1$ e gli altri tre nulli; allora si conclude:

*Nel complesso tetraedrale esistono in generale quattro schiere doppiamente infinite di fasci di raggi; esse sono rappresentate dalle stelle di raggi aventi i loro centri nei punti uniti della corrispondenza proiettiva.*

Un ragionamento fatto al n. 14 mostra che i centri di questi fasci stanno nei piani uniti e che i loro piani passano pei punti uniti della corrispondenza.

Facendo invece $g=2$ si hanno le tre soluzioni

$$k=1 \; ; \quad k_1=k_2=k_3=k_4=0$$
$$k=2 \; ; \quad k_\alpha=k_\beta=1, \quad k_\gamma=k_\delta=0$$
$$k=3 \; ; \quad k_1=k_2=k_3=k_4=1.$$

I tre sistemi di quadriche dati da queste tre soluzioni sono effettivamente fra loro distinti, perchè le quadriche del primo toccano tutti i piani uniti della corrispondenza, quelle del se-

(*) Dalle condizioni assegnate seguono le seguenti:

$$2k \geqq g \quad , \quad 2k \leqq 3g \; ,$$

che legano soltanto $k$ e $g$; ed inoltre (per $\lambda=1, \ldots, 4$):

$$k_\lambda \geqq k-g.$$

condo passano per due punti uniti e toccano due piani uniti, quelle del terzo infine passano per tutti i punti uniti. Il secondo sistema comprende sei schiere distinte triplicemente infinite, mentre gli altri ne comprendono una sola, ma pure triplicemente infinita.

24. La considerazione di queste schiere di quadriche ci fa vedere che per una retta qualunque del complesso dato si può far passare un numero determinato o fisso (cioè indipendente dalla retta scelta) di quadriche tali che *due* generatrici d'una di esse appartenenti allo stesso sistema di cui fa parte quella retta stiano sulla rigata avente per imagine la curva $c_k$. Questo numero è uguale alla somma dei tre seguenti (v. n. prec.): *a*) numero $h$ dei punti doppii apparenti della data curva; *b*) numero delle coniche passanti per un punto qualunque, per due punti uniti e appoggiate in due punti alla curva data; *c*) numero delle cubiche gobbe passanti per un punto qualunque, pei punti uniti e appoggiate in due punti alla curva data. Invece le rette caratterizzate dalla proprietà di far parte d'un sistema di generatrici d'una quadrica al quale appartengono *tre* o *quattro* generatrici della rigata formano una congruenza o una rigata.

Intorno alle rigate contenute nel complesso tetraedrale si può notare la seguente proprietà resa evidente dalla rappresentazione:

*Se una rigata contenuta in un complesso tetraedrale ha per imagine una curva d'ordine* k *e contiene* k+1 *rette appartenenti ad una congruenza di* 3° *ordine e* 1ª *classe, essa è contenuta in questa congruenza.*

25. Da ogni punto unito della corrispondenza parte un numero determinato $h$ di corde della data curva $c_k$; le due rette della rigata corrispondente ai due punti della curva posti su una assegnata $c$ di quelle corde concorrono in un punto del piano unito opposto (cfr. n. 14), punto che appartiene quindi alla curva doppia della rigata. Se, in particolare, da un punto unito della corrispondenza parte un cono di $s$- secanti di $c_k$, sul piano unito opposto si avrà una curva piana $s$-*pla* il cui ordine è uguale all'ordine di quel cono. Ciò accade per tutti i punti uniti se la curva $c_k$ è l'intersezione di due superficie simmetriche rispetto al tetraedro degli elementi uniti (*).

(*) Una superficie dicesi *tetraedralmente simmetrica* se esiste un tetraedro (detto *tetraedro di simmetria*) tale che rispetto ad esso la superficie abbia un' equazione della forma $\Sigma k_i x_i^m = o$, ove $m$ è un numero razionale (Cfr. La Gournerie, *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, 1867, p. 225).

Consideriamo in particolare il caso in cui la data curva sia l'intersezione $c_4$ di due quadriche proprio-coniugate rispetto al tetraedro formato dagli elementi uniti. Si ha allora una rigata (tetraedralmente simmetrica) di ottavo grado avente su ogni faccia del tetraedro di simmetria quattro generatrici e una conica doppia. Il genere di tale rigata è 1, quindi la curva (di ottavo ordine) sezione di essa con un piano qualunque deve contenere venti punti doppii (o cuspidi), cioè dodici, oltre agli otto derivanti dalle quattro coniche doppie; dunque, oltre a queste, la rigata ha una curva doppia di 12° ordine. Questa notevole superficie è la *quadrispinale* di La Gournerie: le cose ora dette possono servire di base a una trattazione geometrica di tale superficie (*).

26. Una questione analoga a quella di cui si tenne parola al n. 23 è la seguente:

Determinare tutte le rigate contenute in una congruenza corrispondente a una data superficie dello spazio rappresentativo; questa segue, in un certo senso, quella, perchè dopo aver determinate in generale le varie specie di rigate contenute in un complesso tetraedrale sorge naturale la domanda di quali fra esse esistano in un'assegnata congruenza del complesso stesso. Ebbene, a questa si risponde col teorema seguente:

*La congruenza rappresentata da una superficie qualunque* $\gamma_m$ *d'ordine* m *contiene tante rigate di grado* g *quante sono le curve d'ordine* k *contenute in quella superficie e passanti* $k_\alpha$ *volte per l'*$\alpha^{mo}$ *punto unito, essendo* k, $k_\alpha$ *numeri interi non negativi soddisfacenti le equazioni*

$$g = 2k - \sum_1^4 k_\alpha \quad , \quad k_\lambda + k_\mu + k_\nu \leqq k.$$

Se quindi la superficie non passa per alcun punto unito, *lo studio della geometria della corrispondente congruenza coincide con quello della geometria sulla superficie data;* se essa passa un numero qualsivoglia di volte per uno o più punti uniti, *la geometria della congruenza coincide con quella della superficie in cui siano fissati uno o più punti.* Si vede adunque come dallo studio già fatto della geometria su varie superficie si possano

(*) Le proprietà di questa superficie ora ottenute si trovano dimostrate analiticamente a pp. 5, 9, 10 e 21 della citata opera di La Gournerie.

trarre delle congruenze relative alle corrispondenti congruenze: è però chiaro che l'uso più importante di tali considerazioni si avrà per quelle congruenze, ottenute nel modo indicato, che si possono dimostrare essere le più generali dei loro ordini o delle loro classi, in particolare per le congruenze di 2ª classe e ordini 6 (1ª specie), 5, 4, 3, 2; gli è perciò che di queste terremo parola estesamente più innanzi.

Vogliamo finalmente notare che dall'immediata rappresentazione della congruenza sulla superficie che serve a generarla, se ne possono ottenere altre infinite, rappresentando univocamente questa superficie su di un'altra; in particolare dalla rappresentazione della congruenza di 2° grado su una quadrica si può ottenere la rappresentazione della stessa su un piano (Caporali), su una superficie di 3° ordine o su una di 4° avente una conica doppia (Cremona).

## § 6.

### *Congruenze di* 1ª *e* 2ª *classe contenute in un complesso tetraedrale* (*).

27. Applichiamo ora le considerazioni generali esposte al n. 21 alla ricerca delle congruenze di prima e seconda classe contenute nel complesso tetraedrale.

Servendosi del teorema esposto al n. 13 si vede che per ottenere delle congruenze di prima classe è necessario supporre che l'ordine $m$ della superficie rappresentativa sia $=1$; allora l'equazione del n. 2 diviene

$$n = 3 - \sum_1^4 m_\alpha \ ,$$

e questa ammette le quattro soluzioni:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0 \quad , n = 3$$
$$m_\alpha = 1 \ , m_\beta = m_\gamma = m_\delta = 0 \ , n = 2$$
$$m_\alpha = m_\beta = 1 \ , m_\gamma = m_\delta = 0 \ , n = 1$$
$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = 1 \ , m_\delta = 0 \ , n = 0 \ .$$

(*) In questo § bisogna supporre, ove non si avvertirà il contrario, che gli elementi uniti della corrispondenza formino un vero tetraedro.

Queste relazioni ci fanno vedere che in un complesso tetraedrale, di congruenze di prima classe, esistono solo quelle degli ordini 0, 1, 2, 3 (*); e precisamente si hanno:

*a*) Quattro congruenze di classe 1 e ordine 0, formate dalle rette poste nei piani uniti della corrispondenza e rappresentate dai piani stessi.

*b*) Sei schiere semplicemente infinite di congruenze di 1° ordine e 1ª classe (lineari) rappresentate dai sei fasci di piani aventi per assi le congiungenti dei punti uniti; p. es. un piano condotto pei punti uniti $U_\alpha$, $U_\beta$ rappresenta una congruenza lineare avente per direttrici una retta pel punto $U_\alpha$ nel piano $U_\alpha U_\gamma U_\delta$ e una retta pel punto $U_\beta$ nel piano $U_\beta U_\gamma U_\delta$ (**). Le sei schiere si distribuiscono in tre coppie di *schiere associate;* due congruenze si diranno appartenere a schiere associate se saranno rappresentate da 2 piani passanti per due spigoli opposti del tetraedro degli elementi uniti; due congruenze di schiere associate hanno comune un sistema di generatrici d'una quadrica, due di schiere non associate un fascio di raggi del complesso. Una retta del complesso determina in generale una e una sola congruenza di ogni schiera.

*c*) Quattro schiere doppiamente infinite di congruenze di 1ª classe e 2° ordine rappresentate dai piani delle quattro stelle aventi i centri nei punti uniti, ogni schiera è *coordinata* a uno di questi, le coniche focali delle congruenze d'una di esse sono le $\infty^2$ coniche inscritte nel triangolo avente per vertici i punti uniti della corrispondenza diversi da quello a cui la schiera è coordinata. Due congruenze hanno comune un fascio di raggi se appartengono alla stessa schiera, una quadrica del primo dei sistemi considerati al n. 23 se appartengono a sistemi diversi; viceversa ognuna di tali quadriche determina una congruenza di ogni schiera.

*d*) Una schiera triplicemente infinita di congruenze di 3° ordine e 1ª classe; una di queste congruenze ha una conica in ogni piano unito della corrispondenza; due congruenze della schiera hanno comune una rigata del primo dei sistemi del n. 23.

---

(*) Più generalmente: siccome è $n(=3m-\Sigma m_\alpha)\leq 3m$ così: Il massimo ordine di una congruenza di classe, $m$ contenuta in un complesso tetraedrale, è $3m$.

(**) Cfr. Reye, *Die Geometrie der Lage*, Bd. II, p. 139.

28. Passiamo ora alle congruenze di seconda classe. Bisognerà supporre $m=2$ e trovare le soluzioni intere non negative dell'equazione

$$n = 6 - \sum_{4}^{1} m_\alpha \ .$$

Tali soluzioni assieme agli ordini $x$ delle corrispondenti superficie focali (la cui classe è sempre 4) ottenuti colla formola del n. 17 sono raccolte nel seguente prospetto:

$$\begin{array}{lll}
n=6\ , & m_1=m_2=m_3=m_4=0\ , & x=12 \\
n=5\ , & m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=0,\ m_\delta=1\ , & x=10 \\
n=4\ , & m_\alpha=m_\beta=0,\ m_\gamma=m_\delta=1\ , & x=8 \\
n=3\ , & m_\alpha=0\ ,\ m_\beta=m_\gamma=m_\delta=1\ , & x=6 \\
n=2\ , & m_1=m_2=m_3=m_4=1\ . & x=4\ .
\end{array}$$

Dei casi in cui una delle $m_\alpha$ è uguale a 2 diremo più innanzi; ora studiamo partitamente queste soluzioni.

29. La prima combinata coi teoremi generali dei n. 12 e 15 ci dice:

*In qualunque complesso tetraedrale esistono $\infty^9$ congruenze di 2ª classe e 6° ordine; ognuna ha 6 rette doppie nelle rette doppie del complesso, e 4 inviluppi piani di 4ª classe (ciascuno con tre tangenti doppie); la superficie focale d'una tale congruenza è di 4ª classe e di 12° ordine; questa congruenza è per conseguenza di 1ª specie* (Kummer, l. c. § 6. Teor. 33, § 11. Teor. 44).

Lo Schur dimostrò (*) che le congruenze che così si ottengono sono le più generali di 2ª classe, 6° ordine e 1ª specie, con un ragionamento atto a sostituire la numerazione di costanti indicata dal Reye (**). Un'osservazione analoga va fatta sulle congruenze di cui parleremo ora.

Se la quadrica che rappresenta la congruenza $\Gamma_{6,2}$ è un cono, questa acquista una settima retta doppia e i suoi otto inviluppi di seconda classe coincidono a coppie.

---

(*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Bd. 95, p. 210.
(**) Ibid. Bd. 93, p. 83.

Le altre soluzioni trovate al n. 28 combinate coi teoremi dei numeri 13, 14 ci danno i risultati seguenti:

30. *In qualunque complesso tetraedrale esistono (quattro schiere composte ciascuna di)* $\infty^8$ *congruenze di* $2^a$ *classe e* $5^o$ *ordine. Ognuna ha tre rette doppie poste nello stesso piano, un inviluppo piano di* $4^a$ *classe (con tre tangenti doppie), tre di* $3^a$ *classe (con una tangente doppia ciascuno), sei di seconda e finalmente tre fasci di raggi; la sua superficie focale è di* $4^a$ *classe e di* $10^o$ *ordine* (Kummer, l. c. § 10. Teor. 42).

Se la quadrica rappresentatrice d'una di queste congruenze è un cono, la congruenza acquista una nuova retta doppia; i sei inviluppi di $2^a$ classe coincidono a coppie e lo stesso accade per due dei fasci di raggi.

31. *In qualunque complesso tetraedrale esistono (sei schiere composte ciascuna di)* $\infty^7$ *congruenze di* $2^a$ *classe e* $4^o$ *ordine. Ognuna di esse ha una retta doppia, due inviluppi piani di* $3^a$ *classe (con una tangente doppia ciascuno),* $(2+2.2=)$ *sei di seconda classe,* $(2+2.2=)$ *sei fasci di raggi; la sua superficie focale è di* $4^a$ *classe e* $8^o$ *ordine* (Kummer, l, c. § 9. Teor. 40).

Della congruenza di $4^o$ ordine e $2^a$ classe si possono considerare i due seguenti casi particolari:

*a*) Se la quadrica rappresentativa è un cono, la congruenza acquista una retta doppia, quattro degli inviluppi piani di seconda classe vengono a coincidere a coppie e lo stesso accade di quattro dei fasci di raggi.

*b*) Se la quadrica rappresentativa, non solo passa per due punti uniti, ma contiene la loro congiungente, la congruenza acquista pure una retta doppia, due dei fasci di raggi vengono assorbiti dalla retta doppia (cfr. n. 14, in fine) e ai due di $3^a$ classe vengono a sostituirsi due di seconda.

32. *In qualunque complesso tetraedrale esistono (quattro schiere composte ciascuna di)* $\infty^6$ *congruenze di* $2^a$ *classe e* $3^o$ *ordine. Ognuna di esse contiene* $(1+3.3=)$ *dieci fasci di raggi* e $(3+2=)$ *cinque inviluppi piani di seconda classe e ha una superficie focale di* $4^a$ *classe e* $6^o$ *ordine* (Kummer, l. c. § 8. Teor. 38). Si possono citare i seguenti casi speciali:

*a*) Se la quadrica rappresentatrice è un cono, la congruenza acquista una retta doppia, sei dei fasci di raggi vengono a coin-

cidere a coppie e lo stesso accade di due degli inviluppi piani di seconda classe.

*b*) Se la quadrica rappresentatrice, non solo passa per due punti uniti della corrispondenza, ma contiene tutta la loro congiungente, a due degli inviluppi piani di seconda classe vengono sostituiti due fasci di raggi e due fasci di raggi vengono assorbiti dalla retta doppia.

*c*) Finalmente, se la quadrica rappresentatrice contiene le due rette che uniscono uno dei punti uniti ad altri due, uno degli inviluppi piani di seconda classe scompare, cioè viene assorbito dalle due rette doppie acquistate dalla congruenza, altri due sono sostituiti da fasci di raggi, quattro fasci di raggi vengono assorbiti dalle rette doppie, un quinto è il fascio determinato dal punto e dal piano comune alle due rette doppie; vi sono poi ancora due inviluppi piani di $2^a$ classe e cinque fasci di raggi.

33. *In qualunque complesso tetraedrale esistono* $\infty^5$ *congruenze di* $2^a$ *classe e di* $2^o$ *ordine (di* $2^o$ *grado o quadratiche). Ognuna contiene* $(4+4+2.4=)$ *sedici fasci di raggi ed ha una superficie focale di* $4^o$ *ordine e* $4^a$ *classe* (*). (Kummer, § 7. Teor. 36).

Passiamo all'esame di alcuni casi particolari che può presentare una congruenza quadratica (**).

*a*) La quadrica rappresentativa sia un cono. Il suo centro è imagine d'una retta doppia della congruenza, i 4 fasci di raggi provenienti dai piani tangenti al cono nei punti uniti passano per la retta doppia (***) e gli otto derivanti dalle rette della quadrica uscenti dai punti uniti coincidono a coppie in quelli, mentre gli altri 4 non mutano. La superficie focale (su-

(*) La disposizione dei centri o dei piani dei fasci di raggi della congruenza quadratica dà la notissima configurazione dei punti e piani singolari della superficie di Kummer.

(**) Questi si trovano nell'*Inaugural-Dissertation* dello Schur (*Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1 und 2 Grades.* Berlin, 1879). Il metodo seguito da questo ben noto geometra differisce da quello da noi adottato, per ciò, che egli studia la congruenza di secondo grado inquanto essa giace su un complesso lineare, mentre noi la consideriamo come una delle figure esistenti su un complesso tetraedrale.

(***) Un'osservazione analoga poteva farsi per le congruenze di classi superiori rappresentate da coni.

perficie di 4° ordine e 4ª classe con una retta doppia) è una superficie del complesso di Plücker relativa a una retta del complesso.

*a'*) La quadrica contenga la congiungente di due punti uniti. La congruenza ha allora questa per retta doppia e contiene 4 fasci di raggi passanti per essa (di cui due corrispondono alle generatrici della quadrica poste nei piani uniti passanti per la retta doppia e diverse da questa, e gli altri due ai piani tangenti alla quadrica nei punti uniti appartenenti alla retta doppia) ed altri 8 fasci di raggi. La sua superficie focale è (a differenza del caso precedente) una superficie del complesso affatto generale (Krummer, l. c. § 7. Schur, l. c., p. 25, 26).

*b*) Se la quadrica rappresentativa contiene le congiungenti di due coppie di punti uniti, la congruenza quadratica avrà due rette doppie e due quaterne di fasci di raggi passanti risp. per esse; la sua superficie focale, essendo di 4° ordine e 4ª classe con due generatrici doppie non secantisi, è una rigata di 4° grado della specie XI di Cremona (*) - (Kummer, l. c. § 7. Schur, l. c. p. 27-28).

*c*) Se la quadrica contiene i lati d'un quadrilatero gobbo avente per vertici i punti uniti della corrispondenza, la superficie focale si scinde in due quadriche contenenti il medesimo quadrilatero, epperò la congruenza si può definire come luogo delle tangenti comuni a queste due superficie (Schur, l. c. p. 29).

*d*) Se la quadrica contiene le rette che uniscono uno dei punti uniti della corrispondenza ad altri due, la congruenza acquista due rette doppie che si secano e conserva soltanto quattro fasci di raggi non passanti per esse. La sua superficie focale è una superficie di 4° ordine e 4ª classe con due rette doppie che si secano, cioè è una superficie del complesso di Plücker relativa a una tangente della superficie singolare (Schur, l. c. p. 26, 27).

*e*) Se finalmente la quadrica rappresentativa contiene tre delle congiungenti i punti uniti, di cui una seca le altre due che non s'incontrano, la congruenza ha pure tre rette doppie una delle quali incontra le altre che sono gobbe, ma non contiene più alcun fascio di raggi (non passante per rette doppie). La

(*) V. la memoria: *Sulle superficie gobbe di 4° grado*, n. 12 (Mem. dell'Accademia di Bologna, 1868).

sua superficie focale è una rigata di 4° grado con due direttrici e una generatrice doppia, onde è una rigata della specie V di Cremona (*) - (Schur, l. c. p. 28).

34. Le altre soluzioni dell'equazione del n. 28 di cui ancora non facemmo cenno sono:

$$m_\alpha = 2\,, \quad m_\beta = m_\gamma = m_\delta = 0\,, \quad n = 4 \text{ per cui si ha } x = 8$$
$$m_\alpha = 2\,, \quad m = 1\,, \; m_\gamma = m_\delta = 0\,, \; n = 3 \quad » \quad » \quad x = 6$$
$$m_\alpha = 2\,, \quad m_\beta = m_\gamma = 1\,, \; m_\delta = 0\,, \; n = 2 \quad » \quad » \quad x = 4$$
$$m_\alpha = 2\,, \quad m_\beta = m_\gamma = m_\delta = 0\,, \quad n = 1 \quad » \quad » \quad x = 2\,;$$

le corrispondenti congruenze sono rappresentate da coni col centro in un punto unito e passanti ordinatamente per 0, 1, 2 o 3 degli altri punti uniti; non è difficile discutere le singolarità di queste congruenze, ma, per brevità, noi non faremo questa discussione.

Con ciò si può ritenere compiuta l'indicazione sommaria dello studio delle congruenze di 2ª classe contenute in un complesso di 2° grado avente per superficie singolare un tetraedro non degenerato. Ma, volendo studiare tutte le specializzazioni d'una congruenza di 2ª classe, bisognerà considerare ciò che si ottiene nei seguenti modi: 1. Facendo l'ipotesi che il complesso tetraedrale si specializzi in uno dei (quattro) modi possibili, pel che bisogna far venire opportunamente a coincidere i punti uniti della corrispondenza proiettiva (**). 2. Facendo l'ipotesi che il complesso $C_2$, che serve a rappresentare colle sue rette i piani di $S'$ (n. 6, 7), contenga, invece di otto rette della quadrica rappresentativa (n. 15), un numero minore. 3. Facendo finalmente l'ipotesi che la quadrica rappresentativa sia contenuta nel complesso $C_2$, cioè supponendo che la congruenza data sia contenuta in un complesso lineare speciale (n. 8). Non faremo per ora questo esame che pure sarebbe interessante: ci basti avere indicato il metodo per poterlo eseguire.

---

(*) Ibid. n. 6.

(**) Cfr. il lavoro citato nella nota alla fine del n. 1.

## § 7.

### *Geometria su una congruenza di 2ª classe. Rigate in essa contenute.*

35. Come esempio del modo di procedere nella soluzione del problema enunciato al n. 25, col metodo ivi indicato proponiamoci di studiare la geometria su una congruenza di 2ª classe. I teoremi dei numeri 29-33 ci dicono già che una tale contiene 0, 3, 6, 10 o 16 fasci di raggi (rigate di primo grado) secondochè il suo ordine è rispettivamente 6 (1ª specie), 5, 4, 3 o 2; cerchiamo ora le rigate di 2° e 3° grado che si trovano in una di esse. Premettiamo le seguenti osservazioni generali.

36. È noto (*) che su una quadrica esistono tante schiere di curve d'ordine $k$ per quanto sono gli spezzamenti del numero $k$ in due numeri interi e positivi $p$, $q$ cioè (ritenendo diversi due spezzamenti come $p$, $q$ e $q$, $p$) $k-1$ e che la schiera corrispondente allo spezzamento $p$, $q$ è $p+q+p\,q$ volte infinita. Le curve non degeneri di questa schiera che passano rispettivamente $k_1, k_2, k_3, k_4$ (essendo $k_i \geqq 0$) volte per 4 punti fissi formano una varietà a $pq+p+q-\frac{1}{2}\sum_1^4 k_\alpha(k_\alpha+1)$ dimensioni e sono di genere $(p-1)(q-1)-\frac{1}{2}\sum_1^4 k_\alpha(k_\alpha-1)$. Supponendo ora che quei punti fissi siano i punti uniti della corrispondenza proiettiva esistente fra i due spazii $S$, $S'$, potremo dedurre da ciò il teorema seguente, che si può dire compendii tutta la geometria su una congruenza di 2ª classe.

*Se con* $\varepsilon_\alpha$ $(\alpha=1,2,3,4)$ *si indica uno dei numeri* 0, 1 *e con* g *un numero arbitrario dato, e si determinano le soluzioni intere non negative dell'equazione*

$$g=2\,\mathrm{k}-\sum_1^4 k_\alpha$$

(*) Plücker, *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen* 2er *Ordnung.* G. di Crelle. Vol. 34, pp. 341 e 360. Cayley, *On the Curves situated on a Surface of the second Order. Phil. Magazine*, Vol. 22, Serie 4ª, 1861. Chasles, *Comptes rendus*, Vol. LIII, pp. 985, 1077, 1123.

*colla condizione di prendere sempre* $k_\alpha = 0$ *se* $\varepsilon_\alpha = 0$, *allora per ognuna delle* $k-1$ *soluzioni intere positive dell'equazione*

$$k = p + q$$

*si ottiene una schiera*

$$p + q + pq - \frac{1}{2} \Sigma k_\alpha (k_\alpha + 1)$$

*volte infinita di rigate di grado* g *e genere*

$$(p-1)(q-1) - \frac{1}{2} \Sigma k_\alpha (k_\alpha - 1)$$

*contenute in una congruenza di classe* 2 *e ordine* $6 - \sum_1^4 \varepsilon_\alpha$.

37. Ciò posto, la determinazione delle quadriche della congruenza di 2ª classe poggia sul fatto che l'equazione

$$2 = 2k - \sum_1^4 k_\alpha$$

non ammette che le soluzioni seguenti (n. 23)

$$k = 1 \ , \ k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$
$$k = 2 \ , \ k_\alpha = k_\beta = 1, k_\gamma = k_\delta = 0$$
$$k = 3 \ , \ k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1.$$

38. In generale è ammissibile solo la prima, perchè le altre richiedono che la quadrica rappresentatrice della congruenza passi per due o per tutti i punti uniti; quindi concludiamo:

*Le congruenze di classe* 2 *e ordine* 6 (1ª specie) *o* 5 *contengono due schiere semplicemente infinite di quadriche; due quadriche dello stesso sistema non hanno alcuna retta comune, due di sistemi diversi ne hanno una.*

Se la congruenza ha una retta doppia le due schiere coincidono in una costituita da quadriche contenenti la retta doppia.

39. La seconda delle soluzioni precedenti può applicarsi se la congruenza è di 4ª classe e ci porge, assieme alla prima, la proposizione:

*Ogni congruenza di* 4° *ordine e* 2ª *classe contiene tre schiere semplicemente infinite di rigate quadriche; due rigate qualunque hanno comune nessuna o una retta secondochè appartengono allo stesso sistema o a sistemi diversi.*

In entrambi i casi particolari considerati al n. 31 due di queste schiere coincidono.

40. Supponendo la congruenza di 3° ordine, si ha:

*In una congruenza di 3° ordine e 2ª classe si trovano cinque schiere semplicemente infinite di rigate quadriche, due rigate qualisivogliano hanno nessuna o una retta comune secondochè esse appartengono alla stessa schiera o a schiere differenti.*

Nei primi due casi speciali indicati al n. 32, due di queste schiere vengono a coincidere, nel terzo ciò avviene due volte, epperò non si hanno che tre schiere di quadriche.

41. Veniamo finalmente alle congruenze di 2° ordine e 2ª classe.

Su una di queste esistono due schiere semplicemente infinite di quadriche (che indicheremo con $D$, $G$) provenienti dai due sistemi di rette della quadrica rappresentatrice; poi sei schiere semplicemente infinite (che indicheremo con $S_{ik}$) provenienti dalle coniche sezioni della superficie data con piani passanti per le congiungenti le coppie $(U_i\, U_k)$ di punti uniti; finalmente le due schiere semplicemente infinite $S_g$, $S_d$ provenienti dalle due schiere di cubiche gobbe passanti pei punti uniti e aventi per bisecanti le rette d'uno dei sistemi della quadrica data e per unisecanti quelle dell'altro. Mediante la rappresentazione si vede subito che due quadriche della stessa schiera non hanno alcuna retta comune e che due quadriche di schiere diverse hanno una o due rette comuni secondochè le due schiere sono scelte ad arbitrio oppure formano una delle coppie seguenti:

$$D,\ S_d\ ;\quad G,\ S_g\ ;\quad S_{12},\ S_{34}\ ;\quad S_{13},\ S_{42}\ ;\quad S_{14},\ S_{25}\ .$$

Per conseguenza abbiamo il teorema:

*Una qualunque congruenza di secondo grado contiene dieci schiere semplicemente infinite di quadriche distribuite in cinque coppie di associate; due quadriche qualunque della congruenza hanno due, una, o nessuna retta comune, secondochè esse appartengono a schiere associate, a schiere non associate o alla stessa schiera* (*).

---

(*) Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie*, n. 22 (Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, t. 3). Caporali, *Sui complessi e sulle congruenze di secondo grado*, n. 10 (Ib. serie III, vol. 2). Schur, l. c., p. 18.

Questo teorema si modifica nei casi particolari indicati al n. 33; per brevità non esporremo per disteso queste modificazioni che si ottengono immediatamente coll'aiuto della rappresentazione, tanto più ch'esse trovansi indicate nel precitato lavoro dello Schur.

42. Finalmente, per trovare tutte le rigate di 3° grado contenute nel complesso, osserveremo che l'equazione

$$3 = 2k - \sum_1^i k_\alpha$$

ha le seguenti soluzioni

$$\begin{array}{lll} k=2\,, & k_\alpha=1\,, & k_\beta=k_\lambda=k_\delta=0 \\ k=3\,, & k_\alpha=0\,, & k_\beta=k_\lambda=k_\delta=1 \\ k=4\,, & k_\alpha=2\,, & k_\beta=k_\lambda=k_\delta=1\,; \end{array}$$

nessuna di esse è applicabile se la congruenza è di 6° ordine la prima è applicabile se la congruenza è di 5° o 4° ordine, la prima e la seconda sono applicabili alle congruenze di 3° ordine, infine tutte sono applicabili alle congruenze di 2° grado. Da ciò si trae, coll'aiuto delle osservazioni fatte al n. 36, il seguente teorema:

*In una congruenza di seconda classe esistono* 0, 1, 2, 4, *o* 16 *sistemi doppiamente infiniti di rigate di* 3° *grado secondochè il suo ordine è rispettivamente* 6 (1ª specie), 5, 4, 3 *o* 2.

Pavia, 5 Maggio 1884.

Lo stesso Socio D'Ovidio presenta ancora e legge il seguente lavoro del sig. Dott. Corrado Segre:

# RICERCHE

SUI

# FASCI DI CONI QUADRICI

## IN UNO SPAZIO LINEARE QUALUNQUE.

In un lavoro pubblicato tra le Memorie di quest'illustre Accademia (*) abbiamo mostrato quali siano le proprietà generali dei fasci di quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, e basandoci su un teorema analitico del signor Weierstrass intorno ad un fascio di forme quadratiche il cui determinante non sia identicamente nullo (**) ne abbiamo dedotto il modo di classificare completamente per ciascuno spazio tali fasci di quadriche, nella ipotesi che questi non si compongano esclusivamente di quadriche degeneri o *coni*. Ci proponiamo ora di studiare brevemente appunto quel caso prima escluso, mostrando alcune proprietà notevoli dei fasci di coni quadrici, specialmente quelle che possono servire a distinguere tra loro cioè a classificare i fasci di coni quadrici, in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Seguiremo un procedimento sintetico, ma per essere più completi mostreremo

(*) *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.* Memorie della R. Accad delle Scienze di Torino, serie II, tomo XXXVI, 1884. — Alcune proposizioni che enuncieremo senza dimostrazione, specialmente sul principio di questa nota, si troveranno dimostrate in quella memoria.

(**) *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* Monatsberichte der kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mai 1868 (pag. 310-338)

anche come i nostri risultati si possano trovare analiticamente basandosi su una trasformazione particolare data dal signor Kronecker di un fascio di forme quadratiche di determinante nullo (*), e ne dedurremo che la classificazione dei fasci di coni quadrici si riduce in sostanza alla classificazione già studiata dei fasci di quadriche non degeneri.

## *Proprietà generali.*

**1.** In uno spazio lineare ad $n$ dimensioni $S_n$ diciamo *cono quadrico* (**) di *specie* $r$ una quadrica (ad $n-1$ dimensioni) avente un $S_{r-1}$ doppio, vale a dire ottenuta proiettando da quell'$S_{r-1}$ una quadrica generale ad $n-r-1$ dimensioni (intersezione del cono con un $S_{n-r}$ qualunque); quell'$S_{r-1}$ diremo *sostegno* del cono (od anche *vertice* quando si riduca ad un punto, cioè pei coni di 1ª specie). Un tal cono ha dunque i suoi punti disposti su $\infty^{n-r-1}$ $S_r$ passanti pel sostegno: in tutti i punti di un tale $S_r$ esso ha uno stesso $S_{n-1}$ tangente.

Il cono contiene inoltre degli $S_m$ passanti pel sostegno e tali che il loro numero di dimensioni $m$ stia tra $r$ e $\frac{n+r-1}{2}$ od $\frac{n+r-2}{2}$ (a seconda che l'uno o l'altro di questi due numeri è intero), potendo raggiungere entrambi quei limiti. Diremo per brevità *spazi generatori* del cono tali $S_m$. Gli $S_{n-1}$ tangenti al cono nei punti di un $S_m$ generatore, ossia lungo gli $S_r$ generatori contenuti in questo, formano un sistema li-

(*) V. le osservazioni che il Kronecker fece seguire alla memoria citata del Weierstrass (ibid. pag. 339-346) e la nota *Ueber Schaaren von quadratischen Formen* (Monatsberichte, Januar, 1874, pag. 59-76) alla pag. 73. — Cogliamo quest'occasione per ringraziare il Prof. Kronecker per le spiegazioni gentilmente dateci per lettera su queste sue ricerche analitiche ed altre ad esse affini.

(**) Non avendo da considerare coni di ordine superiore al 2°, tralascieremo spesso per brevità l'aggettivo *quadrico*. E per ragioni analoghe parlando di *spazi lineari* diremo semplicemente *spazi* e li rappresenteremo colla lettera $S$ accompagnata da un indice inferiore che indichi il numero delle dimensioni (e non da esponenti). Tutti gli spazi (lineari o no) che considereremo s'intenderanno contenuti in $S_n$, e quindi a numero di dimensioni $< n$.

neare $m-r$ volte infinito, e si tagliano quindi in un $S_{n+r-m-1}$ il quale tocca il cono lungo tutto quell'$S_m$, cioè lo taglia in un cono di specie $m+1$ avente questo spazio per sostegno. Diremo perciò quell'$S_{n+r-m-1}$ *tangente* al cono considerato lungo l'$S_m$ generatore. Ogni $S_r$ generatore appartenente all'$S_m$ ha l'$S_{n-1}$ tangente passante per questo $S_{n+r-m-1}$ e viceversa ogni $S_{n-1}$ passante per questo è tangente al cono lungo un $S_r$ generatore, appartenente all'$S_m$; e la corrispondenza così stabilita tra quelle due varietà lineari $m-r$ volte infinite degli $S_r$ generatori appartenenti all'$S_m$ e degli $S_{n-1}$ passanti per lo spazio tangente lungo questo $S_m$ è proiettiva (come risulta dalla teoria della polarità rispetto ad una quadrica).

**2**. Parecchie delle proposizioni sui fasci di quadriche, che trovammo nella memoria citata, valgono anche, come provano le dimostrazioni ivi date, se il numero dei coni contenuti in quei fasci diventa infinito, cioè se si ha un fascio di coni quadrici. Così è sempre vero che gli $S_{n-1}$ polari dei vari punti dello spazio rispetto ad un tal fascio formano altrettanti fasci tutti proiettivi a questo e quindi fra loro. Se per un punto coincidono gli $S_{n-1}$ polari rispetto a due e quindi a tutte le quadriche del fascio, quel punto è doppio per una quadrica del fascio; e viceversa per ogni punto doppio di una quadrica del fascio tutti gli $S_{n-1}$ polari rispetto alle altre quadriche coincidono. In particolare, se quel punto appartiene alla *base* (intersezione di tutte le quadriche) del fascio esso ne sarà un punto doppio e l'$S_{n-1}$ tangente in esso a tutte le quadriche taglierà quella di cui esso è punto doppio nel cono quadrico ad $n-2$ dimensioni tangente nel punto stesso alla base del fascio.

Ogni $S_\nu$ taglia il fascio di coni in un fascio di quadriche a $\nu-1$ dimensioni; in generale questo fascio si comporrà tutto di coni quando $\nu > n-r$.

**3**. Nello studio che intendiamo fare dei fasci di coni quadrici è chiaro che possiamo escludere subito il caso in cui il fascio si compone di coni i cui sostegni abbiano un punto (od uno spazio) comune, poichè un tal fascio (e quindi anche la sua base) si ottiene proiettando da quel punto (o da quello spazio) un fascio di quadriche, generali o degeneri, di uno spazio a meno di $n$ dimensioni. Le proprietà di questo secondo fascio

darebbero dunque immediatamente quelle del primo fascio di coni; e in particolare gl'invarianti assoluti dei due fasci sarebbero gli stessi. Ad esempio un fascio di coni di specie $r$ aventi lo stesso sostegno $S_{r-1}$ ha proprietà, particolarizzazioni ed invarianti assoluti che sono dati da quelli del fascio di quadriche generali in cui esso è tagliato da un $S_{n-r}$ qualunque. Basta adunque studiare quei fasci di coni quadrici in cui i sostegni di questi non hanno alcun punto comune; e noi ci occuperemo in fatti esclusivamente di questi.

Da ciò deduciamo una limitazione per la specie $r$ dei coni del fascio. Poichè i sostegni $S_{r-1}$ di due qualunque di essi non devono aver punti comuni (chè altrimenti tutti i sostegni avrebbero quei punti comuni) dovrà essere $2(r-1) < n$, cioè $r < \frac{n}{2}+1$, sicchè la specie dei coni del nostro fascio non può superare $\frac{n}{2}$ od $\frac{n+1}{2}$ secondo che $n$ è pari o dispari. Troveremo anzi più tardi, seguendo lo stesso concetto, un limite più piccolo (v. n° 13).

## *Luogo dei vertici di un fascio di coni di 1ª specie.*

**4.** Consideriamo anzitutto un fascio di coni di 1ª specie, facendo astrazione per ora dai coni di specie superiore che in generale vi saranno pure, ma in numero finito, nel fascio. I vertici di quei coni di 1ª specie formeranno una serie continua di $\infty^1$ punti corrispondenti univocamente al fascio di coni, poichè se uno stesso punto fosse vertice per due coni sarebbe vertice per tutti, il che escludiamo (n. 3); quindi, poichè le quadriche di un fascio formano una serie razionale, quei vertici formeranno una curva razionale. Un $S_{n-1}$ taglierà il fascio dato in un fascio di quadriche generali ad $n-2$ dimensioni, nel quale vi saranno al più $n$ coni; quindi in quell'$S_{n-1}$ vi saranno al più $n$ vertici di coni del fascio dato. Dunque il luogo dei vertici dei coni (di 1ª specie) di quel fascio è una curva razionale il cui ordine non può superare $n$.

**5.** A risultati più precisi e ad altri pure importanti giungeremo con un'altra via, che ci darà anche la generazione della

curva. Dalle proposizioni ricordate al n. 2 segue che il vertice di un cono del fascio di coni di 1ª specie avrà uno stesso $S_{n-1}$ polare rispetto a questi; e siccome l'$S_{n-1}$ polare di un punto qualunque rispetto ad un cono passa pel sostegno di questo, così quell'$S_{n-1}$ passerà pei vertici di tutti i coni del fascio, cioè conterrà la curva considerata e quindi anche quel vertice di cui esso è polare. Ne segue che questo vertice sta su tutti i coni del fascio e che questi hanno in esso uno stesso $S_{n-1}$ tangente. Dunque:

*La curva luogo dei vertici di un fascio di coni di* 1ª *specie appartiene alla base di questo fascio, anzi ne è una curva doppia lungo cui tutti i coni del fascio si toccano, poichè in ciascun punto di essa tutti i coni hanno uno stesso* $S_{n-1}$ *tangente. Gli* $S_{n-1}$ *tangenti, che così corrispondono ai punti della curva, contengono tutti questa curva.*

**6**. Sia $m$ il numero minimo di dimensioni che possa avere uno spazio lineare passante per quella curva, ossia, come diremo più brevemente, supponiamo che questa appartenga ad un $S_m$. Gli $S_{n-1}$ polari (tangenti) dei punti di quella curva rispetto ad un cono di 1ª specie arbitrario del fascio formeranno, poichè quella curva passa pel vertice, una serie semplicemente infinita appartenente ad una serie lineare $m-1$ (e non meno) volte infinita di $S_{n-1}$ (*). Vedemmo al numero precedente che tutta quella serie semplicemente infinita di $S_{n-1}$ contiene quella curva e quindi anche l'$S_m$ cui essa appartiene; dunque anche quella serie lineare $m-1$ volte infinita di $S_{n-1}$, ossia l'$S_{n-m}$ per cui essa passa, conterrà quella curva e quell'$S_m$. D'altronde quella serie lineare $m-1$ volte infinita a cui appartiene la serie semplicemente infinita considerata di $S_{n-1}$ non può mutare col cono di 1ª specie arbitrario del fascio, poichè altrimenti quest'ultima apparterrebbe ad una serie lineare meno che $m-1$ volte infinita. Concludiamo adunque che:

*Lo spazio lineare* $S_m$ *a cui appartiene la curva dei vertici è contenuto nella base del fascio. Lungo esso tutti i coni del fascio hanno lo stesso spazio* $S_{n-m}$ *tangente.*

---

(*) Fa eccezione il caso in cui $m=1$; allora il luogo dei vertici dei coni è una retta ($S_1$) lungo cui questi coni sono toccati da uno stesso $S_{n-1}$.

**7.** Ciò premesso, consideriamo due determinati coni di 1ª specie $f'$, $f''$ del fascio, dei quali siano $x'$, $x''$ i vertici. Ogni $S_{n-1}$ passante per quell'$S_{n-m}$, cioè appartenente alla serie lineare $m-1$ volte infinita considerata, tocca quei due coni lungo due *raggi* ($S_1$) uscenti rispettivamente da $x'$, $x''$, e vi è corrispondenza proiettiva tra gli $S_{n-1}$ di quel sistema ed i raggi delle due *stelle* di centri $x'$, $x''$ contenute nello spazio $S_m$ (n. 1). Quindi anche queste stelle sono tra loro proiettive. Un punto $x$ comune a due raggi corrispondenti è un punto di $S_m$ nel quale $f'$, $f''$ hanno lo stesso $S_{n-1}$ tangente, vale a dire è il vertice di un altro cono del fascio (n. 2), e viceversa ogni vertice di un cono del fascio è un punto in cui $f'$, $f''$ hanno lo stesso $S_{n-1}$ tangente ed è quindi comune a due raggi corrispondenti delle due stelle. Dunque la curva dei vertici dei coni è il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti di due stelle proiettive nello spazio $S_m$, cioè una curva razionale d'ordine $m$ normale per questo spazio (*). Sicchè concludiamo finalmente:

*Il luogo dei vertici di un fascio di coni quadrici di* 1ª *specie è una curva normale* $C^m$ *di uno spazio lineare* $S_m$.

**8.** Il fatto che quell'$S_m$ deve essere uno spazio generatore per tutti i coni del fascio ci dà una notevole limitazione pel numero $m$. In fatti (n. 1) il numero $m$ delle dimensioni di uno spazio generatore di un cono di 1ª specie ad $n-1$ dimensioni non può superare $\frac{n-1}{2}$ oppure $\frac{n}{2}$ secondo che $n$ è impari o pari (il che risulta subito del resto dal fatto che quell'$S_m$ essendo contenuto nell'$S_{n-m}$ tangente lungo esso a tutti i coni sarà $m \leqq n-m$, cioè $m \leqq \frac{n}{2}$). Dunque:

*L'ordine* m *della curva dei vertici non può superare* $\frac{n-1}{2}$ *ovvero* $\frac{n}{2}$ *secondo che* n *è impari o pari.*

**9.** Dalla ricerca fatta (nⁱ 6, 7) ricaviamo inoltre questi risultati:

---

(*) V. Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (Mathematische Annalen, XIX, pag. 161-234), pag 219.

*Lungo la curva normale* $C^m$ *luogo dei vertici dei coni del fascio gli* $S_{n-1}$ *tangenti comuni a questi coni formano una serie semplicemente infinita di classe* $m-1$ *(cioè l'ente correlativo ad una* $C^{m-1}$ *normale).*

*La condizione necessaria e sufficiente affinchè due coni quadrici di* 1ª *specie determinino un fascio di coni quadrici è che essi abbiano lo stesso spazio tangente lungo uno spazio generatore comune.*

## *Luogo dei sostegni di un fascio di coni di specie qualunque.*

**10**. Consideriamo ora in generale un fascio di coni di specie qualunque $r$, cioè aventi degli $S_{r-1}$ per sostegni. Come notammo (n. 3) si può supporre che il fascio sia tale che due qualunque di quegli $S_{r-1}$ non si taglino. Vogliamo cercare quale specie di varietà ad $r$ dimensioni sia il luogo di quegli $\infty^1$ $S_{r-1}$.

Supponiamo che lo spazio di numero minimo di dimensioni in cui quella varietà è contenuta sia un $S_m$. L'$S_{n-r}$ polare di uno qualunque di quegli $S_{r-1}$ rispetto a tutto il fascio di coni passerà per tutti gli altri $S_{r-1}$: dunque gli $\infty^1$ $S_{n-r}$ polari dei sostegni dei coni passano per la varietà costituita da questi sostegni e quindi anche per l'$S_m$ che la contiene. E siccome questo ha per polare rispetto ad uno qualunque dei coni un $S_{n+r-m-1}$ per cui passano gli $\infty^1$ $S_{n-r}$ suddetti, e nel quale starà in conseguenza quell'$S_m$ che è in essi contenuto, così tutto questo spazio $S_m$ appartenendo al proprio spazio polare starà su tutti i coni del fascio. Inoltre quel suo spazio polare (tangente) $S_{n+r-m-1}$ sarà lo stesso rispetto a tutti i coni del fascio, giacchè esso appartiene agli $\infty^1$ $S_{n-r}$ e se questi avessero comuni vari $S_{n+r-m-1}$ ne seguirebbe dalla polarità che gli $\infty^1$ $S_{r-1}$ non starebbero su un solo $S_m$, come supponemmo. Dunque:

*Un fascio di coni di specie* r *si compone di coni aventi comune un* $S_m$ *passante pei loro sostegni e l'*$S_{n+r-m-1}$ *tangente lungo esso.*

**11**. Così vediamo pure che:

*La condizione affinchè il fascio di quadriche determinato da due coni di specie* r *si componga tutto di tali coni è che*

*quei due abbiano comune uno spazio generatore e lo spazio tangente lungo esso.*

È chiaro che questa condizione non è solo necessaria ma anche sufficiente, poichè se quello spazio generatore comune ai due coni è un $S_m$, sicchè lo spazio tangente lungo esso sia un $S_{n+r-m-1}$, tutte le quadriche del fascio dovranno contenere quell'$S_m$ ed esser toccate lungo esso dall'$S_{n+r-m-1}$, il che non può accadere se non sono coni di specie $r$ aventi quell'$S_n$ per spazio generatore (o coni di specie più elevata).

**12**. Siano $f'$, $f''$ due coni qualunque di specie $r$ del fascio ed $S'_{r-1}$, $S''_{r-1}$ i loro sostegni. Tutti gli $S_{n-1}$ passanti per l'$S_{n+r-m-1}$ toccano $f'$ lungo degli $S_r$ passanti per $S'_{r-1}$ e descriventi una forma proiettiva a quelle descritta dai detti $S_{n-1}$ (n. 1); e similmente gli stessi $S_{n-1}$ toccano $f''$ lungo degli $S_r$ passanti per $S''_{r-1}$ e descriventi una forma proiettiva a quella composta di quegli $S_{n-1}$. Quindi gli $S_r$ passanti per $S'_{r-1}$ e giacenti in $S_m$ e quelli per $S''_{r-1}$ descrivono due forme proiettive in $S_m$ ed il luogo dei punti d'intersezione degli $S_r$ corrispondenti sarà per conseguenza (*) una $F_r^{m-r+1}$ contenente $\infty^1$ $S_{r-1}$, tra cui $S'_{r-1}$ e $S''_{r-1}$, e costituente appunto il luogo dei sostegni dei coni di specie $r$ del fascio, perocchè un punto comune a due $S_r$ corrispondenti di quei due sistemi avrà un solo spazio tangente ad $f'$, $f''$ e quindi a tutto il fascio, cioè sarà un punto doppio di qualche cono del fascio. Dunque:

*Il luogo dei sostegni di un fascio di coni di specie* r *è una* $F_r^{m-r+1}$ *dello spazio generatore comune* $S_m$ *lungo cui essi hanno uno stesso spazio tangente.*

**13**. Un cono di specie $r$ può contenere un $S_m$ solo quando (n. 1) $m \leqq \frac{n+r-1}{2}$ e quindi $m-r+1 \leqq \frac{n-r+1}{2}$. Dunque:

---

(*) Come si può vedere, considerando un $S_{m-r}$ qualunque dell' $S_m$ e la proiettività determinata su esso dai due sistemi proiettivi di $S_r$: gli $m-r+1$ punti doppi di quella proiettività sono i punti del luogo cercato appartenenti a quell' $S_{m-r}$. Del resto conviene per studiare le proprietà di quel luogo $F_r^{m-r+1}$ considerarlo come rappresentato dall'annullarsi dei determinanti di una matrice. V. VERONESE, loc. cit., pag. 215.

*L'ordine del luogo dei sostegni dei coni del fascio non può superare* $\frac{n-r+1}{2}$ *od* $\frac{n-r}{2}$ *(secondo che l'uno o l'altro di questi numeri è intero), e il numero delle dimensioni dello spazio generatore comune, in cui sta quel luogo dei sostegni, non può superare* $\frac{n+r-1}{2}$ *od* $\frac{n+r-2}{2}$.

Di qui deduciamo per $r$ un limite inferiore a quello trovato al n. 3. In fatti, affinchè due qualunque dei sostegni $S_{r-1}$ (e quindi tutti) non abbiano punti comuni, stando entrambi in un $S_m$, deve essere $m > 2(r-1)$. Ma $m \leqq \frac{n+r-1}{2}$, oppure $m \leqq \frac{n+r-2}{2}$. Dunque $\frac{n+r-1}{2} > 2(r-1)$, donde $3(r-1) < n$, cioè $r < \frac{n}{3} + 1$; oppure $r < \frac{n-1}{3} + 1$. Laonde pei fasci di coni quadrici non ottenibili proiettando da un punto o da uno spazio fasci di quadriche a minor numero di dimensioni avremo che:

*La specie dei coni di un fascio non può superare quello fra i tre numeri* $\frac{n-1}{3}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n+1}{3}$ *che è intero.*

È poi facile vedere, applicando la proposizione del n° 11, che esistono effettivamente fasci di coni (non ottenibili con proiezioni) di specie data non superiore al detto limite.

**14.** Lungo tutti i punti della $F_r^{m-r+1}$ luogo dei sostegni dei coni del fascio questi si toccano mutuamente, sicchè quella è una varietà doppia per la base del fascio. Gli $S_{n-1}$ tangenti ai coni nei suoi punti formano dunque una serie $r$ volte infinita di classe $m-r$ composta di $\infty^1$ serie lineari $r-1$ volte infinite di $S_{n-1}$; come risulta dalla polarità rispetto ad uno qualunque dei coni osservando che quella $F_r^{m-r+1}$ ne contiene il sostegno.

**15.** Si sarebbe potuto giungere ai risultati ottenuti, o almeno ad una parte di essi, con quest'altro ragionamento. Se un fascio di quadriche si compone di coni di specie $r$, gli $S_{n-1}$ polari di ogni punto dello spazio rispetto ai coni stessi passano rispettivamente pei loro sostegni. Prendendo adunque nello spazio

$n-r+1$ punti arbitrari, i loro $S_{n-1}$ polari rispetto ad uno di quei coni si tagliano precisamente nel suo sostegno; e siccome gli $S_{n-1}$ polari di quei punti rispetto a tutti i coni del fascio formano altrettanti fasci proiettivi tra loro e col fascio di coni, così il luogo dei sostegni dei coni del fascio sarà il luogo degli $S_{r-1}$ d'intersezione degli $S_{n-1}$ corrispondenti di $n-r+1$ fasci proiettivi. Parrebbe dunque che quel luogo fosse dell'ordine $n-r+1$; ma siccome nel fascio vi sono in generale dei coni di specie superiore ad $r$, essi producono un abbassamento nell'ordine.

## *I coni di specie superiore del fascio.*

**16**. Consideriamo di nuovo un fascio di coni di 1ª specie, la cui curva dei vertici sia d'ordine $m$, sicchè vi sia un $S_{n-m}$ tangente a tutto il fascio lungo l'$S_m$ contenente quella curva. Quell'$S_{n-m}$ taglierà ciascun cono del fascio secondo un cono ad $n-m-1$ dimensioni avente quell'$S_m$ per sostegno, cioè di specie $m+1$; e quindi tutto il fascio primitivo sarà tagliato secondo un fascio di tali coni aventi lo stesso $S_m$ per sostegno. Secando questo secondo fascio con un $S_{n-2m-1}$ dell'$S_{n-m}$ (con che si ottiene un fascio di quadriche generali nel quale vi saranno generalmente $n-2m$ coni di 1ª specie) si scorge che esso contiene in generale $n-2m$ coni di specie $m+2$, i cui sostegni sono degli $S_{m+1}$ passanti per l'$S_m$ e formanti un gruppo di spazi coniugati rispetto a tutti i coni del fascio. Lungo questi $n-2m$ $S_{m+1}$ l'$S_{n-m}$ sarà dunque toccato da $n-2m$ coni del fascio primitivo, i quali per conseguenza, toccando lungo degli $S_{m+1}$ un $S_{n-m}$, saranno di 2ª specie; vediamo inoltre che essi avranno per sostegni degli $S_1$ posti su quegli $S_{m+1}$ e taglianti in conseguenza l'$S_m$ (in punti della curva dei vertici). Viceversa ogni cono del fascio di specie superiore alla prima sarà toccato dall'$S_{n-m}$ non più soltanto lungo l'$S_m$, ma lungo uno spazio a maggior numero di dimensioni passante per l'$S_m$. Dunque:

*In generale in un fascio di coni di* 1ª *specie in cui il luogo dei vertici di questi sia una curva d'ordine* m *vi sono* n−2m *coni di* 2ª *specie. I sostegni* $S_1$ *di questi si appoggiano su quella curva (senza stare nello spazio* $S_m$ *che la contiene).*

**17**. Consideriamo più in generale un fascio di coni di specie $r$ i cui sostegni siano gli $S_{r-1}$ di una certa $F_r^{m-r+1}$ sita su un $S_m$. Lungo questo $S_m$ ogni cono del fascio è toccato, come vedemmo, da un $S_{n+r-m-1}$ fisso, il quale in conseguenza taglia il dato fascio secondo un fascio di coni aventi l'$S_m$ per sostegno. E come in questo secondo fascio vi sono in generale $n+r-2m-1$ coni di specie $m+2$, cioè aventi per sostegni degli $S_{m+1}$ passanti per quell'$S_m$, così conchiudiamo:

*In generale in un fascio di coni di specie* r *in cui il luogo dei sostegni appartenga ad un* $S_m$ *(e sia quindi una* $F_r^{m-r+1}$*) vi sono* n+r−2m−1 *coni di specie* r+1. *I loro sostegni passano per degli* $S_{r-1}$ *del luogo detto (ma non stanno nell'*$S_m$*)* (*).

**18**. Lo stesso si può dimostrare considerando un $S_{n-r}$ qualunque dello spazio: taglierà il dato fascio in un fascio di quadriche generali, in cui vi sarebbero generalmente $n-r+1$ coni (di 1ª specie). Ma la $F^{m-r+1}$ taglia quell'$S_{n-r}$ in $m-r+1$ punti posti sull'intersezione coll'$S_m$: questi punti sono dunque vertici di altrettanti di quei coni, ma ciascuno di essi conta due volte, poichè ciascuno di quei vertici sta sul fascio di quadriche. Dunque non vi sono più che $n-r+1-2(m-r+1) = n+r-2m-1$ coni in quel fascio e quindi altrettanti coni di specie $r+1$ nel dato fascio.

**19**. Se il fascio di coni di specie $r$ non è generale, potranno alcuni dei coni di specie $r+1$ venire a coincidere o in un tal cono o in un cono di specie superiore ad $r+1$. Ma allora nel fascio di coni di specie $m+1$ d'intersezione del dato coll'$S_{n+r-m-1}$ tangente lungo l'$S_m$ coincideranno pure altrettanti coni di specie $m+2$ in un cono di specie $m+2$ o superiore; e viceversa. Di qui appare che le particolarità che può presen-

(*) Questo passaggio dei sostegni dei coni di specie superiore del fascio per degli $S_{r-1}$ della $F_r^{m-r+1}$, passaggio che non si presenta solo nel caso generale, ma anche nei casi particolari, si spiega facilmente riflettendo che, nel fascio essendovi continuità, ad un cono di specie superiore è infinitamente vicino un cono di specie $r$, e quindi sul sostegno del primo cono vi sarà un $S_r$ infinitamente vicino al sostegno $S_r$ di questo, cioè un $S_r$ appartenente alla $F_r^{m-r+1}$.

tare il fascio di coni di specie $r$ sono date dalle particolarità di quel fascio di coni di specie $m+1$ dell'$S_{n+r-m-1}$ aventi l'$S_m$ per sostegno comune, ossia dalle particolarità del fascio di quadriche generali in cui il fascio di coni di specie $r$ è tagliato da un $S_{n+r-2m-2}$ contenuto nell'$S_{n+r-m-1}$. Ma le particolarità che può presentare un fascio di quadriche generali ci sono note: quindi potremo dedurne le particolarità del nostro fascio di coni.

## *Rappresentazione analitica dei fasci di coni di 1ª specie.*

**20**. Il signor Kronecker ha dato, come dicemmo in principio, una forma canonica per un fascio di forme quadratiche aventi determinante nullo, dalla quale avremmo pure potuto ottenere i nostri risultati. Segue in fatti dalle ricerche di quello scienziato che un fascio di coni (di 1ª specie) si può sempre rappresentare, dicendo $x_0$, $x_1$, ... $x_n$ le coordinate omogenee di punti in $S_n$, coll'equazione

$$(1) \ldots \left( u \sum_{k=0}^{k=m-1} x_{2k}\, x_{2k+1} + v \sum_{k=0}^{k=m-1} x_{2k+1}\, x_{2k+2} \right) + (u\Phi + v\Psi) = 0,$$

dove $u:v$ è il parametro variando il quale si ottiene ogni cono del fascio, $\Phi$ e $\Psi$ sono forme quadratiche contenenti solo più le variabili $x_{2m+1}$, $x_{2m+2}$, ..., $x_n$, ed $m$ è un certo numero intero che può variare da uno ad un altro fascio.

Ora il vertice di quello tra quei coni che corrisponde ad un valor qualunque di $u:v$ si ha derivando quell'equazione (1): le sue coordinate soddisfano dunque alle equazioni:

$$(2) \ldots \begin{cases} ux_1 = 0, \quad ux_0 + vx_2 = 0, \quad ux_3 + vx_1 = 0, \quad ux_2 + vx_4 = 0, \\ ux_5 + vx_3 = 0, \ldots\ldots, \quad ux_{2k+1} + vx_{2k-1} = 0, \quad ux_{2k} + vx_{2k+2} = 0, \\ \ldots\ldots, \quad ux_{2m-2} + vx_{2m} = 0, \quad vx_{2m-1} = 0, \end{cases}$$

$$(3) \ldots\ldots \quad u\frac{d\Phi}{dx_i} + v\frac{d\Psi}{dx_i} = 0 \qquad (i = 2m+1,\ 2m+2, \ldots\ldots, n).$$

Ma le (2) danno:

$$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0 ,$$

$$u x_0 + v x_2 = 0 , \quad u x_2 + v x_4 = 0 , \quad \ldots \; u x_{2m-2} + v x_{2m} = 0 ,$$

donde eliminando $u:v$ e notando che per un valore qualunque di questa le equazioni (3) non sono soddisfatte che annullando tutte le variabili che vi entrano:

$$(4) \ldots \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0 ; \; x_{2m+1} = x_{2m+2} = \ldots = x_n = 0 , \\ \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_4 & . & x_{2m-2} \\ x_2 & x_4 & x_6 & . & x_{2m} \end{vmatrix} = 0 . \end{cases}$$

Queste equazioni determinano sull'$S_m$ che unisce i punti di riferimento 0 2 4 6 ... $(2m)$ una curva normale d'ordine $m$, la quale sarà dunque il luogo dei vertici dei coni del fascio.

Quello spazio $S_m$ appartiene a tutti i coni del fascio, poichè l'equazione (1) è evidentemente soddisfatta per $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0$, $x_{2m+1} = x_{2m+2} = \ldots = x_n = 0$. L'$S_{n-1}$ tangente in un punto qualunque di esso ad un cono qualunque del fascio ha l'equazione della forma

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k x_{2k+1} = 0 ,$$

sicchè lo spazio $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0$ tocca lungo quell'$S_m$ tutti i coni. Dunque ritroviamo in questo modo che il luogo dei vertici dei coni di 1ª specie di un fascio è una curva normale di uno spazio generatore comune a questi coni e che lungo questo spazio i coni hanno uno stesso spazio tangente.

**21**. Pei valori di $u:v$ che annullano il determinante di $u\Phi + v\Psi$ le equazioni (3) non sono più soddisfatte soltanto annullando le coordinate che vi entrano, e quindi il sistema delle equazioni (2), (3) diventa indeterminato, e non determina più un solo punto doppio, cioè un vertice, del cono (1), ma bensì una retta doppia, od un piano doppio, ecc., come sostegno di

quel cono, che ora viene ad essere di specie superiore alla 1ª. Nel caso più generale i valori di $u:v$ per cui il determinante di $u\Phi+v\Psi$ si annulla sono tanti quante le variabili contenute in questa forma, cioè $n-2m$. Dunque, in generale, in un fascio di coni di 1ª specie i cui vertici formino una $C^m$ vi sono $n-2m$ coni di 2ª specie (V. n. 16).

**22**. Lo spazio tangente $x_1=x_3=x_5=\ldots=x_{2m-1}=0$ comune al fascio di coni taglia questo fascio (1) secondo quadriche la cui equazione è appunto

$$u\Phi+v\Psi=0\ ,$$

cioè secondo un fascio di coni di specie $m+1$ aventi per sostegno comune l'$S_m$ congiungente i punti $0\ 2\ 4\ 6\ldots(2m)$. Le particolarità che può avere questo fascio (od il fascio di quadriche non degeneri in cui esso è tagliato da un $S_{n-m-1}$) ed in particolare i suoi invarianti assoluti dànno precisamente *tutte* le particolarità e gl'invarianti assoluti del fascio di coni di 1ª specie considerato, come mostra l'equazione (1).

## *Rappresentazione analitica dei fasci di coni di 2ª specie e di specie superiori.*

**23**. Dall'equazione canonica (1) del fascio di coni di 1ª specie si deduce facilmente l'equazione canonica di un fascio di coni di specie superiore. In fatti supponiamo che nella (1) anche la forma $u\Phi+v\Psi$ abbia il determinante identicamente nullo, qualunque siano $u$, $v$: allora anche ad $u\Phi+v\Psi$ si potrà dare una forma analoga al 1° membro della (1), sicchè l'equazione (1) del nostro fascio di coni prenderà la forma:

$$(1')\ldots\quad\left\{\begin{aligned}&\left(u\sum_{k=0}^{k=m-1}x_{2k}\,x_{2k+1}+v\sum_{k=0}^{k=m-1}x_{2k+1}\,x_{2k+2}\right)\\&+\left(u\sum_{k=m}^{k=\mu-1}x_{2k+1}\,x_{2k+2}+v\sum_{k=m}^{k=\mu-1}x_{2k+2}\,x_{2k+3}\right)\\&+(u\Phi'+v\Psi')=0\ ,\end{aligned}\right.$$

dove $\Phi'$, $\Psi'$ sono forme quadratiche di $x_{2\mu+2}$, $x_{2\mu+3}$, ..., $x_n$. In questo caso le equazioni (2), (3) ci mostrano che il nostro fascio si compone non più di coni di 1ª specie, ma di coni di 2ª specie e per ciascun valore di $u:v$ esse ci determinano la retta che è sostegno del corrispondente cono. Quelle equazioni ci danno ora in luogo delle (4):

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0\,, \quad x_{2m+2} = x_{2m+4} = \ldots = x_{2\mu} = 0\,,$$
$$x_{2\mu+2} = x_{2\mu+3} = \ldots = x_n = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 & \cdot & x_{2m-4} & x_{2m-2} & x_{2m+1} & x_{2m+3} & \cdot & x_{2\mu-1} \\ x_2 & x_4 & \cdot & x_{2m-2} & x_{2m} & x_{2m+3} & x_{2m+5} & \cdot & x_{2\mu+1} \end{vmatrix} = 0\,,$$

e ci mostrano quindi che il luogo delle rette costituenti il sostegno dei coni di 2ª specie del fascio è una rigata razionale (a 2 dimensioni) d'ordine $\mu$ contenente curve direttrici normali degli ordini $m$ e $\mu-m$ (*), e appartenente all'$S_{\mu+1}$ che congiunge i punti di riferimento $0\ 2\ 4 \ldots (2m)\ (2m+1)\ (2m+3) \ldots (2\mu+1)$, che è uno spazio generatore comune a tutti i coni.

**24**. L'$S_{n-1}$ tangente in un punto qualunque di quell'$S_{\mu+1}$ a uno dei coni ha l'equazione della forma

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k\, x_{2k+1} + \sum_{k=m}^{k=\mu-1} b_k\, x_{2k+2} = 0\,;$$

quindi l'$S_{n-\mu}$ tangente lungo quell'$S_{\mu+1}$ ad ogni cono del fascio è uno stesso, ossia è per tutti lo spazio

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = x_{2m+2} = x_{2m+4} = \ldots = x_{2\mu} = 0\,.$$

---

(*) V. la nostra nota *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti della R. Accad. di Torino, vol. XIX, Febbraio 1884). In essa abbiamo mostrato come in uno spazio lineare a $\mu+1$ dimensioni le rigate razionali d'ordine $\mu$ formino varie specie (ciascuna delle quali non ha invarianti assoluti) distinte tra loro per l'ordine minimo delle curve direttrici in esse contenute. Questi risultati si estendono con ragionamenti affatto analoghi a quelli ivi usati alle superficie ad $r$ dimensioni composte di $\infty' S^{r-1}$: in un $S_\nu$ tali superficie di ordine $\nu-r+1$ non si distinguono tra loro che per gli ordini minimi di curve direttrici in esse contenute. Abbiamo mostrato ciò pel caso di $r=2$ nella nota citata: ci occuperemo del caso di $r=3$ prossimamente in una nuova nota.

Questo taglia il fascio (1′) dei coni di 2ª specie in un fascio di coni ad $n-\mu-1$ dimensioni di specie $\mu+2$ aventi per sostegno comune quell'$S_{\mu+1}$ e per equazione

$$u\Phi'+v\Psi'=0.$$

Ai valori di $u:v$ che annullano il determinante di $u\Phi'+v\Psi'$ corrispondono nel fascio coni di 3ª specie o di specie superiore. Nel caso più generale quella forma contenendo $n-2\mu-1$ variabili vi sono altrettanti coni di 3ª specie nel fascio. Ma in casi particolari alcuni di questi potranno coincidere in un cono di 3ª specie od anche di specie superiore: ciò dipenderà dal determinante di $u\Phi'+v\Psi'$ e dai suoi subdeterminanti e si potrà quindi giudicare considerando quel fascio di coni di specie $\mu+2$ in cui il dato fascio è tagliato dall'$S_{n-\mu}$ tangente lungo l'$S_{\mu+1}$.

**25.** Potrebbe la forma $u\Phi'+v\Psi'$ avere ancora il determinante identicamente nullo; allora il fascio si comporrà di coni di 3ª specie e ponendo $u\Phi'+v\Psi'$ sotto forma analoga alla (1) e poi sostituendo nella (1′) si avrà una rappresentazione canonica dei fasci di coni di 3ª specie. E così continuando vediamo in questo modo quale sia l'equazione canonica di un fascio di coni di specie qualunque $r$, e quell'equazione ci conduce a ritrovare i risultati prima ottenuti sinteticamente. Ma inoltre noi veniamo così a giustificare pienamente quanto avevamo detto sulla fine del n° 19 ed otteniamo la seguente importante proposizione, che con quelle prima trovate permette di fare una classificazione completa dei fasci di coni quadrici per ogni dato spazio, riducendola in definitiva ad una classificazione di fasci di quadriche generali:

*In un fascio di coni quadrici di specie* r *vi sono due distinte particolarità da considerare:* 1° *il luogo degli* $S_{r-1}$ *che sono sostegni di quei coni; tale luogo è una varietà ad* r *dimensioni (di cui vedemmo alcune proprietà), il cui ordine può variare da un fascio ad un altro e che non presenta altri invarianti che gli ordini delle curve (direttrici) d'ordini minimi in essa contenute.* 2° *Il fascio di coni in cui il dato fascio è tagliato dallo spazio tangente a tutti i coni di questo luogo quel loro spazio generatore comune che è lo spazio (di dimensioni minime) contenente la varietà suddetta: questi nuovi coni*

*hanno per sostegno comune quest'ultimo spazio e tutte le particolarità del loro fascio (come gl'invarianti assoluti) dànno luogo alle varie particolarità (tra cui gl'invarianti assoluti) del fascio dato*) (*).

## *Fasci di coni quadrici negli spazi a* 2, 3, 4 *e* 5 *dimensioni.*

**26.** Come applicazione dei risultati generali ottenuti vediamo quali siano i vari fasci di coni negli spazi lineari a numero di dimensioni $\leqq 5$. Avremo solo da applicare quelli relativi ai fasci di coni di 1ª specie, tranne che per lo spazio a 5 dimensioni; perocchè solo in questo si presenta un fascio di coni di 2ª specie in cui i sostegni non passano per uno stesso punto e che quindi non si può ottenere proiettando un fascio di coni di 1ª specie a minor numero di dimensioni (n. 13).

Per gli spazi ad 1 e a 2 dimensioni vi è poco da dire. Nel primo il fascio di *coni* è costituito da un'involuzione in cui tutte le coppie di punti coincidono in un punto doppio. Nel secondo i fasci di (*coni*) coniche degenerate in coppie di rette o si compongono di coppie di rette aventi comune il punto doppio (involuzione quadratica) oppure hanno per luogo dei punti doppi di quelle una retta comune a tutte le coppie (n. 6) e quindi si compongono di quella e rispettivamente delle rette di un fascio. — Non esiste, propriamente parlando, il fascio di rette doppie (coni di 2ª specie), poichè affinchè due rette doppie determinino un fascio di tali coniche esse devono coincidere (n. 11).

Nello spazio a 3 dimensioni vi sono anzitutto i fasci di coni aventi comune il vertice (od un punto doppio): sono coni di 1ª specie se proiettano da questo punto un fascio ordinario di coniche, mentre sono coni di 2ª specie, cioè coppie di piani, se

(*) Così si potrà distinguere i fasci di coni quadrici di specie $r$ in varie classi a seconda dei caratteri del luogo dei sostegni e della *caratteristica* del fascio di coni d'intersezione collo spazio tangente considerato: allora per ogni data classe di fasci i soli invarianti saranno quelli del gruppo formato da quei coni del fascio che sono di specie superiore ad $r$ (V. il § 3 della 2ª Parte della nostra memoria citata in principio).

proiettano una delle due sorta di fasci di coppie di rette viste dianzi. Si hanno così tutti i fasci di coppie di piani. Quanto ai fasci di coni di 1ª specie (coni quadrici ordinari) vi sono ancora quelli per cui non vi è un vertice comune, ma i vertici hanno per luogo una retta: allora tutti quei coni saranno toccati lungo questa retta da uno stesso piano (n. 6) e quindi si taglieranno ancora secondo una conica. Viceversa, due coni ordinari che si tocchino, lungo una generatrice comune, determinano un tal fascio di coni.

**27.** Nello spazio a 4 dimensioni abbiamo anzitutto i fasci di coni aventi comune un punto doppio, cioè ottenuti proiettando da questo i fasci di quadriche generali ed i fasci di coni (considerati al n. precedente) dello spazio a tre dimensioni. Otteniamo dunque: il fascio di coni di 2ª specie aventi comune la retta di sostegno (e in particolare il fascio di coppie di spazi ordinari); il fascio di coni di 2ª specie, le cui rette di sostegno formano un fascio nel cui piano (piano generatore comune a tutti quei coni) tutti i coni hanno comune lo spazio (ordinario) tangente; il fascio di coni di 1ª specie aventi comune il vertice (fascio di quadriche determinato da due coni qualunque di 1ª specie, i quali abbiano comune il vertice).

Ma oltre a queste qualità di coni di 1ª specie ve ne sono altre due corrispondenti al supporre che il luogo dei vertici sia una linea di 1° o di 2° ordine. Se quel luogo è una retta, allora essa appartiene a tutti i coni, i quali saranno toccati lungo essa da uno stesso spazio. Se invece il luogo dei vertici è una conica, il piano di essa apparterrà a tutti i coni e un tal fascio sarà appunto determinato da due coni di 1ª specie arbitrari aventi comune un piano (*).

(*) In un lavoro sulle superficie di quarto ordine (dello spazio ordinario) che verrà presto pubblicato nei *Mathematische Annalen* abbiamo discusso verso la fine le superficie basi dei fasci di coni di prima specie dello spazio a 4 dimensioni; superficie di cui una soprattutto è notevole, come quella che è di quarto ordine dotata di una retta doppia (e di nessun' altra retta) e di $\infty^2$ coniche poste negli spazi passanti per questa: la proiezione di quella superficie su uno spazio ordinario è (come mostrammo in quel lavoro) la superficie di STEINER di quarto ordine e terza classe, oppure qualcuno dei suoi casi particolari.

**28.** Nello spazio a 5 dimensioni vi sono i seguenti fasci di coni (applicando quanto si è trovato or ora pei fasci di coni dello spazio a 4 dimensioni ed inoltre i soliti teoremi generali):

Il fascio di coni di 3ª specie aventi comune il piano di sostegno.

Il fascio di coni di 3ª specie i cui piani di sostegno formano un fascio e che si compone di coni toccati lungo uno spazio a 3 dimensioni comune (lo spazio contenente quel fascio di piani) da uno stesso $S_4$.

Il fascio di coni di 2ª specie aventi comune la retta di sostegno.

Il fascio di coni di 2ª specie le cui rette di sostegno formano un fascio, cioè composto di coni toccati lungo un piano generatore comune (contenente quel fascio) da uno stesso $S_4$.

Il fascio di coni di 2ª specie aventi comune un $S_3$: le rette costituenti i sostegni di quei coni sono in questo spazio ordinario generatrici di una quadrica ordinaria (n. 12), o, come caso particolare, di un cono quadrico ordinario.

Il fascio di coni di 1ª specie aventi il vertice comune.

Il fascio di coni di 1ª specie i cui vertici formano una generatrice comune a tutti e lungo cui essi sono toccati da uno stesso $S_4$.

Il fascio di coni di 1ª specie i cui vertici hanno per luogo una conica: quei coni contengono il piano di questa conica e sono toccati lungo esso da uno stesso $S_3$.

Torino, 18 Maggio 1884.

Il Socio Cav. Professore A. Naccari, condeputato col Socio Cav. Prof. G. Basso ad esaminare il lavoro del sig. Dott. G. Vicentini « *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni alcooliche di alcuni cloruri* », presentata nella precedente adunanza, legge la seguente

## RELAZIONE.

Finora le soluzioni dei sali nell'alcool sono state pochissimo studiate rispetto alla loro conducibilità elettrica. Non sono a nostra conoscenza che lo studio della resistenza elettrica delle soluzioni di $KOH$ in alcool assoluto, fatto dal Guglielmo, e quello fatto dal Lenz sulle soluzioni di vari sali in miscugli di acqua ed alcool. Per tal motivo l'autore si è proposto di determinare la conducibilità delle soluzioni di vari sali nell'alcool assoluto.

Il metodo seguito nelle esperienze è quello già usato dal Kohlrausch per le soluzioni acquose, vale a dire consiste nell'impiego di correnti indotte alternate e della solita disposizione del ponte di Wheatstone. Però in luogo dell'elettrodinamometro di Weber l'autore ha impiegato quello che il Professore Bellati ha suggerito per le correnti alternate molto deboli. Le prove fatte dimostrano che l'elettrodinamometro impiegato, il quale in queste esperienze serve solo a far conoscere se una delle diagonali del quadrilatero di Wheatstone è percorsa da corrente e a dare un'indicazione sulla sua grandezza, soddisfa alle condizioni di sensibilità e di esattezza richieste da questo genere d'indagini. I corpi studiati, sette cloruri puri ed anidri, furono tutti disciolti nell'alcool assoluto. La concentrazione della prima soluzione di ogni sale venne determinata mediante analisi volumetrica.

Dalle numerose esperienze, i risultati delle quali sono raccolti in apposite tabelle e dei quali viene data una rappresentazione grafica, l'autore ha dedotto le seguenti conclusioni:

1) Le soluzioni dei sali nell'alcool etilico sono molto più resistenti delle corrispondenti soluzioni acquose.

2) Anche per soluzioni diluitissime la conducibilità cresce più lentamente della concentrazione.

3) Per i sali molto solubili nell'alcool, la conducibilità raggiunge un massimo per un determinato grado di concentrazione.

4) Dei cloruri studiati sono più conduttori gli alcalini; vengono poscia con conducibilità molto inferiore i cloruri delle terre alcaline ed infine i cloruri dei metalli pesanti.

5) Per soluzioni diluitissime contenenti egual numero di molecole di sali, i cloruri di $Li$ e di $NH_4$ hanno pressochè eguale conducibilità.

6) La conducibilità dei sali in soluzioni alcooliche non è legata da alcuna relazione semplice con quella delle corrispondenti soluzioni acquose.

7) I coefficienti di variazione della resistenza al variare della temperatura sono alquanto più piccoli di quelli che spettano alle soluzioni acquose; tendono a limiti alquanto diversi, comuni però ad alcuni gruppi.

8) Analogamente alle soluzioni acquose i detti coefficienti che dapprima diminuiscono colla concentrazione delle soluzioni, per grandi diluizioni tornano ad aumentare alquanto.

9) Non esiste alcun rapporto semplice fra la solubilità dei sali nell'alcool e la loro conducibilità elettrica.

Tanto per l'importanza dell'argomento, quanto per l'abilità e la diligenza, con cui furono condotte le esperienze, i sottoscritti propongono la lettura alla Classe di questa memoria.

G. Basso.

A. Naccari *relatore.*

La Classe approva la conclusione dei Commissari, e, dopo averne udita la lettura, approva la pubblicazione del lavoro del sig. Dott. G. Vicentini nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio Cav. Prof. Giulio Bizzozero presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. G. D'Ajutolo, Assistente al Laboratorio di Anatomia patologica nella R. Università di Bologna,

# INTORNO AD UN ESEMPLARE

DI

# CAPSULA SOPRARENALE ACCESSORIA

## SUL CORPO PAMPINIFORME DI UN FETO.

Se lo studio delle capsule soprarenali accessorie può dirsi abbastanza ricco di osservazioni e di lavori pregevoli, esso però è ancor lungi dall'essere esaurito, non solo per la possibile scoperta di nuove sedi, in cui tali organi potranno rinvenirsi, ma altresì per la soluzione di qualche quesito concernente la loro origine e la loro struttura. Ora avendone potuto osservare un caso, che può giovare all'incremento di tale studio, credo di far cosa non inutile, rendendolo di pubblica ragione.

Il giorno 2 Settembre 1883 nel sezionare un feto a termine, morto d'apoplessia, con grande mio stupore vidi sul corpo pampiniforme sinistro un corpuscolo (Fig. I *C*), di color rosso-scuro e della grandezza di un buon fagiuolo, il quale era collocato dappresso all' orificio interno del canale inguinale, mentre il testicolo corrispondente era già disceso nello scroto. Il corpicciuolo aveva forma elissoidale un po' schiacciata dall' avanti all'indietro, e col maggior diametro diretto dal basso all'alto e un po' dall' interno all'esterno. Esso inoltre aveva, dietro a sè, il plesso pampiniforme, a destra il dotto deferente (*D*), a sinistra alcune glandulette linfatiche, e veniva fissato in quel sito,

oltrechè da' vasi (turgidi di sangue), anche dal peritoneo, il quale gli costituiva una specie di mesentere. Misuratolo, trovossi lungo mm. 22, largo 6, spesso 4 ½.

Quel corpicciuolo possedeva un'arteria e due vene (Fig. II). La prima (*A*), di provenienza dalla spermatica interna, si distribuiva alla superficie esterna di esso; le altre erano distinte in una vena interna ($V^1$) e in una inferiore ($V^3$), entrambe in rapporto col plesso pampiniforme (1). Questi vasi presentavano un decorso affatto diverso da quello dei vasi spermatici, perchè l'arteria si portava in fuori e in alto, dovechè le vene per la massima parte dall'alto al basso.

Tagliato il corpicciuolo suddetto trasversalmente al suo asse longitudinale, la superficie di sezione (Fig. III *St*) tosto si mostrò di colorito rosso-bruno; ma poscia, quando un po' di sangue fu scolato, si distinse in due zone, di cui la più esterna, o corticale, di color gialliccio, e la più interna, o midollare, di color bruno-scuro, con una cavità nel centro a forma di canale, che era posta lungo il maggior asse dell'organo. Questa cavità, del diametro di circa ½ mm. era evidentemente in comunicazione diretta colla vena posta al lato interno del medesimo mediante un vaso che lo attraversava lungo il diametro minore, e che era rimasto longitudinalmente inciso e così convertito in un solco (*S*) molto ben visibile.

Al microscopio si osservò una capsula fibrosa (Fig. IV, *I*) all'esterno dell'organo, abbastanza grossa, nella cui spessezza si riconoscevano frequenti vasi arteriosi molto dilatati dal sangue e perciò molto ben visibili; alcuni uno de' quali (*A*) scorrevano parallelamente alla sua faccia interna, inviando con una certa simmetria rami verso il centro dell'organo, i quali, insieme colle fibre che partivano dalla capsula suddetta, costituivano altrettanti sepimenti longitudinali (*E*) a breve distanza fra loro.

Questi sepimenti nella porzione corticale (*C*) limitavano il contenuto in tante logge quasi uniformi, arcuate esternamente, dirette verso il centro e lunghe circa i tre quinti del raggio; e poscia formavano nella parte più interna le pareti di tanti

(1) Gli altri rami venosi $V^2$, $V^4$ e $V^5$ per brevità non sono stati descritti nel testo; ma basta dare un'occhiata alla figura per rilevarne facilmente il loro decorso.

alveoli che avevano forma e grandezza varia (*H*), costituendo così la trama della porzione midollare (*M*) dell'organo.

Il contenuto, tanto delle logge corticali (*G*) quanto degli alveoli midollari (*N*), era costituito da cellule più o meno grandi con grosso nucleo granuloso, le quali offrivano il protoplasma infiltrato di granuli e non di rado avvolto da membrana. Esse non avevano una forma costante, variando dalla ellittica alla poligonale, ed offrivano la differenza di colorarsi, col bicromato di potassa, bene nella parte midollare e pochissimo nella parte corticale, ove poi apparivano più piccole e stipate che nella sostanza midollare. Tanto però nell'una quanto nell'altra sostanza in numero diverso, da una a più, venivan comprese da un fino reticolo, il quale divideva le logge e le areole suddette in tanti spazi più piccoli, ed appariva manifesto, specialmente con ingrandimenti più forti, in tutti quei punti ove le cellule si eran staccate.

Oltre a ciò, tanto sui setti quanto nelle areole, si vedevano dei granuli di diversa grandezza (*L*), i quali, molto numerosi nella sostanza midollare, andavan scemando nella parte corticale. Di essi la maggior parte era costituita da gocciole di grasso e da granuli albuminoidi, come risultò alla reazione coll'etere e coll'acido acetico, e la parte rimanente rappresentata da globuli bianchi e rossi del sangue, i quali ultimi talora si mostravano in tanta copia nella sostanza corticale da formare veri focolai emorragici. Sì gli uni poi come gli altri, egualmente che la dilatazione vascolare, derivavano indubitatamente dalla forte stasi, che notavasi in questo e negli altri organi del feto.

Finalmente nel centro si osservava, che la cavità già notata (Fig. III *C*) per la costituzione delle sue pareti era da ritenersi una gran vena (Fig. IV *D*), a cui mettevan capo le altre vene minori (*V*), e da cui prendeva origine quel vaso trasversale (Fig. III *S*), che si continuava nella vena interna accennata superiormente.

Ora, che quest' organo fosse una capsula soprarenale accessoria, io credo che non vi sia alcun dubbio. Primieramente, perchè le cellule, oltre all'esser fornite di grande nucleo e protoplasma granuloso, avevano la caratteristica di colorarsi bene nella sostanza midollare col bicromato di potassa e pochissimo nella corticale, come si osserva nelle capsule soprarenali normali. In secondo luogo, perchè nella sostanza corticale le cellule stesse eran disposte a cordoni e tenute in sito da un fino reticolo, che era mani-

festissimo anche nella parte midollare. Finalmente. perchè (come fu dimostrato dal Prof. Taruffi (1) nelle capsule normali) la circolazione arteriosa si faceva dalla periferia verso il centro, ove trovavasi una gran vena, a cui mettevano foce ad angolo retto le vene minori dell'organo.

Ciò premesso, se si paragona quest'esemplare con tutti quelli di capsule soprarenali accessorie noti finora, si trova subito una differenza molto notevole nella *sede* da esso occupata sul corpo pampiniforme e da niun altro mai rinvenuta. Difatti, le medesime furono trovate: sulla superficie o dentro alle capsule normali da molti; nel plesso solare, renale, ecc. dal Kokitanski (1) e dal Brigidi (2); sulla vena capsulare dal Duvernoi (3); sull'arteria capsulare media destra dal Morgagni (4), e nel legamento largo dell'utero dal Marchand (5).

Volendo poi spiegare come la capsula da me descritta si trovasse in quel sito, egli è da ammettere che essa, nel periodo embrionale, avendo prese aderenze col plesso venoso spermatico (che allora è molto in alto nell'addome), siasi staccata dal blastema delle capsule soprarenali normali e sia stata successivamente portata in basso dal testicolo che discendeva e dalla vena spermatica che si allungava. Simile spiegazione venne data dal Marchand pei casi suoi, e che nel mio vien resa anche più verosimile dalla speciale direzione dei vasi dell'organo, come ho avvertito di sopra.

Una seconda differenza, sebbene meno notevole della precedente, è data dalla *grandezza* di quest' esemplare in confronto con quella degli altri; perocchè eccettuato il caso del Morgagni

---

(1) Taruffi, *Sulla struttura delle capsule soprarenali.* Bollettino delle Sc. med. di Bologna. Anno 1866, vol. II, pag. 404. Le figure sono riportate dallo stesso Bollettino. Anno 1873, serie V, vol. 16, pag. 70.

(1) Kokitanski, *Lehrbuch der path. Anatomie.* 1861, Bd. III, s. 381.

(2) Brigidi, *Delle capsule soprarenali accessorie.* Lo Sperimentale (Giornale medico). Firenze 1882, fasc. 12.

(3) Duvernoi, *De capsulis renalibus Eustachii in Commentarii Acad. Sc. Imp. Petropolitanae.* 1751, t. XIII, pag. 361, e t. XIV, pag. 205.

(4) Morgagni, *Epist. anat. duodeviginti*, ecc. Pars altera. Venetiis 1740. Epist. XX, c. 43.

(5) Marchand, *Ueber accessorische Nebennieren im Ligamentum latum.* Virchow's Arch., Bd. LXXXXII. Berlin, 1883, s. 11.

(che era uguale al quarto della capsula normale destra), tutti gli altri oscillarono tra le dimensioni di un acino di miglio a quella di un pisello, e quindi inferiori al mio.

Finalmente quest' organo differisce dagli altri pel *colorito*, inquantochè, mentre le capsule accessorie presentaronsi esternamente di color gialliccio (meno due casi del Marchand, nei quali fu rossastro-vivo) qui il colorito fu rosso-scuro, di fegato. Questa differenza però è da ritenersi puramente accidentale, perchè dovuta allo stato apopletico del neonato; il quale stato, come ho fatto notare più su, spiega altresì la dilatazione dei vasi e la presenza delle emorragie nella sostanza corticale dell'organo, come pure la gran copia dei granuli e dei corpuscoli già descritti.

Venendo ora a qualche considerazione rispetto alla origine di questo mio esemplare, io noto come a questo proposito si faccia il quesito: se le capsule accessorie sieno un effetto di eccessivo aumento della sostanza delle capsule soprarenali, o il risultato di una semplice scissione. Mekel dice, che è difficile decidere (1), Brigidi (2) invece, tenendo presente il fatto che le capsule normali erano bene sviluppate nel caso suo, ritiene piuttosto la prima che la seconda ipotesi. Ora io osservo, che anche nel caso mio le capsule normali trovaronsi bene sviluppate; per cui non può accader dubbio, che anche qui si sia trattato di un aumento di sviluppo della sostanza delle capsule soprarenali, piuttostochè di una semplice scissione.

Noto poi, in quanto alla struttura, che nelle descrizioni anatomiche delle capsule accessorie non di rado si è parlato di cavità riscontrata nell'interno delle stesse (Duvernoi (3), Hartmann (4)): cavità, che pel Kühn (5) sarebbe effetto di putrefazione o di manipolazioni, e pel Brigidi invece un fatto fisiologico (6). Ora,

---

(1) Meckel, *Manuale di Anat. gen. descr. e patol.* Versione italiana di Caimi. Milano 1823, t. IV, pag. 440.

(2) Brigidi, Op. cit.

(3) Duvernoi, Op. cit.

(4) Hartmann, *Anatome renum et partium adjac. non recte se habentium in Miscellanea curiosa seu Ephem. med. phys. etc.* Norimbergae, 1689. Dec., II, an. VII, obs. XXII.

(5) Kühn, *Ueber das Vorkommen von accessorische Nebennieren. Zeitsch. f. rat. Med.* Leipzig et Heidelberg, 1866. Bd. XXVIII, s. 146.

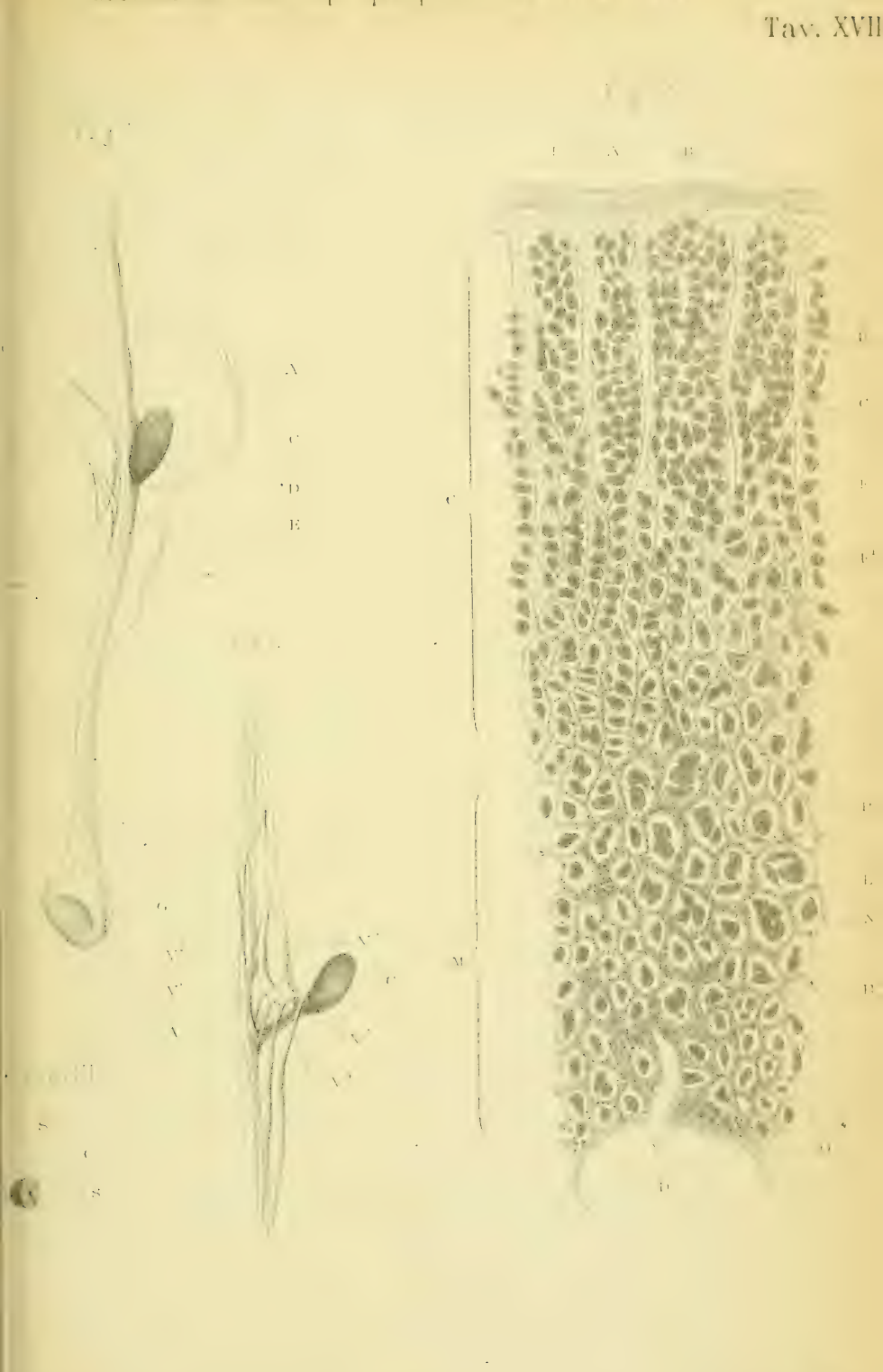
(6) Brigidi, Op. cit.

avendola trovata anch'io e con tutti i caratteri di una vena centrale molto ingrandita, reputo che altrettanto debba pensarsi anche delle altre, salva qualche eventuale eccezione, che, come tale, non può infirmare il mio giudizio.

Bologna, 18 Aprile 1884.

D.re G. D'AIUTOLO - Intorno ad un esemplare di capsula soprarenale accessoria sul corpo pampiniforme di un feto.

Tav. XVII



Maccaferri

Lo stesso Socio Bizzozero presenta ancora e legge il seguente lavoro del sig. G. Pisenti, Studente di medicina nella R. Università di Bologna.

SULLA

# CICATRIZZAZIONE DELLE FERITE DEL RENE

E SULLA

# RIGENERAZIONE PARZIALE DI QUEST' ORGANO.

Gli studi compiuti in questi ultimi anni intorno alle rigenerazioni e neoformazioni di organi e di tessuti, hanno condotto alla conclusione che la perdita di sostanza di un organo o di un tessuto può venire in parte compensata da altra di neoformazione. Così le ricerche sulle asportazioni parziali del fegato e della milza, mostrarono che la soluzione di continuo, oltre di essere riempita da connettivo cicatriziale, conteneva degli elementi parenchimali neoformati, identici per caratteri istologici ai vecchi elementi dell'organo. Pel rene, nessuno studio sperimentale venne di recente, per quanto è a mia conoscenza, a dilucidare il modo con cui avviene la cicatrizzazione delle sue ferite, a sè in esse si riscontrino i fatti di neoformazione, analoghi e quelli della milza e del fegato: solo il Tillmanns (1) alcuni anni fa studiando il modo di cicatrizzazione delle ferite di vari organi, quali il fegato, la milza, i reni, in questi ultimi non rinvenne alcun processo neoformativo di tubuli e di glomeruli oltre il semplice connettivo cicatriziale.

(1) Tillmanns, *Experimentelle und anatomische Untersuchungen über Wunden, der Leber und Nieze.* Wirchow's Arch., Bd., LXXVIII, 1879.

Nè le ricerche anatomo-patologiche furono più numerose e più concludenti. Abbastanza recentemente il Petrone (1) studiando quello che avveniva nei reni in seguito a processi distruttivi da infarti, gomme, cancro, tubercolo, ecc., credette di trovare neoformazione di tubuli e di glomeruli derivante da proliferazione dei vecchi elementi.

Colle presenti ricerche sperimentali cercai per quanto mi fu possibile di risolvere la questione: ed a tal fine operai parecchi conigli, asportando un pezzetto cuneiforme di parenchima renale, con affilato rasoio, dal rene lussato fuori della cavità addominale per ferita lombare, senza lesione od apertura del peritoneo.

Per vecchi studi, è noto che le ferite d'arme da taglio negli organi, a meno che non siano stati lesi grossi vasi, non sono mai mortali, essendo l'emorragia parenchimale sempre di lieve importanza: da ciò il buon successo de' miei sperimenti.

La ferita esterna, guarì la massima parte delle volte, per prima intenzione; altre poche volte per seconda, avendosi in tal caso abbondante suppurazione estendentesi sino al rene, il quale veniva in tal modo a partecipare al processo suppurativo. Gli animali vennero uccisi a varie epoche dalla praticata operazione, avendo le esperienze raggiunto una durata massima di 75 giorni ed una minima di 3. I reni vennero induriti coi soliti mezzi, e tagliati al microtomo di Thoma. Alcuni vennero iniettati colla massa del Ranvier.

Esaminando le sezioni di un rene in prossimità della ferita, di un esperimento durato 3-4 giorni, si vede: la capsula propria considerevolmente ispessita nel punto ove venne tagliata; un grosso coagulo che riempie quasi totalmente la ferita, più una proliferazione del connettivo della capsula e di quello che circonda i tubuli.

In una fase più avanzata — 7 giorni — si nota che il coagulo venne quasi tutto sostituito da un connettivo di aspetto embrionale; dopo 9 giorni circa, scompare ogni traccia di coagulo ed il connettivo che riempie la ferita, comincia ad apparire diverso a seconda del punto che si esamina. Osservando a piccolo ingran-

(1) Petrone, *La rigenerazione del fegato e del rene per neoformazione dei loro dutti escretori.* Comunicazione preventiva. Morgagni, 1881, fasc. 11-12.

dimento si nota che il connettivo della porzione esterna si mostra fibroso, compatto, a grossi fasci che decorrono paralleli fra loro in direzione trasversa alla ferita e di diretta dipendenza del connettivo capsulare (Fig. 1. *A*), mentre quello del centro e del fondo della ferita appare lasso, molle, mucoso, alcune volte reticolato, come quello di una glandula linfatica con nuclei fortemente colorati, e discreta quantità di protoplasma, e dipendente dalla proliferazione del connettivo pericanaliculare (Fig. 1. *B*).

Il connettivo di un lato di genesi capsulare si fonde con quello del lato opposto, camminando verso il fondo della ferita senza però raggiungerlo venendo arrestato dal processo di neoformazione connettiva che si svolge dal fondo e dai bordi della ferita e nella quale si notano i fatti di neoformazione tubulare e glomerulare che andrò a descrivere.

La neoformazione di elementi renali appare in primo tempo identica tanto pei tubuli che pei glomeruli: nei punti cioè dove avviene, il connettivo si mostra dapprima più lasso più areolare, con nuclei più grossi del comune, circondato tutto intorno da connettivo un po' più spesso.

La genesi dei glomeruli è più semplice di quella dei tubuli. Nel connettivo lasso si vede un accumulo di varia grandezza di elementi *ovali*, uniti alle fibre di connettivo formato dei suoi nuclei *oblunghi;* questi ultimi un po' per volta scompaiono dal centro portandosi alla periferia, ciò che accade quando l'accumulo nucleare assume una forma rotonda. Progredendo la differenziazione di questi elementi, si nota negli stessi una disposizione speciale, nel mentre che una sottile ansa vascolare penetra fra essi, e ravvolgendosi più e più volte costituisce il gomitolo vascolare del glomerulo (Fig. 3. *A*).

In fase più avanzata, dal connettivo che circonda il glomerulo si differenzia la capsula di Bowmann per smagliamento dello stesso, in ultimo si notano i nuclei endoteliali della capsula. Ciò riguardo al processo istologico di sviluppo; che sul luogo di formazione e pel cammino che tiene, la neoformazione glomerulare predilige i bordi ed il fondo della ferita, come i punti nei quali il connettivo si mostra di aspetto embrionale più che in altri.

La neoformazione tubulare si appalesa nelle sezioni longitudinali sotto forma di cordoni cellulari in prossimità di qualche vaso (Fig. 4. *F. F'*) o di accumuli cellulari se la sezione cadde

traversalmente. In queste ultime è più facile a studiarsi il meccanismo di formazione tubulare, la quale si inizia con un'aggruppamento di elementi rotondi, con grosso nucleo e poco protoplasma finamente granuloso, disposti senz'ordine; in una fase un po' avanzata si vede che questi elementi si allontanano fra loro, il connettivo si fa ancor più lasso; quelli assumono l'aspetto di elementi epiteliali, si dispongono circolarmente in modo da andar a costituire il rivestimento epiteliale del nuovo tubulo, mentre una sottile striscia di connettivo all'esterno si fa compatto per servire di sostegno alla parete del tubulo (Fig. 5, 6, 7). Il nuovo tubulino però non potrebbe ancor funzionare se un processo di distruzione di alcuni elementi epiteliali neoformati occupanti il centro del tubulo non entrasse in campo, trasformandoli in una sostanza omogenea simulante i noti cilindri jalini del rene; ed infatti in alcune sezioni trasverse di tubuli neoformati, si vede il loro centro ancor impervio per la presenza di una specie di cilindro jalino, assai colorato dal carminio, il quale evidentemente è destinato ad essere eliminato, come corpo estraneo, appena le parti neoformate possono cominciare l'esercizio delle loro funzioni, se pure non venga distrutto in loco, e quindi assorbito. Anche la neoformazione dei tubuli uriniferi, al pari di quella dei glomeruli, si mostra più accentuata ai bordi e nel fondo della ferita, che non al centro, essendo anche la prima più abbondante della seconda di queste neoformazioni. Accennata così la genesi dei nuovi elementi, non sarà inutile il dare uno sguardo alla sorte che tocca ai vecchi tubuli limitanti la ferita. Essi vennero sottoposti ad un accurato ed attento esame onde osservare se presentavano fatti di moltiplicazione cellulare, avendo usato per queste ricerche i metodi di fissazione e di colorazione indicati dal Flemming, ma senza verun risultato; anzi piuttosto trovai che parecchie volte presentavano il protoplasma degli elementi assai granuloso, che era scomparso il limite fra le singole cellule epiteliali, e che dei cilindri jalini ne occupavano il lume; in una parola in queste ricerche non trovai che dei fenomeni regressivi caratterizzati da un disfacimento granulare, senza verun accenno nei vecchi elementi del parenchima renale a prender parte al processo di riparazione con una esagerazione della loro attività formativa.

Varie cause possono turbare e talora anche sospendere i processi di neoformazioni; delle quali mi basterà accennare la for-

mazione di ascessolini microscopici lungo i bordi, e la presenza di cisti. I primi sono sempre in relazione con processi suppurativi della ferita esterna, nei casi di guarigione per seconda intenzione, le seconde dipendono sia da dilatazioni di tubuli vecchi, sia da dilatazioni della capsula di Bowmann di alcuni glumeruli tagliati nelle loro comunicazioni colle porzioni di tubuli che servono agli atti escretivi; tanto le une che le altre ànno la significazione di cisti da ritenzione (Fig. 8 e 10).

Ad un'altra cosa mi è duopo accennare onde toglier di mezzo dubbi che dall'esame di alcuni preparati potrebbero insorgere.

Questa si riferisce al fatto che alcuni vecchi tubuli della parete dal progredire del connettivo pericanaliculare sono spinti in direzione centrale alla ferita. Però non c'è modo di confondere questi vecchi tubuli con quelli di nuova formazione, per evidentissimi caratteri differenziali dei quali mi basterà l'accennare come in essi si noti un ispessimento notevole della membrana basale e della parete, così che l'epitelio sembra sollevato e staccato dall'amista, mentre in quelli di nuova formazione gli elementi ancora poco protoplasmatici sono intimamente uniti alla membrana di sostegno, e su quella posano, che i vecchi hanno l'epitelio in stadi vari di distruzione, che può arrivare sino al punto da ridursi ad un semplice detrito granulare con resti di nucleo, ed in ultimo a scomparire qualsiasi traccia di resti epiteliali, osservandosi in tali avanzati stadi solo la parete del tubulo circoscrivente un ristretto vano (Fig. 9). Da ciò l'aspetto che assume il connettivo in qualche punto di presentare degli spazi vuotti di varia forma, circuiti da uno strato di connettivo ispessito.

Da ultimo noterò che la neoformazione vasale della cicatrice è in diretto rapporto sia coi vasi della rete capillare intertubulare, sia con quelli di discreto calibro che corrono fra i tubuli retti; i gradi tutti in prossimità alla ferita si mostrano ampi e dilatati.

Da tutte queste osservazioni risulta chiaro il modo di cicatrizzazione delle ferite del rene, ed il processo di neoformazione degli elementi parenchimali, non avendo però potuto completare queste mie ricerche rischiarando un punto importantissimo, il modo cioè col quale i tubuli e i glomeruli neoformati entrano nell'eser-

cizio delle loro funzioni sia indipendentemente da vecchi elementi del rene, sia contraendo stretti rapporti con questi ultimi; ciò che forse avrei potuto fare se circostanze speciali di luogo e di tempo m'avessero consentito una maggior durata ed un maggior numero di sperimenti.

Bologna. Dal Laboratorio di Patologia generale.

# SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. Esp. 8. Iniezione al bleu di Prussia. Sezione longitudinale all'asse della ferita. Neoformazione di tubuli e di glomeruli nel mezzo della ferita. *A*. Connettivo fibroso di genesi capsulare. *B*. Connettivo lasso di genesi pericanaliculare. *C*. Accumulo di elementi rotondi accennanti alla formazione di un tubulo. *D*. Glomerulino in via di formazione. *E*. Grossa ciste occupante il centro della soluzione di continuo, derivante da dilatazione della capsula di Bowmann. Il glomerulo deformato è cacciato rasente alla parete di destra. *F*. Tubuli neoformati in sezione trasversa. Zeiss. Ob. AA. oc. 1.

Fig. 2. Neoformazione di tubuli *A*, *A'*. Bordi della ferita. *B*. Lungo tubulo neoformato in sezione longitudinale nel centro della ferita. *C*. Tubuli retti nel fondo della ferita. Si vede nettamente, al pari che nella fig. 1, che la neoformazione si arresta al punto ove il connettivo più compatto corre trasversalmente alla soluzione di continuo. Zeiss. Ob. AA. Oc. 1.

Fig. 3. Esp. 8. Glomerulo neoformato. *A*. Ansa vascolare iniettata penetrante nell'accumulo di elementi rotondi. *B*. Ammasso di elementi con grosso nucleo rotondo e poco protoplasma. *C*. Connettivo compatto che circonda i detti elementi, e nel quale ancora non vi è differenziata la capsula. *D*. Grosso vaso che sale dal fondo della ferita. Zeiss. Ob. C. Oc. 3.

Fig. 4. *A A'*. Cordoni in sezione longitudinale, formati da elementi con nucleo grosso e poco protoplasma, che danno origine a tubuli. *B*. Uno di questi cordoni in sezione trasversa. *C*. Parete di una ciste. *D*. Connettivo lasso. *E*. *E'*. Vasi sanguigni decorrenti in prossimità dei cordoni cellulari. Zeiss. Ob. C. oc. 3.

FIG. **5**. Tubulo in sezione trasversa nei primi accenni di neoformazione. Accumulo di elementi parte rotondi parte ovali, disposti senz'ordine in mezzo al connettivo lasso. Non c'è traccia di parete. Nel connettivo qualche raro globulo bianco. *B* sinistra un vaso sanguigno. Zeiss. Ob. F. Oc. 3.

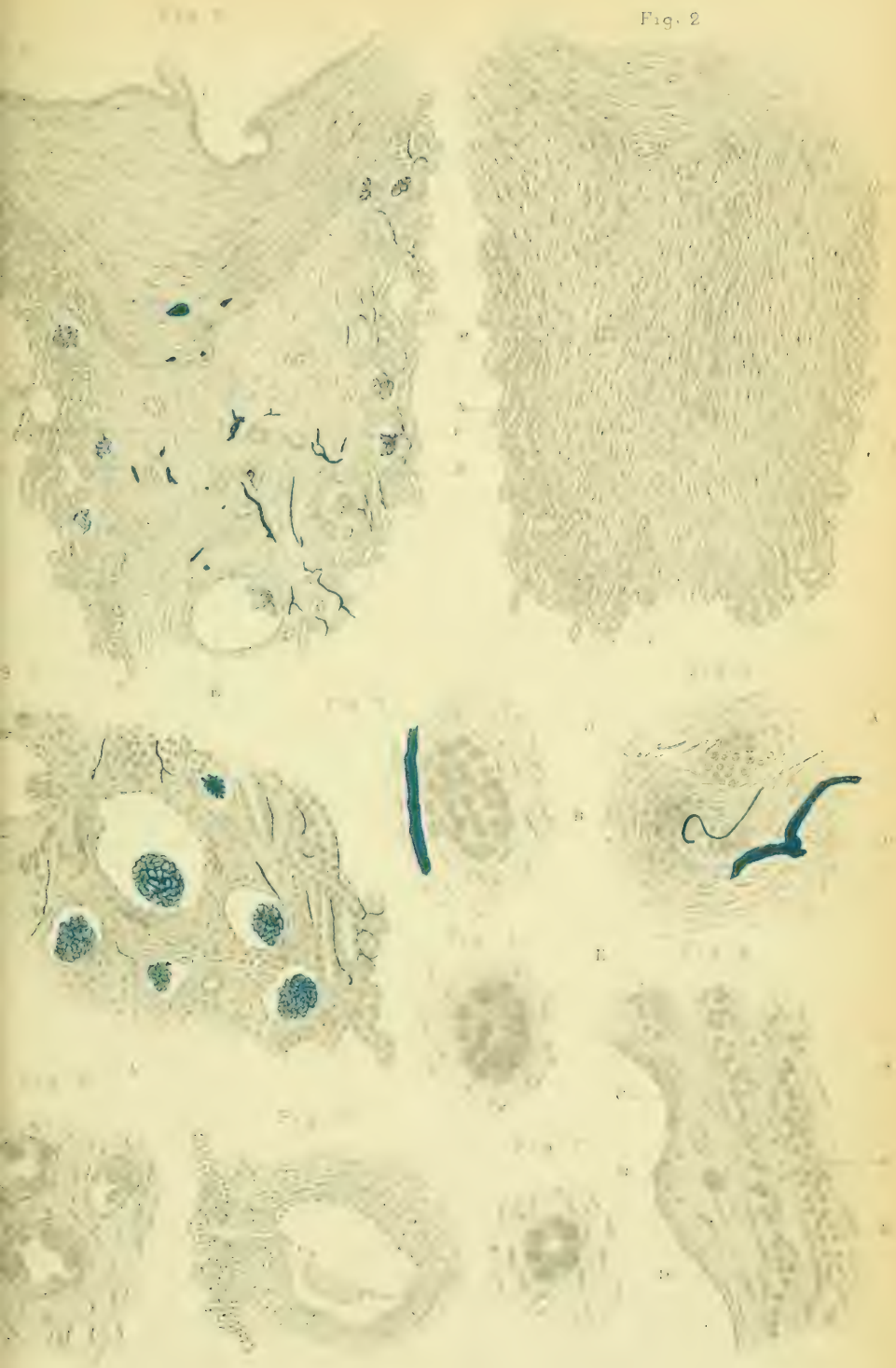
FIG. **6**. Tubulo in sezione trasversa in stadio più avanzato di neoformazione. Gli elementi cominciano a prendere una disposizione regolare e circolare; comincia pure a differenziarsi la parete, Zeiss. Ob. F. Oc. 3.

FIG. **7**. Tubulo in sezione trasversa in fase ancor più avanzata di sviluppo. Gli elementi sono disposti circolarmente, sono più protoplasmatici e delimitano abbastanza bene il lume. La parete è completamente formata. Zeiss. Ob. F. Oc. 3.

FIG. **8**. Ciste in prossimità dei bordi della ferita e verso il centro prodotta da dilatazione della capsula di Bowmann di glomeruli vecchi. *A A'*. Cordoni cellulari che accennano alla formazione di tubuli. Zeiss. Ob. A. Oc. 2.

FIG. **9**. Tubuli spostati verso il centro della ferita ed in varie fasi di distruzione.

FIG. **10**. Ciste prodotta da dilatazione della parete di un tubulo in prossimità dei bordi della ferita. L'epitelio nella ciste è in fasi di distruzione. Zeiss. Ob. AA. Oc. 1.




Torino Lit. Salussolia

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa annuncia la morte del Socio corrispondente Adolfo Wurtz con queste parole:

Alla perdita gravissima da cui fu recentemente colpita la nostra Accademia per la morte dell'illustre nostro Socio Straniero Dumas, dobbiamo pur troppo aggiungerne un'altra non meno grave per la morte immatura avvenuta il 12 Maggio 1884 del Socio corrispondente Adolfo Wurtz.

Non è mio intento di fare oggi un elogio dell'illustre chimico francese; solo desidero richiamare alla vostra memoria i principali lavori pei quali il Wurtz era giustamente considerato tra i più grandi chimici dell'epoca nostra.

Le più importanti scoperte del Wurtz furono quelle delle ammoniache composte, dei radicali alcoolici misti, degli alcool biatomici (glicoli) e dell'ossido di etilene, della sintesi della neorina, dell'idrato d'amilene e dell'aldol.

Il Wurtz nella cattedra di chimica che tenne per quasi trentacinque anni, fu insegnante zelantissimo, eloquente ed efficace. Nemico delle polemiche personali non si peritò mai di sostenere dignitosamente le teorie che egli credeva vere. Amato e venerato da tutti i suoi allievi, alcuni dei quali sono oggi annoverati tra i chimici più riputati, il suo nome vivrà indissolubilmente legato alla storia dei progressi delle scienze chimiche.

In questa adunanza il Socio Cav. Prof. Andrea NACCARI presenta un lavoro manoscritto del signor Dott. Angelo BATTELLI, intitolato « *Sulle proprietà termo-elettriche delle leghe* » *Studio sperimentale;* e il Socio Comm. Prof. Michele LESSONA ne presenta un altro pure manoscritto del Dott. Lorenzo CAMERANO, intitolato « *Monografia degli anfibi urodeli italiani* ». Questi lavori essendo destinati, secondo il desiderio degli autori, ad essere inserti nel volume delle *Memorie*, sono consegnati a due Commissioni accademiche incaricate di esaminarli e riferirne in una prossima adunanza.

*L'Accademico Segretario*
A. SOBRERO.

# SOMMARIO

## Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.


JADANZA — Cannocchiali ridotti . . . . . *Pag.* 583

ZANOTTI-BIANCO — Sopra una vecchia e poco nota misura del semidiametro terrestre . . . . . » 605

SACCO - L'alta valle Padana durante l'epoca delle terrazze in relazione col contemporaneo sollevamento della circostante catena Alpino-Appenninica . . . . . » 609

CAPPA — Sul movimento di rotazione di una massa liquida intorno ad un asse . . . . . » 631

MATTIROLO e MONACO — Sulla composizione di un diallagio proveniente dal distretto di Syssert (monti Urali) . . . . . » 640

DORNA — Lavori dell'Osservatorio astronomico di Torino . . . . . » 644

PRESENTAZIONE di due lavori manoscritti: uno del sig. Dott. Alessandro PORTIS, e l'altro del sig. Dott. Giuseppe VICENTINI . . . » 646

SALVADORI — Relazione sulla Memoria del sig. Dott. Alessandro PORTIS, intitolata « *Contribuzione alla Ornitolitologia italiana* » » 647

TARDY — Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti . . . . . » 649

LORIA — Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale . . . » 663

SEGRE — Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque . . . . . » 692

NACCARI — Relazione sulla Memoria del sig. Dott. G. VICENTINI, che ha per titolo: « *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni alcooliche di alcuni cloruri* . . . . . » 711

D'AJUTOLO — Intorno ad un esemplare di capsula soprarenale accessoria sul corpo pampiniforme di un feto . . . . . » 713

PISENTI — Sulla cicatrizzazione delle ferite del rene e sulla rigenerazione parziale di quest'organo . . . . . » 719

COSSA — Annunzio della morte del Socio Corrispondente Adolfo VURTZ . . . . . » 727

NACCARI — Presentazione di un lavoro manoscritto del sig. Angelo BATTELLI « *Sulle proprietà termo-elettriche delle leghe. Studio sperimentale* » . . . . . » 728

LESSONA — Presentazione di un lavoro manoscritto del Dott. Lorenzo CAMERANO, intitolato « *Monografia degli anfibi urodeli italiani* » » 728

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XIX, DISP. 7ª (*Giugno* 1884)

**Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.**

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

**Giugno**

1884.

# CLASSE

## DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

**Adunanza del 15 Giugno 1884.**

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. ARIODANTE FABRETTI

Il Socio Conte Prof. T. Salvadori, condeputato col Socio Comm. Prof. Michele Lessona ad esaminare la « *Monografia degli anfibi urodeli italiani* » del sig. Dott. L. Camerano, presentata nell'adunanza del 25 Maggio p. p., legge la seguente

## RELAZIONE.

Due anni or sono il Dott. Camerano presentò a quest'Accademia la sua « *Monografia degli Anfibi anuri italiani* ». Col presente lavoro, nel quale si discorre degli Anfibi urodeli, l'Autore dà termine allo studio monografico degli Anfibi italiani.

Questa monografia è fatta secondo il piano e colle stesse norme, rispetto ai confini faunistici dell'Italia e rispetto al modo d'intendere i gruppi tassonomici, che l'Autore seguì nella precedente Monografia. Nel primo capitolo del suo lavoro egli parla delle cause modificatrici degli Anfibi urodeli, insistendo particolarmente sulle modificazioni che si osservano in questi animali per l'adattamento alle condizioni locali. A questo proposito l'Autore fa osservare l'importanza dello studio degli urodeli come di quegli animali che presentano, si può dire, una maggiore plasticità.

Il Camerano discorre pure degli importanti fatti di prolungamento della vita branchiale, e di quelli di correlazione di

sviluppo che frequentemente si osservano negli Anfibi urodeli, e di cui egli trattò di già a lungo in una *Memoria sulla vita branchiale degli Anfibi*, che ebbe l'onore di essere stampata nelle Memorie di questa R. Accademia.

L'Autore passa quindi a discutere i caratteri che servono a definire i diversi gruppi tassonomici degli Anfibi urodeli. A ciò fa seguire la distribuzione geografica delle specie italiane, confrontandola con quella delle specie delle altre regioni circum-Mediterranee. Finalmente, premessi alcuni cenni bibliografici, l'Autore passa a descrivere minutamente gli Anfibi urodeli italiani, che dai suoi studi risultano essere i seguenti:

1. *Spelerpes fuscus* (Bonap).
2. *Salamandrina perspicillata* (Savi).
3. *Euproctus montanus* (Savi).
4. *Euproctus rusconii* (Genè).
5. *Triton vulgaris* (Linn.).
   subsp. *meridionalis* (Boulang.).
6. *Triton alpestris* (Laur.).
7. *Triton cristatus* (Laur.).
   *a.* subsp. *karelini* (Strauch).
   *b.* subsp. *longipes* (Strauch).
8. *Salamandra maculosa* (Laurenti).
9. *Salamandra atra* (Laurenti).

L'autore si è servito pel suo lavoro di un ricco materiale composto di oltre ottocento esemplari, provenienti da moltissime località italiane, e così pure si è valso di molti esemplari non italiani, necessari per la esatta identificazione delle specie. Tanto gli uni, quanto gli altri sono depositati nel Museo di Zoologia di questa nostra Università.

Il lavoro del Dott. Camerano è accompagnato da due tavole nelle quali sono numerose figure rappresentanti le specie descritte e le cose più notevoli relative ai loro caratteri.

I vostri commissari riconoscono nel lavoro del Dott. Camerano le qualità che debbono distinguere le Monografie, cioè compiutezza, ordine e chiarezza; inoltre essi sono lieti di constatare come il medesimo sia un'importante contribuzione alla

conoscenza della fauna del nostro paese. In questi tempi in cui per un esclusivismo antiscientifico si affetta da non pochi un irragionevole disprezzo pei lavori sistematici descrittivi, la Monografia del Dott. Camerano è venuta in buon punto a dimostrare come anche in Italia la zoologia sistematica abbia degni cultori, i quali coi loro studi contribuiscono fatti importantissimi per la conoscenza della distribuzione geografica delle specie, la quale si fonda appunto sulla esatta determinazione delle medesime.

I vostri commissari propongono plaudenti alla Classe la lettura del lavoro del Dott. Camerano.

Michele Lessona.

T. Salvadori, *Relatore*.

Il Socio Cav. Prof. A. NACCARI, condeputato col Socio Cav. Prof. G. BASSO ad esaminare il lavoro del sig. Angelo BATTELLI « *Sulle proprietà termoelettriche delle leghe* », presentato nell'adunanza del 25 Maggio p. p., legge la seguente

## RELAZIONE.

Nella Memoria intitolata « *Sulle proprietà termoelettriche delle leghe* », il sig. BATTELLI si propose di determinare quale sia l'influenza che la temperatura e le proporzioni dei metalli, di cui è composta una lega, esercitano sulle proprietà termoelettriche di essa. A tal uopo, in ciascuna delle serie di esperienze da lui eseguite, presi due metalli, egli compose con essi un certo numero di leghe, facendo sì che dall'una all'altra le proporzioni dei metalli componenti variassero per opportuni intervalli e fossero in relazione semplice con i pesi atomici dei metalli stessi.

Per studiare poi le proprietà termoelettriche delle singole leghe l'Autore formò con ciascuna di esse e con due fili di pakfong una coppia termoelettrica, e la collocò in un adatto apparecchio, col mezzo del quale una delle saldature poteva mantenersi a temperatura costante prossima a quella dell'aria, e l'altra poteva venir riscaldata e mantenuta a temperatura costante. La intensità della corrente veniva misurata da un galvanometro, ed essendo nota la resistenza della coppia, si calcolava la forza elettromotrice. Per ciascuna coppia l'Autore eseguì da sei a sette determinazioni a temperature diverse comprese fra i limiti 15 e 160°. In questo modo il Battelli studiò 11 leghe di *Bi* e *Sb*, 12 di *Cd* e *In*, 10 di *In* e *Pb*, 6 di *Ib* e *Cd*, e costruì graficamente i risultati sperimentali seguendo il metodo del Thomson.

Dall'esame di queste quattro serie di esperienze il Battelli fu condotto ad osservare che le leghe composte di due dati me-

talli, considerate rispetto alle loro proprietà termoelettriche, non prendono fra i due metalli dei posti corrispondenti alla loro composizione, ma mostrano sempre tendenza ad accostarsi più all'uno che all'altro. Suppongasi che per due metalli e per le leghe relative si traccino le curve che danno le forze elettromotrici in funzione delle temperature. Le curve relative alle leghe non si distribuiscono nello spazio interposto fra le curve spettanti ai due metalli in modo conforme alla composizione delle leghe stesse, ma s'accostano di preferenza ed in modo notevole alla curva d'uno di quei metalli, e per certe proporzioni escono da quello spazio passando al di là della curva spettante a quel metallo.

Per qualche lega e per certe condizioni di temperatura questo fatto era stato osservato, ma l'esperienze del Battelli indicano in quali condizioni e in qual misura esso si presenta.

Vedendo poi che esso si verificava per tutte e quattro le serie studiate, il Battelli eseguì altre esperienze per indagare se anche le leghe di *Sb Pb* e di *Sb Sn* presentassero l'accennata particolarità, il che non abbastanza chiaro appariva dall'esperienze già fatte da altri su quelle leghe. Egli trovò confermata la sua previsione, e, siccome per quanto si sa delle leghe di *Zn Sb*, anch'esse devono comportarsi in egual modo, così egli concluse che le sette combinazioni binarie dei metalli qui enumerate, cioè tutte quelle finora esaminate, presentano il fatto accennato.

Noi crediamo che lo studio del Battelli contribuisca utilmente allo studio dei fenomeni termoelettrici e ne proponiamo la lettura alla Classe.

G. Basso.

A. Naccari, *Relatore*.

La Classe accoglie la conclusione dei Commissari, e udita la lettura dei lavori dei signori Dottor L. Camerano e A. Battelli, con regolare votazione ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA presenta e legge il seguente lavoro del sig Dott. Nicodemo JADANZA, Professore di Geodesia nella R. Università di Torino,

# SULLA MISURA

DI UN

# ARCO DI PARALLELO TERRESTRE.

La misura di un arco di parallelo terrestre mediante gli elementi d'una rete geodetica tracciata lungo il medesimo ci sembra non sia esposta nei trattati di Geodesia con tutto il rigore necessario a tal genere di ricerche.

Ci è parso non inutile dare una nuova soluzione ad una quistione così importante per la Geodesia, ora che la differenza di longitudine tra due punti della terra si determina colla massima esattezza.

## I.

Esporremo prima il metodo adoperato da Puissant e seguito da quasi tutti i geodeti posteriori.

Sia (fig. 1) $ACDE\ldots HB$ la rete trigonometrica tracciata lungo il parallelo che passa pel punto $A$. I lati e gli angoli di essa rete si possono considerare come noti, e se in $A$ è stata fatta la determinazione della latitudine e la misura di un azimut (p. es. quello del lato $AC$) si potranno calcolare le latitudini e gli azimut dei differenti vertici di essa rete.

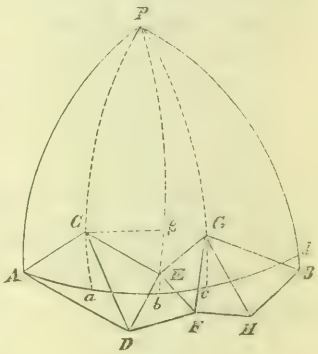


Fig. 1.

Le note formole di Legendre mostrano che la differenza di longitudine tra i due vertici $A$, $C$ della rete trigonometrica si può calcolare (a meno dei termini di quart'ordine) considerando la terra come una sfera di raggio $N$ ($N$ essendo la normale in $A$).

Quindi se $\varphi$, $\varphi'$ sono le latitudini di $A$ e $C$, $\alpha$ l'azimut di $AC$ in $A$, e $\theta$ la differenza di longitudine si avrà, indicando con $s$ il lato $AC$,

$$\operatorname{sen}\theta : \operatorname{sen}\frac{s}{N} = \operatorname{sen}\alpha : \cos\varphi' ,$$

donde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\frac{s}{N} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi'} .$$

Essendo gli archi $\theta$, ed $\frac{s}{N}$ piccolissimi, possiamo porre

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} ,$$

$$\operatorname{sen}\frac{s}{N} = \frac{s}{N} - \frac{s^3}{6N^3} ,$$

quindi

$$\theta = \frac{s}{N} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi'} - \frac{s^3}{6N^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi'} + \frac{s^3 \operatorname{sen}^3\alpha}{6N^3\cos^3\varphi'} \qquad \ldots(1).$$

Immaginiamo condotti i meridiani $PC$, $PE$, ..... essi incontreranno il parallelo di $A$ nei punti $a$, $b$, $c$ ..... Gli archi di parallelo $Aa$, $ab$, ..... che indicheremo con $P_1$, $P_2$, $P_3$, ..... si calcoleranno nel seguente modo:

Evidentemente si ha

$$P_1 = \theta N \cos\varphi ,$$

e quindi per la (1)

$$P_1 = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \left[ s \operatorname{sen}\alpha - \frac{s^3}{6N^2} \operatorname{sen}\alpha + \frac{s^3 \operatorname{sen}^3\alpha}{6N^2\cos^2\varphi'} \right] \qquad \ldots(2).$$

Se $\varphi''$ è la latitudine del vertice $E$, $\alpha_1$ l'azimut di $E$ in $C$ ed $s_1$ il lato $CE$, si avrà (indicando con $P_2'$ l'arco di parallelo $C\beta$)

$$P_2' = \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi''} \left[ s_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - \frac{s_1^3 \operatorname{sen}\alpha_1}{6N'^2} + \frac{s_1^3 \operatorname{sen}^3\alpha_1}{6N'^2\cos^2\varphi''} \right] ,$$

ed osservando che tra $P_2$ e $P_2'$ esiste la relazione

$$P_2 : P_2' = N\cos\varphi : N'\cos\varphi' ,$$

si avrà

$$P_2 = \frac{N \cos \varphi}{N' \cos \varphi'} P_2' ,$$

e quindi

$$P_2 = \frac{N \cos \varphi}{N' \cos \varphi''} \left[ s_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - \frac{s_1^3}{6 N'^2} \operatorname{sen} \alpha_1 + \frac{s_1^3 \operatorname{sen}^3 \alpha_1}{6 N'^2 \cos^2 \varphi''} \right] \ldots (3).$$

Analogamente si calcoleranno $P_3$, $P_4$ . . . e quindi tutto l'arco $A d$. Si avrà una verifica calcolando l'istesso arco di parallelo $A d$ mediante i lati $AD$, $DE$ . . . della rete trigonometrica.

Il metodo precedente non è perfettamente rigoroso, poichè per ottenere le latitudini e gli azimut dei differenti punti della rete trigonometrica è necessario conoscere gli elementi dell'ellissoide terrestre che si tratta appunto di determinare (*).

## II.

Il metodo che noi proponiamo è il seguente:

Sia $A C D \ldots . B$ una triangolazione geodetica lungo il parallelo $A B'$ di cui si vuol conoscere la lunghezza, e nei punti $A$ e $B$ estremi di essa si sieno fatte osservazioni di *latitudine* e d'*azimut*. Cosicchè dell'estremo $A$ si conosce la latitudine, e si conosce pure l'azimut del vertice $C$ sull'orizzonte di $A$. Analogamente la latitudine del punto $B$ è anche nota, come pure l'azimut del vertice $K$ sull'orizzonte di $B$. Immaginiamo la geodetica $A L$ perpendicolare nel punto $A$ al meridiano $P A$, e sieno $a$, $b$, $c$, . . . $L$ i punti d'intersezione di questa geodetica

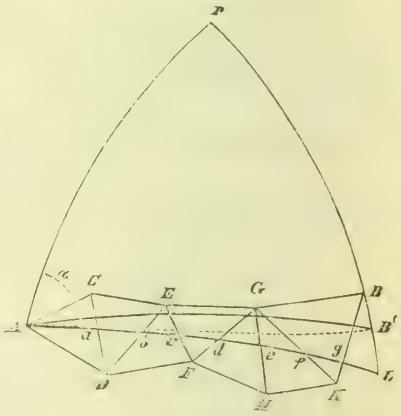


Fig. 2.

(*) Cfr. Francœur, *Géodésie* (Sixième édition, pag. 229): Faye, *Cours d'Astronomie* (Première partie, pag. 319): *Mesure d'un arc du parallèle moyen* (Tome second, pag. 402).

coi differenti lati della rete trigonometrica e col meridiano $PB$ prolungato. L'azimut della geodetica $AL$ nel punto $A$ sarà $90^\circ$, quindi l'angolo $CAa$ del triangolo $AC$ sarà noto perchè complemento dell'azimut di $C$ sull'orizzonte di $A$ che è noto. Quel triangolo adunque è perfettamente determinato giacchè sono noti il lato $AC$ e l'angolo in $C$, e quindi si potranno determinare il primo segmento $Aa$ della geodetica $AL$; il lato $Ca$ e l'angolo $a$. Il triangolo $aDb$ farà conoscere l'altro segmento $ab$ ecc. e finalmente il triangolo $gBL$ farà conoscere l'ultimo segmento $gL$ della geodetica $AL$. Se $\varphi$ indica la latitudine di $A$ e $\varphi_1$ la latitudine di $L$, quest' ultima sarà data dalla relazione

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{s^2}{2\rho N \operatorname{sen} 1''} \qquad \ldots(4),$$

dove $s$ è la geodetica $AL$ e $\rho$ ed $N$ i raggi principali di curvatura dell'ellissoide al punto $A$.

Se indichiamo con $m$ il valore in metri di un secondo di arco di meridiano alla latitudine $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$, l'arco di meridiano $B'L$ che indicheremo con $S'$ sarà dato da

$$S = (\varphi - \varphi_1) . m \qquad \ldots(5),$$

e questo valore di $S$ sarà sempre piccolissimo rispetto ad $s$.

Del triangolo $B'LA$ si conoscono adunque due lati e l'angolo $L$ compreso tra essi: quindi, risolvendolo, si otterrà il terzo lato $AB' = \sigma$ che non è altro se non che la geodetica che unisce gli estremi $A$ e $B'$ dell'arco del parallelo da misurare che indicheremo con $\Sigma$. Sarà pure noto l'angolo in $A$ formato dalle geodetiche $AB'$, $AL$ e quindi l'azimut in $A$ della geodetica $AB'$ che indicheremo con $\alpha$.

Poichè il lato $S$ nel triangolo $AB'L$ è piccolissimo rispetto ad $s$, la geodetica $\sigma = AB'$ potrà essere calcolata mediante la nota formola di Legendre

$$\log \sigma = \log s - M \frac{S}{s} \cos L_* - M \frac{S^2}{2 s^2} \cos 2 L_* - M \frac{S^3}{3 s^3} \cos 3 L_* \ldots(6),$$

in cui $M$ è il modulo dei logaritmi ed $L_*$ è uguale all'angolo $L$ del triangolo $B'LA$ diminuito del terzo dell'eccesso sferoidico.

L'angolo in $A$ di questo stesso triangolo ossia l'angolo $90° - \alpha$ sarà dato dalla nota serie di Delambre

$$90 - \alpha = R'' \left( \frac{S}{s} \operatorname{sen} L_* + \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2}{s^2} \operatorname{sen} 2 L_* + \frac{1}{3} \cdot \frac{S^3}{s^3} \operatorname{sen} 3 L_* \ldots \right) (7).$$

Per la completa soluzione della quistione resta a trovare la differenza $\Sigma - \sigma$ tra l'arco di parallelo $AB'$ e la linea geodetica avente gli stessi estremi; ciò che si ottiene nel seguente modo.

## III.

La geodetica $AB'$ (fig. 2) può considerarsi eguale in lunghezza alla sezione normale condotta per la normale di $A$ e pel punto $B'$. Se indichiamo con $K$ la corda $AB'$, è noto che tra l'arco $\sigma$ di una sezione normale e la corda corrispondente esiste la relazione

$$\sigma = K + \frac{K^3}{24 R^2} + \frac{3 K^5}{640 R^4} - e^2 \frac{K^4}{16 R^3} \cos \alpha \operatorname{sen} 2 \varphi \quad \ldots (8),$$

dove $R$ è il raggio di curvatura della sezione normale il cui azimut è $\alpha$.

Se, come si è detto innanzi indichiamo con $\Sigma$ l'arco di parallelo $AB'$ ed osserviamo che il suo raggio è $N \cos \varphi$ ($N$ è la gran normale corrispondente al punto $A$ la cui latitudine è $\varphi$) dalla (8) si otterrà, ponendo $e^2 = 0$

$$\bar{\Sigma} = K + \frac{K^3}{24 N^2 \cos^2 \varphi} + \frac{3 K^5}{640 N^4 \cos^4 \varphi} \quad \ldots (9),$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma} - \sigma = & \frac{K^3}{24} \left[ \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{R^2} \right] \\ & + \frac{3 K^5}{640} \left[ \frac{1}{N^4 \cos^4 \varphi} - \frac{1}{R^4} \right] + e^2 \frac{K^4}{16 R^3} \cos \alpha \operatorname{sen} 2 \varphi \end{aligned} \right\} \ldots (10).$$

Dalla nota relazione di Eulero

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{N},$$

osservando che si ha prossimamente,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{N}(1+e^2\cos^2\varphi+e^4\cos^4\varphi),$$

si deduce

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1+2e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha+2e^4\cos^2\alpha\cos^2\varphi+e^4\cos^4\varphi\cos^4\alpha}{N^2},$$

e quindi

$$\frac{1}{N^2\cos^2\varphi}-\frac{1}{R^2}=\frac{\tang^2\varphi}{N^2}-\frac{2e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi(1+e^2)+e^4\cos^4\alpha\cos^4\varphi}{N^2} \quad (11).$$

Per ottenere la stessa approssimazione delle (8) e (9) sarà lecito porre

$$\frac{1}{R^3}=\frac{1}{N^3}\ ;\ \frac{1}{R^4}=\frac{1}{N^4},$$

e se osserviamo che

$$\frac{1}{\cos^4\varphi}=(1+\tang^2\varphi)^2,$$

la (10) diventerà

$$\bar{\lambda}-\sigma=\frac{K^3}{24N^2}\tang^2\varphi-\frac{K^3}{24N^2}\left[2e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi(1+e^2)+e^4\cos^4\alpha\cos^4\varphi\right]$$

$$+\frac{3K^5}{640N^4}(2\tang^2\varphi+\tang^4\varphi)+e^2\frac{K^4}{16N^3}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,2\varphi.$$

Per eliminare la corda $K$ nel secondo membro, osserviamo che si ha

$$K=\sigma-\frac{\sigma^3}{24N^2},$$

donde

$$K^3=\sigma^3-\frac{\sigma^5}{8N^2}\ ;$$

quindi si avrà

$$\bar{\Sigma}-\sigma=\frac{\sigma^3}{24\,N^2}\operatorname{tang}^2\varphi\left(1-\frac{\sigma^2}{8\,N^2}\right)$$

$$-\frac{\sigma^2}{24\,N^2}\left[2\,e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi\,(1+e^2)+e^4\cos^4\alpha\cos^4\varphi\right]$$

$$+\frac{3\,\sigma^5}{320\,N^4}\operatorname{tang}^2\varphi+\frac{3\,\sigma^5}{640\,N^4}\operatorname{tang}^4\varphi+e^2\frac{\sigma^4}{16\,N^3}\cos\alpha\operatorname{sen}2\,\varphi\;;$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Sigma}-\sigma=&\frac{\sigma^3}{24\,N^2}\operatorname{tang}^2\varphi\left[1+\frac{\sigma^2}{10\,N^2}\left(1+\frac{9}{8}\operatorname{tang}^2\varphi\right)\right]\\&+\frac{e^2\sigma^4}{16N^3}\cos\alpha\operatorname{sen}2\,\varphi-e^2\frac{\sigma^3}{24N^2}\cos^2\alpha\cos^2\varphi\left[2\,(1+e^2)+e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi\right]\end{aligned}\right\}(12)$$

che è la formola che dà la differenza tra l'arco di parallelo e quello della geodetica che ha gli stessi estremi.

I termini del secondo membro rappresentano tutti quantità piccole, ed il loro calcolo numerico non richiede la conoscenza esatta degli elementi dell'ellissoide terrestre, ma solo valori approssimati di essi.

Per valori di $\sigma$ anche maggiori di *mille chilometri*, i termini che contengono $e^4$ possono essere trascurati, sicchè la formola (12) può essere sostituita dalla seguente

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Sigma}-\sigma=&\frac{\sigma^3}{24\,N^2}\operatorname{tang}^2\varphi\left[1+\frac{\sigma^2}{10\,N^2}\left(1+\frac{9}{8}\operatorname{tang}^2\varphi\right)\right]\\&+\frac{e^2\sigma^3}{8\,N^2}\cos\alpha\cos\varphi\left[\frac{N}{\sigma}\operatorname{sen}\varphi-\frac{2}{3}\cos\alpha\cos\varphi\right]\end{aligned}\right\}\ldots(13).$$

Ponendo per brevità

$$U=1+\frac{\sigma^2}{10\,N^2}\left(1+\frac{9}{8}\operatorname{tang}^2\varphi\right),$$

dalla (13) si deduce, trascurando i termini che contengono $e^2$.

$$\log \Sigma = \log \sigma + M \frac{\sigma^2}{24 N^2} \operatorname{tang}^2 \varphi . U \qquad \ldots (14),$$

la quale può essere adoperata anche per valori di $\sigma$ eguali a *cinquecento chilometri.*

A rendere più spedito il calcolo delle formole precedenti diamo qui una tavola in cui sono registrati i logaritmi di $U$ corrispondenti ai valori di $\sigma$ compresi tra 100 e 1000 chilometri e per i valori di $\varphi$ compresi tra 30° e 70°. Quando l'arco di parallelo, la cui lunghezza si tratta di determinare fosse molto esteso, sarà più conveniente dividerlo in diverse parti e calcolare separatamente ciascuna di esse.

| $\varphi$ | $\sigma=100$ | $\sigma=200$ | $\sigma=300$ | $\sigma=400$ | $\sigma=500$ | $\sigma=600$ | $\sigma=700$ | $\sigma=800$ | $\sigma=900$ | $\sigma=1000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30° | 0.00001 | 0.00006 | 0.00013 | 0.00023 | 0.00037 | 0.00053 | 0.00072 | 0.00094 | 0.00119 | 0.00146 |
| 31 | 0.00001 | 0.00006 | 0.00013 | 0.00024 | 0.00037 | 0.00054 | 0.00073 | 0.00096 | 0.00121 | 0.00150 |
| 32 | 0.00002 | 0.00006 | 0.00014 | 0.00025 | 0.00038 | 0.00055 | 0.00075 | 0.00098 | 0.00124 | 0.00153 |
| 33 | 0.00002 | 0.00006 | 0.00014 | 0.00025 | 0.00039 | 0.00057 | 0.00077 | 0.00100 | 0.00127 | 0.00157 |
| 34 | 0.00002 | 0.00806 | 0.00014 | 0.00026 | 0.00040 | 0.00058 | 0.00079 | 0.00103 | 0.00130 | 0.00161 |
| 35 | 0.00002 | 0.00007 | 0.00015 | 0.00026 | 0.00041 | 0.00059 | 0.00081 | 0.00106 | 0.00134 | 0.00165 |
| 36 | 0.00002 | 0.00007 | 0.00015 | 0.00027 | 0.00042 | 0.00061 | 0.00083 | 0.00109 | 0.00138 | 0.00169 |
| 37 | 0.00002 | 0.00007 | 0.00016 | 0.00028 | 0.00044 | 0.00063 | 0.00086 | 0.00111 | 0.00141 | 0.00174 |
| 38 | 0.00002 | 0.00007 | 0.00016 | 0.00029 | 0.00045 | 0.00065 | 0.00088 | 0.00115 | 0.00145 | 0.00179 |
| 39 | 0.00002 | 0.00007 | 0.00017 | 0.00030 | 0.00046 | 0.00067 | 0.00091 | 0.00118 | 0.00150 | 0.00185 |
| 40 | 0.00002 | 0.00008 | 0.00017 | 0.00030 | 0.00048 | 0.00069 | 0.00093 | 0.00122 | 0.00154 | 0.00190 |
| 41 | 0.00002 | 0.00008 | 0.00018 | 0.00032 | 0.00049 | 0.00071 | 0.00096 | 0.00126 | 0.00159 | 0.00197 |
| 42 | 0.00002 | 0.00008 | 0.00018 | 0.00033 | 0.00052 | 0.00073 | 0.00100 | 0.00130 | 0.00165 | 0.00203 |
| 43 | 0.00002 | 0.00008 | 0.00019 | 0.00034 | 0.00053 | 0.00076 | 0.00103 | 0.00135 | 0.00170 | 0.00210 |
| 44 | 0.00002 | 0.00009 | 0.00020 | 0.00035 | 0.00054 | 0.00078 | 0.00107 | 0.00139 | 0.00176 | 0.00218 |
| 45 | 0.00002 | 0.00009 | 0.00020 | 0.00036 | 0.00056 | 0.00081 | 0.00111 | 0.00144 | 0.00182 | 0.00226 |
| 46 | 0.00002 | 0.00009 | 0.00021 | 0.00038 | 0.00059 | 0.00084 | 0.00115 | 0.00150 | 0.00190 | 0.00234 |
| 47 | 0.00002 | 0.00010 | 0.00022 | 0.00039 | 0.00061 | 0.00088 | 0.00119 | 0.00156 | 0.00197 | 0.00243 |
| 48 | 0.00003 | 0.00010 | 0.00023 | 0.00041 | 0.00063 | 0.00091 | 0.00124 | 0.00162 | 0.00205 | 0.00253 |
| 49 | 0.00003 | 0.00011 | 0.00024 | 0.00043 | 0.00066 | 0.00095 | 0.00130 | 0.00169 | 0.00214 | 0.00264 |
| 50 | 0.00003 | 0.00011 | 0.00025 | 0.00044 | 0.00069 | 0.00099 | 0.00135 | 0.00176 | 0.00223 | 0.00275 |

| $\varphi$ | $\sigma=100$ | $\sigma=200$ | $\sigma=300$ | $\sigma=400$ | $\sigma=500$ | $\sigma=600$ | $\sigma=700$ | $\sigma=800$ | $\sigma=900$ | $\sigma=1000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50° | 0.00003 | 0.00011 | 0.00025 | 0.00044 | 0.00069 | 0.00099 | 0.00135 | 0.00176 | 0.00223 | 0.00275 |
| 51 | 0.00003 | 0.00012 | 0 00026 | 0.00046 | 0.00072 | 0.00104 | 0 00141 | 0.00184 | 0.00233 | 0.00288 |
| 52 | 0.00003 | 0.00012 | 0.00027 | 0.00048 | 0.00076 | 0.00109 | 0.00148 | 0.00193 | 0.00244 | 0.00301 |
| 53 | 0.00003 | 0.00013 | 0.00029 | 0.00051 | 0.00079 | 0.00114 | 0.00155 | 0.00202 | 0.00255 | 0.00316 |
| 54 | 0.00003 | 0.00013 | 0.00030 | 0.00053 | 0.00083 | 0.00120 | 0.00163 | 0.00213 | 0.00269 | 0.00332 |
| 55 | 0.00003 | 0.00014 | 0.00032 | 0 00056 | 0.00087 | 0.00126 | 0.00171 | 0.00224 | 0.00283 | 0.00349 |
| 56 | 0.00004 | 0.00015 | 0.00033 | 0.00059 | 0.00092 | 0.00133 | 0.00180 | 0.00236 | 0.00298 | 0.00368 |
| 57 | 0.00004 | 0.00016 | 0.00035 | 0.00062 | 0.00097 | 0.00140 | 0.00191 | 0.00249 | 0.00315 | 0.00388 |
| 58 | 0.00004 | 0.00016 | 0.00037 | 0.00066 | 0.00103 | 0.00148 | 0.00202 | 0.00263 | 0.00333 | 0.00410 |
| 59 | 0.00004 | 0.00018 | 0·00039 | 0.00070 | 0.00109 | 0.00157 | 0.00214 | 0.00279 | 0.00353 | 0.00435 |
| 60 | 0.00005 | 0.00019 | 0.00042 | 0.00074 | 0.00116 | 0.00167 | 0.00227 | 0.00296 | 0.00374 | 0.00462 |
| 61 | 0.00005 | 0.00020 | 0.00045 | 0.00079 | 0.00124 | 0.00178 | 0.00242 | 0.00316 | 0.00399 | 0.00494 |
| 62 | 0.00005 | 0.00021 | 0.00048 | 0.00085 | 0.00132 | 0.00190 | 0.00258 | 0.00337 | 0.00426 | 0.00526 |
| 63 | 0.00006 | 0.00023 | 0.00051 | 0.00091 | 0.00144 | 0.00203 | 0.00276 | 0.00361 | 0.00456 | 0.00563 |
| 64 | 0.00006 | 0.00024 | 0.00055 | 0.00097 | 0.00152 | 0 00219 | 0.00297 | 0.00388 | 0.00490 | 0.00604 |
| 65 | 0.00007 | 0.00026 | 0.00059 | 0.00105 | 0.00164 | 0.00235 | 0.00320 | 0.00418 | 0.00530 | 0.00651 |
| 66 | 0.00007 | 0.00028 | 0.00064 | 0.00113 | 0.00177 | 0.00254 | 0.00346 | 0.00451 | 0.00570 | 0.00703 |
| 67 | 0.00008 | 0.00031 | 0.00069 | 0.00123 | 0.00192 | 0.00276 | 0.00375 | 0.00489 | 0.00619 | 0.00762 |
| 68 | 0.00008 | 0.00034 | 0.00075 | 0.00134 | 0.00209 | 0.00301 | 0.00409 | 0.00533 | 0.00673 | 0.00830 |
| 69 | 0.00009 | 0.00037 | 0.00082 | 0.00146 | 0.00229 | 0.00329 | 0.00447 | 0.00583 | 0.00736 | 0.00907 |
| 70 | 0 00010 | 0.00040 | 0.00091 | 0.00161 | 0.00251 | 0.00361 | 0.00489 | 0.00640 | 0.00809 | 0.00996 |

# IV.

Le formole precedenti e specialmente la (13) o la (14) permettono di risolvere in un modo semplicissimo il seguente problema di trigonometria sferoidica.

*Date le latitudini di due punti* A *e* B *sull'ellissoide terrestre e la loro differenza di longitudine, calcolare la loro distanza (geodetica), e gli azimut di essa geodetica ai suoi estremi.*

Osservando che un valore approssimato di $\sigma$ è $\Sigma$, dalla (13) si ottiene

$$\sigma = \Sigma \left[ 1 - \frac{\Sigma^2}{24 N^2} \operatorname{tang}^2 \varphi \; U - e^2 \frac{\Sigma^2}{8 N^2} \cos\alpha \cos\varphi \left( \frac{\Sigma}{N} \operatorname{sen} \varphi - \frac{2}{3} \cos\alpha \cos\varphi \right) \right]$$

e poichè, quando la differenza di longitudine tra gli estremi di un arco $\Sigma$ di parallelo è $\theta$, si ha

$$\Sigma = \theta''. N \operatorname{sen} 1''. \cos\varphi \; ,$$

la formola presente diventa

$$\sigma = \Sigma \left[ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{24} U \operatorname{sen}^2 \varphi \\ - e^2 \dfrac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{8} \cos^4 \varphi \cos\alpha \left( \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 1'' - \dfrac{2}{3} \cos\alpha \right) \end{array} \right]$$

e quindi

$$\log \sigma = \log \theta . N \operatorname{sen} 1''. \cos\varphi - M \frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{24} U \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$- M e^2 \frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{8} \cos^4 \varphi \cos\alpha \left( \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 1'' - \frac{2}{3} \cos\alpha \right) .$$

Per $\theta = 10^\circ$ (quando il calcolo si fa a 7 cifre decimali) l'ultimo termine della formola precedente è trascurabile, quindi si può ritenere:

$$\log \sigma = \log \theta . N \operatorname{sen} 1''. \cos\varphi - M \frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{24} U . \operatorname{sen}^2 \varphi \quad \ldots (15).$$

Nella formola precedente $\theta$ è espresso in secondi, $M$ è il modulo dei logaritmi volgari ed $U$ è dato dalla tavola precedente. In essa tavola si entra cogli argomenti $\log \sigma$ e $\varphi$.

Sieno ora $A$ e $B$ due punti dell'ellissoide di rotazione le cui latitudini sieno $\varphi$, $\varphi'$ e sia $\theta$ la loro differenza di longitudine. Sul meridiano $PA$ del punto $A$ prendiamo il punto $B'$ avente la stessa latitudine $\varphi'$ di $B$, e consideriamo il triangolo $AB'B$ che viene così a formarsi mediante le geodetiche $BB'$, $AB$, $AB'$.

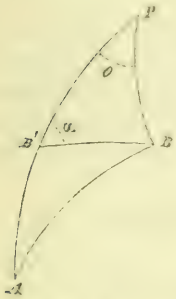


Fig. 3.

Poniamo per semplicità

$$AB' = S\,; \qquad BB' = V\,; \qquad AB = s\,;$$

la geodetica $BB' = V$ si calcolerà mediante la (15) e si otterrà

$$\log. V = \log \theta . N' \operatorname{sen} 1''. \cos \varphi' - M \frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{24} U \operatorname{sen}^2 \varphi' \quad \ldots (16).$$

Il lato $AB' = S$ verrà dato dalla nota formola (*)

$$\log S = \log (\varphi' - \varphi) \rho_m \operatorname{sen} 1'' + H(\varphi' - \varphi)^2 \quad \ldots (17).$$

Per ottenere l'angolo $BB'A$ del triangolo $AB'B$, si calcoleranno $m$ ed $m'$ mediante le formole

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} m = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}\,,$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} m' = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen} \varphi'\,,$$

e quindi si avrà:

$$\textit{Angolo } AB'B = 180 - \alpha = 90 + \frac{1}{2} m' + \frac{e^2}{24} \theta^2 \operatorname{sen} \varphi' \cos \varphi' \operatorname{sen}^2 1'' \quad (18).$$

(*) Cfr. una Memoria di N. Jadanza intitolata: *Alcuni problemi di Geodesia*, nel Tomo XXXV, Serie II, delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.

L'eccesso sferoidico $3\varepsilon$ dello stesso triangolo $AB'B$ verrà dato dalla formola seguente:

$$3\varepsilon = m' - m - \frac{e^2}{12}(\varphi' - \varphi)^2 . \theta \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2 . 1'' \quad \ldots (19);$$

sicchè calcolando quel triangolo di cui si conoscono due lati, l'angolo compreso e l'eccesso sferoidico si avrà la geodetica $AB = s$. Calcolato l'angolo $A$ del triangolo sferoidico $AB'B$ esso sarà l'azimut $Z$ di $B$ sull'orizzonte di $A$; l'azimut di $A$ sull'orizzonte di $B$ sarà poi dato da:

$$Z' = 180 + Z + m + \frac{e^2}{12}\left[(\varphi' - \varphi)^2 + \theta^2 \cos^2\varphi\right] \theta \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2 1'' \ldots (20).$$

È chiaro poi che in tutte le formole precedenti tanto $\varphi' - \varphi$ quanto $\theta$ debbono essere espressi in secondi.

Applichiamo le formole precedenti al calcolo della distanza tra *Berlino* e *Konisberga* le cui posizioni geografiche sono date da Helmert (*) a pag. 256 del suo Trattato di Geodesia.

Berlino . . $\varphi' = 52^\circ\ 30'\ 16''.7$

Konisberga $\varphi = 54\ \ 42\ \ 50''.6$

$\theta = +7^\circ\ 06'$ .

Applicando le formole precedenti si trova

$\log V = 5.390\ 71\ 36$

$\log S = 5.660\ 23\ 18$ .

*Angolo* $B' = 92^\circ\ 53'\ 56''.52$

$3\varepsilon = 0^\circ\ 04'\ 44''.35$ .

Calcolando quindi il triangolo rettilineo $A_*\ B_*'\ B_*$ corrispondente al triangolo sferoidico $AB'B$ si troverà:

Distanza Berlino-Konisberga . . . $s = 529979^m.3$

Azimut di Konisberga su Berlino $Z = 59^\circ\ 33'\ 00''.62$

Id. di Berlino su Konisberga $Z' = 245\ 16\ 09\ .29$ .

---

(*) *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*, von Dr. F. R. Helmert, Leipzig, 1880.

Gli stessi elementi calcolati da Helmert, con altro metodo più rigoroso ma più lungo, sono:

$$s = 529979^{m}.\,54$$
$$Z = 59^{\circ}\,33'\,00''.\,67$$
$$Z' = 245\;\;16\;\;09\;.\;34\;.$$

Vista la facilità del calcolo, non esitiamo a dire, che per differenze di latitudini e longitudini di circa 6°, le nostre formole sono preferibili.

Torino, Giugno 1884.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, presenta all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, le *Osservazioni meteorologiche ordinarie del mese di Maggio* di questo anno, coi rispettivi Riassunti e Diagrammi, dell'Assistente Prof. Angelo CHARRIER.

**Anno XIX** **1884**

## RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Maggio.

La pressione barometrica ha in questo mese per valor medio 38,02; essa supera di mm. 3,25 la media degli ultimi diciotto anni.

Il quadro seguente contiene i valori minimi e massimi osservati:

| Giorni del mese. | Minimi. | Giorni del mese. | Massimi. |
|---|---|---|---|
| 5 . . . . | 27,49 | 9 . . . . . | 45,54 |
| 15 . . . . . | 36,91 | 16 . . . . . | 42,20 |
| 19 . . . . . | 36,74 | 23 . . . . . | 45,29 |
| 27 . . . . . | 34,47 | 27 . . . . . | 40,68 . |

La temperatura ha per valor medio 18°,8: valore che supera la media degli ultimi diciotto anni di 2°.

Le temperature estreme che si ebbero, furono + 9°, 2 e 27°, 9; la prima nel primo giorno del mese, nel tredicesimo la seconda.

Si ebbe pioggia in nove giorni, e l'acqua caduta raggiunse l'altezza di mm. 100, 7.

Il seguente quadro dà la frequenza dei venti nelle singole direzioni:

| N | NNE | NE | ENE | E | ESE | SE | SSE | S | SSW | SW | WSW | W | WNW | NW | NNW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 12 | 23 | 18 | 10 | 5 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 7 | 11 | 3 | 0 | 0 |

Queste Osservazioni verranno stampate nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia, e che va annesso agli *Atti*.

Lo stesso Socio DORNA legge ancora la seguente sua Nota

# SULLA POSSIBILITÀ

CHE IL

# VULCANO DI KRAKATOA

POSSA AVERE PROIETTATE MATERIE FUORI DELL'ATMOSFERA.

Nei due ultimi numeri 219 e 220 (8 e 15 Giugno 1884, dell'*Association scientifique de France*, fu riprodotto col consenso dell'Autore, un articolo interessantissimo dell'illustre Felice JAMIN (pubblicato nel *Cahier du* 1er *Mars* 1884 della *Revue des Deux-Mondes*), sulla teoria fisica della luce crepuscolare, osservata, in molte parti del Mondo, dopo l'eruzione del vulcano di Krakatoa nell'Agosto dell'anno passato.

L'articolo di forma splendidissima, è ricco di argomenti, che dimostrano essere la luce suddetta stata appunto cagionata da materie proiettate dal vulcano di Krakatoa. Fra gli argomenti ve ne ha però uno che, non emendato potrebbe, secondo me, attenuare l'evidenza della conclusione.

L'Autore ammette che per forza di impulsione del vulcano sieno state lanciate dal medesimo materie fuori dell' atmosfera terrestre, e sulla possibilità di questo fenomeno dice le parole che trascrivo:

« Si j'ai tant insisté sur ce phénomène, c'est pour en montrer la puissance, pour faire voir que l'éruption du Krakatoa a été l'un des plus gigantesques événements qui aient épouvanté le Monde et pour préparer le lecteur à ce qui va suivre. En voyant ces vagues immenses se promener sur toutes les mers et ces ondes aériennes faire plusieurs fois le tour de la Terre, il comprendra que la force intérieure capable de disloquer une île entière, de la jeter à la mer et de la remplacer par d'autres

qui ont surgi à côté, ait suffi à la besogne plus facile de lancer verticalement une faible masse de cendres et de vapeur à une hauteur comparable à celle de l'atmosphère.

« Pour avoir l'idée de cette hauteur, imaginons qu'un canon rayé, de gros calibre et fort chargé, ait lancé verticalement un obus de bas en haut avec une vitesse de $500^{m}$, ce qui est une vitesse ordinaire, cet obus monterait jusqu'à $13^{km}$. Si la vitesse initiale était simplement doublée et égale à $1000^{m}$ par seconde il s'éleverait jusqu'à $51^{km}$, dix fois plus haut que le Mont Blanc, et il atteindrait une couche où la pression de l'air n'est pas égale à la millionième partie d'une atmosphère. Or il n'y a aucune exagération à admettre que la colonne de cendres sortie du cratère a eu au moins cette vitesse, et comme la vapeur et les gaz continuaient de se détendre par leur expansion après la sortie, c'était une force qui prolongeait son effet comme celle d'une fusée et qui devait encore augmenter la grandeur du trajet. Il est donc certain que le volcan lançait au 26 Août un panache formé de cendres et de vapeur d'eau partiellement condensée, faisait dans l'air une trouée verticale, dépassait l'atmosphére, formait une sorte de protubérance dans laquelle il réunissait un amoncellement de matériaux très divisés ».

Ora io credo invece, che la resistenza dell'aria crescente col crescere della velocità di proiezione, presenti un ostacolo di cui non si sia tenuto conto abbastanza bene nell'articolo. Infatti colla funzione $Au^2+Bu^3$ della velocità $u$, adottata da Piobert e Didion per rappresentare la resistenza dell'aria ai proietti di artiglieria, il nostro accademico Conte di San Robert, trovò (*) tenendo conto del decrescimento della densità e della gravità, che con una velocità di proiezione infinita l'altezza massima a cui salirebbe un proietto sferico di $12^{kg}$ è appena di 5812 metri, altezza minore di quella delle montagne più elevate del globo e di quelle alle quali si sono innalzati molti areonauti.

15 Giugno 1884.

---

(*) Tomo XVI, II^a Serie delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1855. PAUL DE SAINTE-ROBERT, *Mémoires Scientifiques*. Turin, 1872.

Il Socio Maggiore F. Siacci presenta e legge il seguente lavoro del sig. Prof. Ernesto Padova,

# SULLA ROTAZIONE

DI UN

# CORPO DI RIVOLUZIONE PESANTE

## CHE GIRA ATTORNO AD UN PUNTO DEL SUO ASSE DI SIMMETRIA.

Nel secondo volume delle opere complete di C. G. Jacobi, edite a cura dell'Accademia di Berlino, sono state pubblicate due Memorie, lasciate interrotte dall'illustre matematico, relative al problema del moto di un corpo di rivoluzione pesante, che gira attorno ad un punto fisso del suo asse. La prima di esse contiene l'enunciato del teorema: *La rotazione di un corpo di rivoluzione pesante attorno ad un punto qualunque del suo asse può essere rimpiazzata dal moto relativo di due corpi non sottoposti a forze acceleratrici, giranti attorno ad uno stesso punto ed aventi, nei loro moti di rotazione, il medesimo piano invariabile e lo stesso moto oscillatorio medio;* e nella seconda son date alcune trasformazioni delle formole integrali, dalle quali il sig. Lottner ha potuto dedurre una dimostrazione del teorema stesso. Mi è sembrato opportuno dare del teorema jacobiano una dimostrazione semplice, fondata sulle stesse formule di Jacobi, la quale ponesse in rilievo le relazioni che passano fra le varie costanti dei movimenti considerati ed in pari tempo mostrasse la necessità di tutte le condizioni espresse nell'enunciato. Ritengo inoltre, che la via da me tenuta in questa dimostrazione, sia la più diretta, quando si vogliano confrontare fra loro più movimenti che avvengono tutti attorno ad uno stesso punto.

Da un punto $O$, come origine, partano quattro terne di assi ortogonali; contrassegnamoli colle lettere $x_1, x_2, x_3$; $x_1', x_2', x_3'$;

$\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$; $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, e supponiamo che gli assi $Ox_3$, $Ox_3'$ coincidano. Sul piano $Ox_1x_2$ si proiettino ortogonalmente gli assi $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$; $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ e si indichino con $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ gli angoli che le proiezioni delle prime tre rette fanno coll'asse $x_1$, con $v_1$, $v_2$, $v_3$ gli angoli che le proiezioni delle seconde fanno con $x_1'$. Per note relazioni trovate da EULERO si sa che la posizione degli assi $\xi$ rispetto agli assi $x$ è determinata dai tre angoli $\mu$ e parimente gli assi $\eta$ avranno una determinata posizione rispetto agli assi $x'$, quando gli angoli $v$ abbiano dati valori. I 18 coseni degli angoli, che gli assi $\xi$, $\eta$ fanno cogli assi $x$, $x'$ rispettivamente, siano indicati dalle seguenti tabelle:

| | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $x_2$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $x_3$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |

| | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1'$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ |
| $x_2'$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
| $x_3'$ | $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ |

Facciansi ora ruotare i sistemi $\eta$ ed $x'$, tenendoli invariabilmente collegati fra loro, fino a che gli assi $\eta$ vengano a coincidere cogli assi $\xi$; gli assi $x'$ verranno allora in certe posizioni che indicheremo con $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$ ed i coseni degli angoli che gli assi $x''$, $x$ fanno tra loro, siano indicati dalla tabella:

| | $x_1''$ | $x_2''$ | $x_3''$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $A_1$ | $B_1$ | $C_1$ |
| $x_2$ | $A_2$ | $B_2$ | $C_2$ |
| $x_3$ | $A_3$ | $B_3$ | $C_3$ |

È chiaro che avremo

$$A_1 = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1\,, \qquad B_1 = a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1\,,$$
$$C_1 = a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1\,;$$
$$A_2 = a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2\,, \qquad B_2 = a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2\,,$$
$$C_2 = a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2\,;$$
$$A_3 = a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3\,, \qquad B_3 = a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3\,,$$
$$C_3 = a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3\,;$$

e che gli angoli $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, che le proiezioni degli assi $x''$. sul piano $O x_1 x_2$ fanno coll'asse $O x_1$, sono dati dalle equazioni

$$\operatorname{tang}\rho_1 = \frac{A_2}{A_1}\,, \qquad \operatorname{tang}\rho_2 = \frac{B_2}{B_1}\,, \qquad \operatorname{tang}\rho_3 = \frac{C_2}{C_1}\,.$$

Ciò posto, la terna $\xi$ sia quella degli assi principali d'inerzia di un corpo che gira attorno ad $O$ per effetto d'un impulso ricevuto, ed $O x_1 x_2$ sia il piano invariabile in questo movimento. Gli assi $x_1$, $x_2$ siano quelle rette del piano invariabile che, nella teoria di Jacobi del moto di un corpo non soggetto a forze acceleratrici, girano nel piano invariabile stesso colla velocità angolare costante

$$n n' = \frac{n}{A-C}\left(C\frac{d\log H(ia)}{da} - A\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right);$$

ove $A$, $B$, $C$ rappresentano i momenti principali d'inerzia del corpo, $n$ è data dall'equazione

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-g^2)}{ABC}}\,,$$

$h$ è la forza viva, $g$ la coppia di quantità di moto ed il modulo delle funzioni $H$, e $\Theta$ è dato da

$$k = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}\cdot\frac{g^2-Ch}{Ah-g^2}}\,,$$

ammesso che sia $A > B > C$, se $Bh > g^2$ ed $A < B < C$ se $Bh < g^2$.

Analogamente gli assi $\eta$ siano gli assi principali di un secondo corpo che gira attorno ad $O$, non sollecitato da forze acceleratrici ed il cui piano invariabile coincide con $Ox_1x_2$; inoltre $x_1'$, $x_2'$ siano in questo secondo movimento le rette che girano di moto uniforme sul piano invariabile stesso con velocità angolare determinata analogamente ad $nn'$.

I nove coseni $\alpha_1$ $\alpha_2 \ldots\ldots$, $\gamma_3$ sono allora dati dal seguente quadro (*):

$$\alpha_1 = -\frac{\Theta_1(0)}{2D}\left[H(u+ia)+H(u-ia)\right],$$

$$\beta_1 = -\frac{\Theta(0)}{2D}\left[H_1(u+ia)+H_1(u-ia)\right],$$

$$\gamma_1 = \frac{H_1(0)}{2iD}\left[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)\right],$$

$$\alpha_2 = \frac{\Theta_1(0)}{2iD}\left[H(u+ia)-H(u-ia)\right],$$

$$\beta_2 = \frac{\Theta(0)}{2iD}\left[H_1(u+ia)-H_1(u-ia)\right],$$

$$\gamma_2 = \frac{H_1(0)}{2D}\left[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)\right],$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{D}\Theta(ia)H_1(u), \qquad \beta_3 = \frac{1}{D}\Theta_1(ia)H(u),$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{iD}H(ia)\Theta_1(u),$$

ove

$$D = H_1(ia)\Theta(u).$$

Se il secondo corpo si muove attorno ad $O$ collo stesso moto medio del primo, se cioè pel secondo movimento le quantità $n$ e $k$ hanno gli stessi valori che pel primo, e per ambedue i corpi $u$ si annulla per lo stesso valore di $t$, i coseni $a_1$, $a_2 \ldots\ldots c_3$

(*) Vedasi la Memoria di Jacobi « *Sur la rotation d'un corps* » nel 2° Volume delle *Mathematischen Werke* e nel 2° Volume delle *Gesammelte Werke*.

saranno espressi da un sistema di formule analoghe alle precedenti, che si otterrà da queste col sostituire alla costante $a$ un' altra costante $b$, e le $H$, $\Theta$ avranno lo stesso modulo nei due sistemi.

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni che danno $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ avremo

$$(1)\ldots\quad i \operatorname{tang} \rho_1 = \frac{N_1}{D_1}, \quad i \operatorname{tang} \rho_2 = \frac{N_2}{D_2}, \quad i \operatorname{tang} \rho_3 = \frac{N_3}{D_3},$$

ove

$$\begin{aligned}
N_1 = & -\Theta_1^2(0)\left[H(u+ia)+H(u-ia)\right]\left[H(u+ib)-(Hu-ib)\right] \\
& +\Theta^2(0)\left[H_1(u+ia)+H_1(u-ia)\right]\left[H_1(u+ib)-H_1(u-ib)\right] \\
& +H_1^2(0)\left[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)\right]\left[\Theta(u+ib)+\Theta(u-ib)\right] \\
N_2 = & \ \Theta_1^2(0)\left[H(u+ia)-H(u-ia)\right]\left[H(u+ib)-H(u-ib)\right] \\
& +\Theta^2(0)\left[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)\right]\left[H_1(u-ib)-H_1(u+ib)\right] \\
& -H_1^2(0)\left[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)\right]\left[\Theta(u+ib)+\Theta(u-ib)\right] \\
N_3 = & \ \Theta_1(0)H_1(u)\Theta(ib)\left[H(u+ia)-H(u-ia)\right] \\
& +\Theta(0)H(u)\Theta_1(ib)\left[H_1(u+ia)-H_1(u-ia)\right] \\
& -H_1(0)\Theta_1(u)H(ib)\left[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)\right] \\
D_1 = & \ \Theta_1^2(0)\left[H(u+ia)+H(u-ia)\right]\left[H(u+ib)+H(u-ib)\right] \\
& +\Theta^2(0)\left[H_1(u+ia)+H_1(u-ia)\right]\left[H_1(u+ib)+H_1(u-ib)\right] \\
& -H_1^2(0)\left[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)\right]\left[\Theta(u+ib)-\Theta(u-ib)\right] \\
D_2 = & -\Theta_1^2(0)\left[H(u+ia)-H(u-ia)\right]\left[H(u+ib)+H(u-ib)\right] \\
& +\Theta^2(0)\left[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)\right]\left[H_1(u+ib)+H_1(u-ib)\right] \\
& +H_1^2(0)\left[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)\right]\left[\Theta(u+ib)-\Theta(u-ib)\right] \\
D_3 = & \ \Theta_1(0)H_1(u)\Theta(ib)\left[H(u+ia)+H(u-ia)\right] \\
& -\Theta(0)H(u)\Theta_1(ib)\left[H_1(u+ia)+H_1(u-ia)\right] \\
& -H_1(0)\Theta_1(u)H(ib)\left[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)\right].
\end{aligned}$$

A trasformare queste espressioni serve una formola trovata da Jacobi (*). Se fra gli argomenti $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$ ; $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, $\beta'''$ hanno luogo le relazioni

$$2\beta = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha'''$$
$$2\beta' = \alpha + \alpha' - \alpha'' - \alpha'''$$
$$2\beta'' = \alpha - \alpha' + \alpha'' - \alpha'''$$
$$2\beta''' = \alpha - \alpha' - \alpha'' + \alpha'''$$

si ha

$$(2)\ldots \quad 2\,\Theta(\alpha)\,\Theta(\alpha')\,H(\alpha'')\,H(\alpha''') = \Theta(\beta)\,\Theta(\beta')\,H(\beta'')\,H(\beta''')$$
$$- H(\beta)\,H(\beta')\,\Theta(\beta'')\,\Theta(\beta''') + \Theta_1(\beta)\,\Theta_1(\beta')\,H_1(\beta'')\,H_1\beta''')$$
$$- H_1(\beta)\,H_1(\beta')\,\Theta_1(\beta'')\,\Theta_1(\beta''')\,.$$

Da questa col fare $\alpha = \alpha'$, $\alpha'' = \alpha'''$ e quindi $\beta = \alpha + \alpha''$, $\beta' = \alpha - \alpha''$, $\beta'' = 0$, $\beta''' = 0$ si ha

$$(3)\ldots \quad 2\,\Theta^2(\alpha)\,H^2(\alpha'') = -H(\alpha+\alpha'')\,H(\alpha-\alpha'')\,\Theta^2(0)$$
$$+ \Theta_1(\alpha+\alpha'')\,\Theta_1(\alpha-\alpha'')\,H_1^2(0) - H_1(\alpha+\alpha'')\,H_1(\alpha-\alpha'')\,\Theta_1^2(0).$$

In questa poniamo

$$\alpha = u - i\,\frac{a+b}{2} + K\,, \qquad \alpha'' = i\,\frac{a-b}{2}\,,$$

ed avremo

$$(4)\ldots \quad 2\,\Theta_1^2\left(u - i\,\frac{a+b}{2}\right) H^2\left(i\,\frac{a-b}{2}\right) = -\Theta^2(0)\,H_1(u-ib)\,H_1(u-ia)$$
$$+ H_1^2(0)\,\Theta(u-ib)\,\Theta(u-ia) - \Theta_1^2(0)\,H(u-ib)\,H(u-ia)\,,$$

e se nella (3) facciamo

$$\alpha = u + i\,\frac{a-b}{2}\,, \qquad \alpha'' = K - i\,\frac{a+b}{2}\,,$$

(*) *Gesammelte Welke*, Volume II, pag. 505.

avremo

$$(5)\ldots\ 2\Theta^2\left(u+i\frac{a+b}{2}\right)H_1^2\left(i\frac{a+b}{2}\right)=\Theta^2(0)\,H_1(u-ib)\,H_1(u+ia)$$
$$+H_1^2(0)\,\Theta(u-ib)\,\Theta(u+ia)+\Theta_1^2(0)\,H(u-ib)\,H(u+ia)\ .$$

Dalle (4) e (5) si deducono altre due formole di trasformazione cangiando $i$ in $-i$.

Dalla (2) col fare

$$\alpha=u+i\frac{a-b}{2}\ ,\quad \alpha'=u+i\frac{a+b}{2}+K\ ,\quad \alpha''=-i\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\alpha'''=-K-i\frac{a+b}{2}\ ,$$

e quindi

$$\beta=u\ ,\quad \beta'=u+ia+K\ ,\quad \beta''=0\ ,\quad \beta'''=-K-ib\ ,$$

abbiamo

$$(6)\ldots\ 2\,\Theta\left(u+i\frac{a-b}{2}\right)\Theta_1\left(u+i\frac{a+b}{2}\right)H\left(i\frac{a-b}{2}\right)H_1\left(i\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=-\Theta(0)\,\Theta_1(ib)\,H(u)\,H_1(u+ia)-\Theta_1(u)\,H_1(0)\,H(ib)\,\Theta(u+ia)$$
$$+H_1(u)\,\Theta_1(0)\,\Theta(ib)\,H(u+ia)\ ,$$

e col cangiare in questa $i$ in $-i$ si ottiene

$$(7)\ldots\ 2\,\Theta\left(u-i\frac{a-b}{2}\right)\Theta_1\left(u-i\frac{a+b}{2}\right)H\left(i\frac{a-b}{2}\right)H_1\left(i\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=\Theta(0)\,H(u)\,\Theta_1(ib)\,H_1(u-ia)-\Theta_1(u)\,H_1(0)\,H(ib)\,\Theta(u-ia)$$
$$-H_1(u)\,\Theta_1(0)\,\Theta(ib)\,H(u-ia)\ .$$

Mediante queste formole e col porre per brevità

$$R=H\left(i\frac{a-b}{2}\right),\quad S=\Theta_1\left(u+i\frac{a+b}{2}\right),\quad T=\Theta\left(u+i\frac{a-b}{2}\right)$$
$$R_1=H_1\left(i\frac{a+b}{2}\right),\quad S_1=\Theta_1\left(u-i\frac{a+b}{2}\right),\quad T_1=\Theta\left(u-i\frac{a-b}{2}\right)$$

le (1) danno

$$i \operatorname{tang} \rho_1 = \frac{R^2 (S_1^2 - S^2) - R_1^2 (T_1^2 - T^2)}{R_1^2 (T^2 + T_1^2) - R^2 (S^2 + S_1^2)} ,$$

$$i \operatorname{tang} \rho_2 = \frac{R^2 (S^2 + S_1^2) + R_1^2 (T^2 + T_1^2)}{R^2 (S^2 - S_1^2) + R_1^2 (T^2 - T_1^2)} ,$$

$$i \operatorname{tang} \rho_3 = \frac{S\,T + S_1\,T_1}{S\,T - S_1\,T_1} .$$

Ma il LOTTNER (*) ha dimostrato, che i coseni degli angoli, che due rette giranti uniformemente nel piano dell'equatore e l'asse di simmetria dell'ellissoide d'inerzia corrispondente al punto fisso, nel caso di un corpo di rivoluzione pesante che ruota attorno ad un punto del suo asse, fanno con due rette giranti uniformemente nel piano orizzontale che passa pel punto fisso e colla verticale, son dati dalle equazioni:

$$l_1 = \frac{1}{2\,D\,\Theta^2(u)} \left[ R'^2 (S'^2 + S_1'^2) - R_1'^2 (T'^2 + T_1'^2) \right] ,$$

$$l_2 = \frac{i}{2\,D\,\Theta^2(u)} \left[ R'^2 (S'^2 - S_1'^2) + R_1'^2 (T'^2 - T_1'^2) \right] ,$$

$$l_3 = -\frac{1}{D\,\Theta^2(u)} \left[ R'\,R_1' (S'\,T' - S_1'\,T_1') \right] ,$$

$$m_1 = \frac{i}{2\,D\,\Theta^2(u)} \left[ R'^2 (S_1'^2 - S'^2) - R_1'^2 (T_1'^2 - T'^2) \right] ,$$

$$m_2 = \frac{1}{2\,D\,\Theta^2(u)} \left[ R'^2 (S_1'^2 + S'^2) + R_1'^2 (T'^2 + T_1'^2) \right] ,$$

$$m_3 = \frac{i}{D\,\Theta^2(u)} R'\,R_1' (S'\,T' + S_1'\,T_1') ,$$

$$n_1 = \frac{1}{D\,\Theta^2(u)} R'\,R_1' (T'\,S_1' - T_1'\,S') ,$$

(*) LOTTNER C., *Reduction der Bewegung eines schweren, um einem festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten.* Journal für die Mathematik, Vol. L, pag. 111.

$$n_2 = \frac{i}{D\,\Theta^2(u)} R' R_1' (T' S_1' + T_1' S') ,$$

$$n_3 = \frac{1}{D\,\Theta^2(u)} \left[ R'^2 S' S_1' + R_1'^2 T' T_1' \right] ;$$

ove

$$D = H_1 \left[ i(r+s) \right] , \quad H_1 \left[ i(r-s) \right] , \qquad R' = H(is) ,$$

$$R_1' = H_1(ir) , \qquad S' = \Theta_1(u+ir) , \quad S_1' = \Theta_1(u-ir) ,$$

$$T' = \Theta(u+is) , \qquad T_1' = \Theta(u-is) ,$$

nelle quali $r$ ed $s$ sono costanti. Gli angoli $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ che le proiezioni sul piano orizzontale degli assi del corpo fanno colla retta, che in quel piano è stata presa per asse delle $x$, son dati dalle equazioni

$$i \operatorname{tang} \sigma_1 = \frac{R'^2 (S_1'^2 - S'^2) - R_1'^2 (T_1'^2 - T'^2)}{R_1'^2 (T'^2 + T_1'^2) - R^2 (S'^2 + S_1'^2)} ,$$

$$i \operatorname{tang} \sigma_2 = \frac{R'^2 (S'^2 + S_1'^2) + R_1'^2 (T'^2 + T_1'^2)}{R'^2 (S'^2 - S_1'^2) + R_1'^2 (T'^2 - T_1'^2)} ,$$

$$i \operatorname{tang} \sigma_3 = \frac{S' T' + S_1' T_1'}{S' T' - S_1' T_1'} ,$$

per cui gli angoli $\sigma$ saranno uguali agli angoli $\rho$ se si prenderà $r = \frac{a+b}{2}$ ed $s = \frac{a-b}{2}$. E ciò dimostra il teorema di Jacobi.

Il Kirchhoff (*) ha notato che il problema delle deformazioni di un' asta cilindrica a sezione infinitesima, premuta alle estremità, equivale analiticamente a quello del moto di un corpo pesante attorno ad un punto fisso; che, se le forze applicate a ciascuna estremità non ammettono una forza risultante, il problema di dinamica, corrispondente a quello di elasticità, è quello di un corpo non sollecitato da forze, o, se vuolsi, di un corpo pesante che gira attorno al suo centro di gravità; e che final-

(*) *Vorlesungen über mathematische Physik*, Vol. XXVIII.

mente il caso di un corpo di rivoluzione pesante che gira attorno ad un punto del suo asse, equivale al problema della deformazione di un cilindro isotropo, circolare, premuto alle sue estremità da forze che ammettono una risultante. Potremo dunque, valendoci del teorema di JACOBI e delle osservazioni di KIRCHHOFF, conchiudere che la determinazione della forma di equilibrio di un'asta isotropa circolare sotto l'azione di forze applicate alle estremità, tali che quelle che si esercitano sopra ciascuna base ammettano una risultante, può ridursi a quella della forma di equilibrio di due cilindri a sezione qualunque infinitesima e di sostanza non isotropa, soggetti alle loro estremità a forze tali che quelle applicate ad una base non ammettano una risultante.

Padova, Giugno 1884.

Il Socio Cav. Prof. A. Naccari presenta e legge il seguente Studio sperimentale dei signori Dott. S. Pagliani e L. Palazzo,

## SULLA COMPRESSIBILITÀ

DEI

# MISCUGLI DI ALCOOL ETILICO ED ACQUA.

In una precedente serie di ricerche istituite da uno di noi col Dottor G. Vicentini sulla compressibilità dell'acqua (1) si giunse al risultato che il coefficiente di compressibilità dell'acqua diminuisce col crescere della temperatura a partire da 0° (come era già stato d'altronde dimostrato dalle determinazioni dirette di Grassi (2) e dalle indirette di Wertheim (3) ), ma però presenta un valore minimo alla temperatura di 63°, al di là della quale cresce come per gli altri liquidi. Dalla curva, ottenuta costruendo graficamente i risultati diretti delle determinazioni, e riportata nella annessa tavola fig. 1 in *A*, si è dedotta la seguente tabella dei coefficienti di compressibilità dell'acqua alle diverse temperature:

| $t$ | $\mu$ |
|---|---|
| 0° | 0,0000503 |
| 10° | 0,0000470 |
| 20° | 0,0000445 |
| 30° | 0,0000425 |
| 40° | 0,0000409 |
| 50° | 0,0000397 |
| 60° | 0,0000389 |
| 70° | 0,0000390 |
| 80° | 0,0000396 |
| 90° | 0,0000402 |
| 100° | 0,0000410 |

(1) S. Pagliani e G. Vicentini. — Sulla compressibilità dei liquidi ed in particolare dell'acqua. *Nuovo Cimento*. Anno 1881. — *Annali del R. Istituto Tecnico di Torino*, vol. XII, 1884.

(2) *Annales de Chimie et Physique*, 1851, (3), 31, 437.

(3) *Ann. Chim. Phys.*, 1848 (3), 23, 434.

In seguito in uno studio da noi eseguito (1) sulla compressibilità di alcuni liquidi (alcooli e idrocarburi) a diverse temperature si ottennero per l'alcool etilico dei valori per il coefficiente di compressibilità che possono essere rappresentati dalla seguente equazione: $\mu_t = \mu_o\ (1 + 0{,}003177\ t + 0{,}0000550\ t^2)$ in cui $\mu_o$ è il coefficiente di compressibilità a 0° e $\mu_t$ alla temperatura $t$. L'alcool e l'acqua si comportano adunque per riguardo al variare della compressibilità colla temperatura in modo affatto opposto per temperature comprese fra 0° e 63°.

D'altra parte già le esperienze di A. Duprè e M. Page (2) e le più recenti di Drecker (3) sui miscugli di alcool etilico ed acqua dimostrarono come l'aggiunta di piccole quantità di alcool all'acqua ha per effetto di diminuire il coefficiente di compressibilità; diffatti, secondo i risultati ottenuti da quelli sperimentatori, i miscugli contenenti meno del 45 % di alcool avrebbero alla stessa temperatura un coefficiente di compressibilità minore di quello dell'acqua.

Ci parve quindi interessante lo indagare se questi miscugli che hanno un coefficiente di compressibilità minore di quello dell'acqua presentino pure un uguale andamento nella variazione di quello colla temperatura, come lo mostra l'acqua, e di stabilire in modo più approssimativo che non l'abbiano fatto gli sperimentatori precedenti, quale sia la ricchezza alcoolica del miscuglio che presenta il minor coefficiente di compressibilità.

Il metodo da noi adoperato per la determinazione del coefficiente di compressibilità di questi miscugli è identico a quello adoperato per gli altri liquidi, descritto nella memoria sopra citata. Ne ricorderemo qui il principio.

La diminuzione apparente del volume di un liquido in un recipiente prodotta per compressione è uguale alla somma algebrica della diminuzione reale e della variazione di capacità del recipiente. Quando si sia determinata questa ultima variazione, sottraendola dalla diminuzione apparente osservata, si può dedurre la diminuzione reale di volume del liquido. Se indichiamo con $v$ il volume del liquido contenuto nel piezometro

---

(1) S. Pagliani e L. Palazzo, Sulla compressibilità dei liquidi. *Atti della R. Accademia dei Lincei*, Anno 1884.

(2) *Philosophical Transaction*, 1869, 591.

(3) Pogg. *Annalen* (N. F.), 1883, XX, 870.

ad una temperatura data, con $p$ l'aumento di pressione prodotto, espresso in millimetri di mercurio, con $\Delta\nu$ la diminuzione di volume osservata, con $a$ il coefficiente di compressibilità apparente, avremo

$$a = \frac{\Delta\nu}{\nu} \frac{760}{p} ,$$

Se $\mu$ è il coefficiente di compressibilità assoluta del liquido, $k$ l'aumento di capacità della unità di capacità del recipiente per un aumento di pressione interna di una atmosfera, che chiameremo coefficiente di deformazione del recipiente, avremo

$$k = a - \mu .$$

Determinando il coefficiente di compressibilità apparente dell'acqua nel piezometro da adoperarsi, e sottraendo dal valore ottenuto quello della compressibilità assoluta, si deduce il valore di $k$.

La determinazione di $a$ deve farsi almeno a due temperature, nel cui intervallo siano comprese quelle, alle quali si devono eseguire le altre determinazioni, perchè, come si ebbe occasione di provarlo nelle prime ricerche, nel principio di questa nota accennate, non si può ammettere che la deformazione prodotta in un piezometro da una stessa pressione, esercitata all'interno, sia la stessa alle diverse temperature; essa va invece aumentando sensibilmente coll'aumentare della temperatura.

Il piezometro, da noi adoperato, è, come quello di Regnault, formato da un tubo di vetro cilindrico, a basi emisferiche, al quale è saldato un cannello pure di vetro, diviso in tutta la sua lunghezza. Alla estremità di questo cannello è fissato con mastice un tubo metallico, sul quale ne è saldato normalmente un secondo, che per due rami può unirsi da una parte col manometro, dall'altra col recipiente dell'aria compressa, mediante tubi di piombo.

Secondo la temperatura, alle quali si vuol sperimentare, si adottano disposizioni diverse per il bagno a temperatura costante. Per le esperienze a 0° il piezometro viene posto in ghiaccio pesto in un alto e largo cilindro di vetro. Il ghiaccio non sta direttamente sul fondo del cilindro, ma sopra una rete

metallica portata da un piccolo trepiede di ferro. Si ha cura di tenere anche sempre circondata da ghiaccio la porzione sporgente del cannello.

Per le temperature superiori si adotta la disposizione seguente. In un grande bagno di acqua a doppie pareti è posto un recipiente di rame ripieno di sabbia, ed entro la sabbia sta un grosso tubo di vetro contenente olio, nel quale stanno immersi il piezometro ed il termometro, che serve a misurare la temperatura.

In tal modo si rendono meno sentite dal piezometro le variazioni di temperatura che possono avvenire nell'acqua del bagno a doppie pareti, anche quando essa venga continuamente agitata. Il bagno esterno si riscalda per mezzo di una fiammella a gas, la quale si regola assai bene mediante una pinzetta a vite con passo sottile applicata al tubo di gomma. Si lascia che il piezometro e tutto il materiale costituente il bagno si metta in equilibrio di temperatura ed allora, o senza variare affatto, oppure variando pochissimo l'altezza della fiamma o la distanza fra questa ed il fondo del bagno, si può ottenere o costanza oppure un andamento molto lento e regolare nella temperatura così da potersi portare con sicurezza le volute correzioni, nel calcolo dei volumi, dedotte dal movimento del livello del liquido nel piezometro osservato prima e dopo la compressione.

Maggiori ragguagli intorno all'apparecchio ed al modo di fare le osservazioni si trovano nelle memorie sopra citate.

Riporteremo qui i dati relativi al piezometro adoperato in queste determinazioni. La capacità interna di questo piezometro a 0° fino alla divisione 0 del suo cannello è di $cm^3$ 88,8880, la capacità media corrispondente ad ogni divisione del cannello è di $cm^3$ 0,00007984 a 0° quindi il rapporto fra la capacità della divisione del cannello e quella del recipiente è uguale a 0,00000982.

Il coefficiente di dilatazione cubica del vetro, il quale è necessario a conoscersi per poter calcolare i volumi iniziali e le variazioni di volume osservato nel liquido alle diverse temperature, si è trovato

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| fra 0° e 25° | uguale | a | 0,0000246 | |
| 0° e 50° | » | a | 0,0000250 | |
| 0° e 100° | » | a | 0,0000261 | . |

Per il coefficiente di deformazione del vetro determinato nel modo indiretto sopra indicato si trovarono i valori seguenti:

a 0° $k = 0,0000384$

a 99°,2 $k = 0,0000438$

con una variazione di $\frac{54}{10000000}$ per una differenza di temperatura di 99°, 2.

Questi dati ci servirono a calcolare i valori di $k$ alle diverse temperature.

Abbiamo determinato per tre miscugli alcoolici il coefficiente di compressibilità per diverse temperature comprese fra 0° e 75°, e per altri cinque soltanto per la temperatura di 0° e la ordinaria.

Nelle tabelle seguenti stanno inscritti i dati ed i risultati delle determinazioni. Nella prima colonna sta scritto il numero d'ordine delle esperienze, nella seconda la temperatura; nella terza e quarta colonna la pressione prodotta in millimetri e in atmosfere, nella quinta il coefficiente di compressibilità apparente, nella sesta quello di compressibilità assoluta. Per ciascuna serie è poi indicato il coefficiente di deformazione del vetro calcolato per la temperatura media alla quale si fecero le determinazioni.

## Miscuglio alcoolico n° 1.

Questo miscuglio, come i seguenti, si preparò mescolando dell'alcool assoluto con acqua in proporzioni opportune. Per stabilirne poi esattamente la composizione ne determinammo con cura la densità a 0° e trovammo $d = 0,98902$. Valendoci poi della tabella del Mendelejeff (*Pogg Ann.* 1869, 138) nella quale sono date le densità a 0° proprie di miscugli alcoolici di determinata ricchezza, dedotte dai valori del Gilpin per miscugli di ricchezza inferiore al 35 %, costruimmo una curva, sulla quale leggemmo la composizione del nostro miscuglio. Essa è di p. 6,69 in peso di alcool in 100 di soluzione. Così operammo anche per gli altri miscugli.

SERIE I.

$k = 0.0000384.$

| N° | $t$ | Pressione mill. | Pressione atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0° | 3376. 9 | 4. 443 | 0. 0000848 | 0. 0000464 |
| 2 | » | 3390. 4 | 4. 461 | 848 | 464 |
| 3 | » | 3384. 9 | 4. 454 | 848 | 464 |
| 4 | » | 3403. 9 | 4. 479 | 847 | 463 |
| 5 | » | 3390. 4 | 4. 461 | 848 | 464 |
| 6 | » | 3402. 4 | 4. 478 | 848 | 464 |
| 7 | » | 3389. 9 | 4. 460 | 868 | 464 |
| 8 | » | 3387. 4 | 4. 457 | 847 | 463 |
| 9 | » | 3363. 9 | 4. 426 | 846 | 462 |
| 10 | » | 3370. 9 | 4 435 | 849 | 465 |
| | $t = 0°$ | | | | $\mu$ *medio* = 0. 0000464 |

SERIE II.

$k = 0.0000394.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 18°.8 | 3375. 9 | 4. 442 | 0. 0000823 | 0. 0000429 |
| 12 | 18 .85 | 3385. 9 | 4. 445 | 823 | 492 |
| 13 | 18 .95 | 3395. 9 | 4. 468 | 822 | 428 |
| 14 | 19 .0 | 3376. 4 | 4. 442 | 821 | 427 |
| 15 | 19 .1 | 3386. 4 | 4. 456 | 822 | 428 |
| 16 | 19 .3 | 3417. 2 | 4. 496 | 821 | 427 |
| 17 | 19 .4 | 3411. 4 | 4. 489 | 821 | 427 |
| | $t = 19°.05$ | | | | $\mu$ *medio* = 0. 0000428 |

SERIE III.

$k = 0.0000409.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 45°.7 | 3398. 9 | 4. 472 | 0. 0000802 | 0. 0000393 |
| 19 | 45. 6 | 3422. 6 | 4. 503 | 800 | 391 |
| 20 | 45. 65 | 3372. 4 | 4. 437 | 800 | 391 |
| 21 | 45. 65 | 3370. 4 | 4. 434 | 805 | 396 |
| 22 | 45. 70 | 3372. 9 | 4. 437 | 802 | 393 |
| 23 | 45. 75 | 3396. 9 | 4. 469 | 799 | 390 |
| 24 | 45. 8 | 3399. 4 | 4. 473 | 805 | 396 |
| 25 | 45. 8 | 3378. 9 | 4. 446 | 800 | 391 |
| 26 | 45. 8 | 3392. 9 | 4. 464 | 803 | 394 |
| 27 | 45. 9 | 3390. 4 | 4. 461 | 805 | 396 |
| | $t = 45°.7$ | | | | $\mu$ *medio* = 0. 0000393 |

SERIE IV.

$k = 0.0000414.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 55°.4 | 3360.8 | 4.421 | 0.0000802 | 0.0000388 |
| 29 | » | 3377.2 | 4.443 | 803 | 389 |
| 30 | » | 3382.2 | 4.450 | 798 | 384 |
| 31 | 55.45 | 3388.7 | 4.458 | 800 | 386 |
| 32 | 55.5 | 3374.7 | 4.445 | 800 | 386 |
| 33 | 55.6 | 3384.2 | 4.453 | 800 | 386 |
| $t = 55.45$ | | | | $\mu$ *medio* $= 0.0000386$ | |

SERIE V.

$k = 0.0000418.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 64°.1 | 3373.1 | 4.438 | 0.0000801 | 0.0000383 |
| 35 | 64.15 | 3373.1 | 4.438 | 799 | 381 |
| 36 | 64.15 | 3381.6 | 4.449 | 799 | 381 |
| 37 | » | 3384.6 | 4.453 | 802 | 384 |
| 38 | » | 3378.1 | 4.444 | 802 | 384 |
| 39 | » | 3377.0 | 4.443 | 803 | 385 |
| 40 | » | 3373.1 | 4.488 | 797 | 379 |
| 41 | » | 3373.1 | 4.438 | 799 | 381 |
| $t = 64.15$ | | | | $\mu$ *medio* $= 0.0000382$ | |

SERIE VI.

$k = 0.0000422.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 71.0 | 3379.6 | 4.447 | 0.0000810 | 0.0000388 |
| 43 | 71°.0 | 3370.1 | 4.434 | 809 | 387 |
| 44 | » | 3359.2 | 4.420 | 810 | 388 |
| 45 | » | 3387.1 | 4.456 | 811 | 389 |
| 46 | 70.95 | 3364.1 | 4.426 | 812 | 390 |
| 47 | » | 3359.2 | 4.420 | 808 | 386 |
| 48 | 70.9 | 3377.6 | 4.443 | 808 | 386 |
| $t = 71.0$ | | | | $\mu$ *medio* $= 0.0000386$ | |

Riassumendo i risultati medi così ottenuti abbiamo i seguenti valori dei coefficienti di compressibilità del miscuglio alcoolico contenente 6.69 % in peso di alcool, alle seguenti temperature:

| $t$ | $\mu$ |
|---|---|
| 0° | 0. 0000464 |
| 19 .05 | 0. 0000428 |
| 45 .70 | 0. 0000393 |
| 55 .45 | 0. 0000386 |
| 64 .15 | 0. 0000382 |
| 71 .0 | 0. 0000386 |

Se si costruiscono graficamente questi valori portando sull'asse delle ascisse le temperature e su quello delle ordinate i valori dei coefficienti di compressibilità si ottiene una curva rappresentata in *B* nella fig. 1. Si vede da essa che, per questo miscuglio alcoolico, come per l'acqua, il coefficiente di compressibilità va diminuendo a partire da 0° col crescere della temperatura, ma solo fino ad un certo limite, oltre il quale si comporta come gli altri liquidi in generale. La temperatura del minimo di compressibilità si trova per questo miscuglio a 61°.5 ed allora il suo coefficiente ha il valore 0. 0000383.

## Miscuglio alcoolico n° 2.

La sua densità a 0° si trovò uguale a 0,98371. Contiene quindi 11. 38 p. di alcool in 100 di soluzione.

Serie I.

$k = 0.\ 0000384.$

| N° | $t$ | *Pressione* mill. | atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 49 | 0° | 3390. 4 | 4. 461 | 0. 0000815 | 0. 0000431 |
| 50 | » | 3385. 4 | 4. 454 | 814 | 430 |
| 51 | » | 3384. 4 | 4. 453 | 814 | 430 |
| 52 | » | 3387. 9 | 4. 458 | 815 | 431 |
| 53 | » | 3407. 4 | 4. 483 | 814 | 430 |
| 54 | » | 3377. 4 | 4. 444 | 816 | 432 |
| 55 | » | 3390. 4 | 4. 461 | 815 | 431 |
| 56 | » | 3395. 4 | 4. 468 | 815 | 431 |
| 57 | » | 3384. 9 | 4. 453 | 815 | 431 |
| 58 | » | 3379. 4 | 4. 446 | 815 | 431 |
| $t = 0°$ | | | | $\mu$ *medio* = | 0. 0000431 |

### Serie II.

$k = 0.0000395$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 20°.0 | 3370.9 | 4.435 | 0.0000802 | 0.0000407 |
| 60 | » | 3372.9 | 4.438 | 800 | 405 |
| 61 | » | 3370.4 | 4.434 | 799 | 404 |
| 62 | 20.05 | 3365.4 | 4.428 | 799 | 404 |
| 63 | 20.15 | 3422.2 | 4.503 | 801 | 406 |
| 64 | 20.2 | 3377.9 | 4.444 | 797 | 402 |
| 65 | » | 3374.4 | 4.440 | 800 | 405 |
| 66 | 20.25 | 3384.9 | 4.454 | 800 | 405 |
| 67 | 20.3 | 3383.4 | 4.452 | 801 | 406 |
| 68 | 20.4 | 3384.4 | 4.453 | 801 | 406 |

$t = 20.15$ $\mu$ *medio* $= 0.0000405$

### Serie III.

$k = 0.0000409$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 69 | 45°.7 | 3365.4 | 4.428 | 0.0000795 | 0.0000386 |
| 70 | 46.6 | 3367.0 | 4.430 | 792 | 383 |
| 71 | » | 3399.5 | 4.473 | 792 | 383 |
| 72 | » | 2666.8 | 3.509 | 794 | 385 |
| 53 | » | 2691.3 | 3.541 | 792 | 383 |
| 74 | » | 2687.8 | 3.536 | 796 | 387 |
| 75 | » | 2639.9 | 3.473 | 792 | 383 |

$t = 46.6$ $\mu$ *medio* $= 0.0000384$

### Serie IV.

$k = 0.0000414$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 76 | 54°.6 | 3411.4 | 4.488 | 0.0000795 | 0.0000381 |
| 77 | 55.2 | 3370.9 | 4.435 | 797 | 383 |
| 78 | 55.25 | 3397.9 | 4.471 | 795 | 381 |
| 79 | 55.3 | 3370.4 | 4.434 | 796 | 382 |
| 80 | 55.4 | 3394.4 | 4.466 | 795 | 381 |
| 81 | 55.4 | 3379.4 | 4.446 | 800 | 386 |

$t = 55.3$ $\mu$ *medio* $= 0.0000382$

SERIE V.

$k = 0.0000420$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 82 | 66. 8 | 3368. 3 | 4. 432 | 0. 0000806 | 0. 0000386 |
| 83 | » | 3373. 8 | 4. 439 | 805 | 385 |
| 84 | 66. 75 | 3365. 3 | 4 428 | 808 | 388 |
| 85 | 66. 7 | 3373. 8 | 4. 439 | 809 | 389 |
| 86 | 66. 75 | 3369. 3 | 4. 433 | 806 | 386 |
| 87 | 66. 7 | 3379. 3 | 4. 446 | 809 | 389 |
| 88 | 66. 6 | 3363. 8 | 4. 426 | 808 | 388 |
| 89 | 66. 55 | 3381. 3 | 4. 449 | 807 | 387 |
| 90 | 66. 5 | 3355. 4 | 4. 415 | 807 | 387 |
| 91 | 66. 45 | 3375. 8 | 4. 442 | 805 | 385 |
| 92 | 66. 4 | 3375. 8 | 4. 442 | 807 | 387 |
| | $t = 66.6$ | | | $\mu$ *medio* $= 0.0000387$ | |

Abbiamo quindi i seguenti valori per il coefficiente di compressibilità del miscuglio a 11. 38 % di alcool alle seguenti temperature:

| $t$ | $\mu$ |
|---|---|
| 0° | 0. 0000431 |
| 20°.15 | 0. 0000405 |
| 46. 6 | 0. 0000384 |
| 55. 3 | 0. 0000382 |
| 66. 6 | 0. 0000387 . |

La curva che lega questi risultati è rappresentata in $C$ nella fig. 1. Si vede che anche per questo miscuglio alcoolico il coefficiente di compressibilità presenta valori più piccoli di quello dell'acqua alle stesse temperature e che vanno diminuendo coll'aumentare di questa fino a 55°,5 alla qual temperatura

$$\mu = 0.0000382 .$$

## Miscuglio alcoolico n° 3.

La determinazione della densità a 0° diede $d = 0{,}98160$, donde si deduce la ricchezza alcoolica 13,29 % di alcool.

### Serie I.

$k = 0.00000384.$

| N° | t | Pressione mill. | Pressione atm. | a | μ |
|---|---|---|---|---|---|
| 93 | 0° | 3393.1 | 4.465 | 0.0000798 | 0.0000414 |
| 94 | » | 3391.1 | 4.462 | 803 | 419 |
| 95 | » | 3393.1 | 4.465 | 801 | 417 |
| 96 | » | 3396.6 | 4.470 | 801 | 417 |
| 97 | » | 3390.1 | 4.461 | 801 | 417 |
| | $t = 0°$ | | | μ *medio* = | 0.0000417 |

### Serie II.

$k = 0.0000392.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 98 | 14°.5 | 3394.8 | 4.467 | 0.0000795 | 0.0000403 |
| 99 | 14.4 | 3386.8 | 4.456 | 794 | 402 |
| 100 | 14.4 | 3381.8 | 4.450 | 797 | 405 |
| 101 | 14.4 | 3385.3 | 4.454 | 797 | 405 |
| 102 | 14.35 | 3377.3 | 4.444 | 794 | 402 |
| 103 | 14.30 | 3383.8 | 4.452 | 796 | 404 |
| 104 | 14. | 3388.8 | 4.458 | 797 | 405 |
| 105 | 14.35 | 3384.8 | 4.453 | 797 | 405 |
| 106 | 14.4 | 3367.8 | 4.431 | 798 | 406 |
| 107 | 14.45 | 3388.8 | 4.458 | 797 | 405 |
| | $t = 14.4$ | | | μ *medio* = | 0.0000404 |

### Serie III.

$k = 0.0000396.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 108 | 21°.85 | 3363.4 | 4.425 | 0.0000790 | 0.0000394 |
| 109 | 21.7 | 3364.4 | 4.426 | 790 | 394 |
| 110 | 21.5 | 3395.3 | 4.467 | 789 | 393 |
| 111 | 21.9 | 3408.3 | 4.485 | 788 | 392 |
| 112 | 21.9 | 3403.3 | 4.478 | 792 | 396 |
| 113 | 21.8 | 3396.8 | 4.469 | 789 | 393 |
| 114 | 21.75 | 3394.3 | 4.466 | 794 | 398 |
| 115 | 21.75 | 3424.2 | 4.505 | 793 | 397 |
| 116 | 21.8 | 3390.3 | 4.461 | 790 | 394 |
| | $t = 21.8$ | | | μ *medio* = | 0.0000394 |

### Serie IV.

$k = 0.0000400$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 117 | 30°.1 | 3372.4 | 4.437 | 0.0000792 | 0.0000392 |
| 118 | 29.9 | 3389.9 | 4.461 | 789 | 389 |
| 119 | 29.9 | 3407.3 | 4.484 | 790 | 390 |
| 120 | » | 3403.3 | 4.478 | 789 | 389 |
| 121 | » | 3409.3 | 4.486 | 791 | 391 |
| 122 | » | 3393.3 | 4.465 | 788 | 388 |
| 123 | 29.95 | 3385.8 | 4.455 | 785 | 385 |
| 124 | 30.00 | 3403.8 | 4.478 | 785 | 385 |
| 125 | » | 3406.3 | 4.483 | 789 | 389 |
| | $t = 29.95$ | | | $\mu$ *medio* | 0.0000389 |

### Serie V.

$k = 0.0000406$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 126 | 39°.8 | 3389.8 | 4.461 | 0.0000795 | 0.0000389 |
| 127 | » | 3400.8 | 4.475 | 792 | 385 |
| 128 | » | 3386.3 | 4.455 | 795 | 389 |
| 129 | 39.6 | 3390.8 | 4.462 | 794 | 388 |
| 130 | 39.55 | 3384.3 | 4.453 | 793 | 387 |
| 131 | 39.9 | 3383.3 | 4.452 | 794 | 388 |
| 132 | » | 3386.3 | 4.455 | 796 | 390 |
| 133 | » | 3384.3 | 4.453 | 795 | 389 |
| 134 | » | 3387.3 | 4.456 | 796 | 390 |
| | $t = 39.8$ | | | $\mu$ *medio* = | 0.0000388 |

### Serie VI.

$k = 0.0000410$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 135 | 47°.6 | 3390.5 | 4.462 | 0.0000797 | 0.0000387 |
| 136 | 47.65 | 3384.5 | 4.453 | 796 | 386 |
| 137 | 47.7 | 3376.5 | 4.443 | 796 | 386 |
| 138 | » | 3411.0 | 4 488 | 796 | 386 |
| 139 | » | 3400.0 | 4.474 | 800 | 390 |
| 140 | 47.6 | 3367.0 | 4.430 | 799 | 389 |
| 141 | 47.6 | 3406.0 | 4.482 | 798 | 388 |
| 142 | » | 3379.0 | 4.446 | 797 | 387 |
| 143 | 47.55 | 3346.0 | 4.403 | 798 | 388 |
| | $t = 47.6$ | | | $\mu$ *medio* = | 0.0000387 |

SERIE VII.

$k = 0.0000420$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 144 | 67°.8 | 3381.0 | 4.448 | 0.0000814 | 0.0000394 |
| 145 | 67.7 | 3347.7 | 4.405 | 813 | 393 |
| 146 | 67.4 | 3374 2 | 4.440 | 815 | 395 |
| 147 | 67.6 | 3377.7 | 4.444 | 813 | 393 |
| 148 | » | 3372.2 | 4.438 | 815 | 395 |
| 149 | 67.7 | 3373.7 | 4.440 | 815 | 395 |
| 150 | 67.5 | 3378.7 | 4.445 | 815 | 395 |
| | $t = 67.6$ | | | $\mu$ *medio* | 0.0000394 |

Riassumendo abbiamo

| $t$ | $\mu$ |
|---|---|
| 0° | 0.0000417 |
| 14°.4 | 0.0000404 |
| 21.8 | 0.0000394 |
| 29.95 | 0.0000389 |
| 39.8 | 0.0000388 |
| 47.6 | 0.0000387 |
| 67.6 | 0.0000394 . |

Se si costruiscono graficamente questi valori, si ottiene la curva rappresentata in $D$ nella fig. I. Si scorge come anche per questo miscuglio il coefficiente di compressibilità va diminuendo colla temperatura sino a 44°.5 ($\mu = 0.0000387$) oltre il qual limite cresce col crescere di questa. Si vede inoltre come i valori di quel coefficiente si mantengano minori di quello dell'acqua solo fin verso 59°, oltre questo punto sono maggiori.

Risulta poi in generale dai numeri sopra riferiti che il valore del coefficiente di compressibilità dei miscugli alcoolici va diminuendo per la stessa temperatura coll'aumentare della quantità di alcool, come avevano già trovato prima Duprè e Page e poi Drecker. Però i risultati di questi sperimentatori non vanno molto d'accordo. Duprè e Page operando a temperature che variavano fra 8° e 11°, 5 hanno trovato che il coefficiente di compressibilità dei miscugli va diminuendo coll'aumentare della quantità di alcool fino ad una ricchezza alcoolica del 40 % per la quale trovarono $\mu = 0.0000344$; per un miscuglio al 45 %, trovano già 0.0000461, ed in seguito il coefficiente

va crescendo coll'aumentare della quantità di alcool. Drecker invece, alla temperatura di 25°, trovò per un miscuglio alcoolico a 23,91 % $\mu = 0.0000411$, mentre per un altro a 34,61 % trovò $\mu = 0.0000448$, per cui la ricchezza alcoolica del miscuglio a cui corrisponde il minor coefficiente di compressibilità sarebbe compresa fra 25 e 35 %, non fra 40 e 45 %, come risulterebbe dalle misure di Duprè e Page.

Abbiamo creduto non senza interesse il risolvere la questione, tanto più che l'esperienza dimostra d'altra parte che l'aggiunta di piccole quantità di alcool all'acqua (fino al 35 %) ne aumenta il calore specifico. Abbiamo perciò determinato il coefficiente di compressibilità a 0° ed alla temperatura ordinaria di altri miscugli.

## Miscuglio alcoolico n° 4.

Densità a 0° uguale a 0.97599.

Ricchezza alcoolica 19.67 %.

Serie I.

$k = 0.0000384$.

| N° | $t$ | *Pressione* mill. | atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 151 | 0° | 3396.9 | 4.470 | 0.0000768 | 0.0000384 |
| 152 | » | 3341.0 | 4.396 | 770 | 386 |
| 153 | » | 3338.5 | 4.391 | 767 | 383 |
| 154 | » | 3374.4 | 4.440 | 768 | 384 |
| 155 | » | 3359.5 | 4.420 | 772 | 388 |
| 156 | » | 3359.5 | 4.420 | 770 | 386 |
| 157 | » | 3363.5 | 4.425 | 770 | 386 |
| 158 | » | 3376.9 | 4.443 | 767 | 383 |
| 159 | » | 3363.5 | 4.425 | 769 | 385 |
| $t = 0°$ | | | | | $\mu$ *medio* $= 0.0000385$ |

SERIE II.

$k = 0.0000395$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 21°.4 | 3311.2 | 4.343 | 0.0000784 | 0.0000389 |
| 161 | 21.35 | 3376.4 | 4.443 | 780 | 385 |
| 162 | 21.30 | 3374.4 | 4.440 | 783 | 388 |
| 163 | » | 3325.5 | 4.375 | 781 | 386 |
| 164 | » | 3340.5 | 4.396 | 786 | 391 |
| 165 | » | 3376.9 | 4.443 | 782 | 387 |
| $t = 21.3$ | | | | $\mu$ *medio* $= 0.0000388$ | |

Per questo miscuglio i valori del coefficiente di compressibilità sono ancora minori di quello dei miscugli meno ricchi di alcool, ma abbiamo a 21°3 già un valore maggiore che a 0°. Sembra quindi che la temperatura del minimo di compressibilità sia inferiore a 0°.

## Miscuglio alcoolico n° 5.

Densità a 0° uguale a 0.9715.

Ricchezza alcoolica 23,98 % di alcool.

SERIE I.

$k = 0.0000384$.

| N° | $t$ | *Pressione* mill. | atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 166 | 0° | 3395.0 | 4.467 | 0.0000767 | 0.0000383 |
| 167 | » | 3388.5 | 4 458 | 768 | 384 |
| 168 | » | 3388.5 | 4.458 | 767 | 383 |
| 169 | » | 3398.5 | 4.472 | 762 | 378 |
| 170 | » | 3386.5 | 4.456 | 766 | 382 |
| 171 | » | 3391.0 | 4.462 | 767 | 383 |
| 172 | » | 3386.0 | 4 456 | 763 | 379 |
| 173 | » | 3390.5 | 4.462 | 762 | 378 |
| $t = 0°$ | | | | $\mu$ *medio* $= 0000381$ | |

Per questo miscuglio il valore del coefficiente di compressibilità è ancora minore di quello dei precedenti alla stessa temperatura di 0°.

Serie II.

$k$=0. 0000397.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 174 | 24°.6 | 3347. 6 | 4. 304 | 0. 0000795 | 0. 0000398 |
| 175 | » | 3367. 1 | 4. 430 | 791 | 394 |
| 176 | » | 3386. 6 | 4. 457 | 793 | 396 |
| 177 | 24. 65 | 3380. 1 | 4 447 | 790 | 393 |
| 178 | 24. 7 | 3371. 1 | 4. 435 | 792 | 395 |
| 179 | 24. 7 | 3374. 6 | 4. 440 | 792 | 395 |
| 180 | 24. 75 | 3359. 1 | 4. 420 | 792 | 395 |
| | $t$=24°.65 | | | $\mu$ *medio* = | 0. 0000395 |

Anche qui, alla temperatura di 24°.7, si ha un valore maggiore che a 0°, cioè il coefficiente aumenta colla temperatura.

## Miscuglio alcoolico n° 6.

Densità a 0° uguale a 0,96633.

Ricchezza alcoolica 29. 19 % di alcool.

Serie I.

$k$=0. 0000384.

| N° | $t$ | *Pressione* mill. | *Pressione* atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 181 | 0° | 3438. 8 | 4. 524 | 0. 0000775 | 0. 0000391 |
| 182 | » | 3383. 4 | 4. 452 | 776 | 392 |
| 183 | » | 3378. 9 | 4. 446 | 774 | 390 |
| 184 | » | 3395. 9 | 4. 469 | 776 | 392 |
| 185 | » | 3389. 4 | 4. 460 | 775 | 391 |
| 186 | » | 3394. 9 | 4. 468 | 776 | 392 |
| 187 | » | 3395. 4 | 4. 469 | 775 | 391 |
| 188 | » | 3389. 4 | 4. 460 | 776 | 392 |
| | $t$ = 0° | | | $\mu$ *medio* = | 0. 0000391 |

SERIE II.

$k = 0.0000394$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 189 | 19.55 | 3376.4 | 4.443 | 0.0000793 | 0.0000399 |
| 190 | 19.6 | 3350.5 | 4.408 | 796 | 402 |
| 191 | 19.65 | 3379.9 | 4.447 | 794 | 400 |
| 192 | 19.7 | 3385.4 | 4.455 | 794 | 400 |
| 193 | 19.75 | 3372.4 | 4.437 | 793 | 399 |
| | $t = 19^{\circ}.65$ | | | $\mu$ *medio* = | 0.0000400 |

Questo miscuglio alcoolico presenta già alla temperatura di 0° un coefficiente di compressibilità maggiore di quello del miscuglio precedente.

## Miscuglio alcoolico n° 7.

Densità a 0° uguale a 0.95231.

Ricchezza alcoolica 38.28 % di alcool.

SERIE I.

$k = 0.0000384$.

| N° | $t$ | *Pressione* mill. | atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 194 | 0° | 3398.0 | 4.472 | 0.0000816 | 0.0000432 |
| 195 | » | 3396.5 | 4.470 | 821 | 437 |
| 196 | » | 3390.5 | 4.462 | 818 | 434 |
| | $t = 0^{\circ}$ | | | $\mu$ *medio* = | 0.0000434 |

SERIE II.

$k = 0.0000394$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 197 | 18°.85 | 3385.5 | 4.455 | 0.0000839 | 0.0000445 |
| 198 | 18.9 | 3399.0 | 4.473 | 844 | 450 |
| 199 | 18.95 | 3399.0 | 4.473 | 842 | 448 |
| 200 | 19.0 | 3375 5 | 4.442 | 844 | 450 |
| | $t = 18.9$ | | | $\mu$ *medio* = | 0.0000448 |

Questi risultati confermano l'aumento nel coefficiente di compressibilità per una stessa temperatura coll'aumentare della ricchezza alcoolica, e per ciascun miscuglio col crescere della temperatura a partire già da 0°.

## Miscuglio alcoolico n° 8.

Densità a 0° uguale a 0,92760.

Ricchezza alcoolica: 50,88 %

$k = 0.0000384$

| N° | $t$ | *Pressione* mill. | atm. | $a$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 201 | 0° | 3374. 3 | 4. 440 | 0. 0000880 | 0. 0000496 |
| 202 | » | 3380. 1 | 4. 447 | 883 | 499 |
| 203 | » | 3369. 5 | 4. 433 | 883 | 499 |
| 204 | » | 3369. 5 | 4. 403 | 883 | 499 |
| 205 | » | 3369. 5 | 4. 433 | 887 | 503 |
| | | | | | 0. 0000499 |

Questo miscuglio presenta a 0° un coefficiente di compressibilità quasi coincidente con quello dell'acqua alla stessa temperatura.

| *Alcool* % | $\mu$ |
|---|---|
| 0 | 0,0000503 |
| 6. 69 | 0,0000464 |
| 11. 38 | 0,0000431 |
| 13. 29 | 0,0000417 |
| 19. 67 | 0,0000385 |
| 23. 98 | 0,0000381 |
| 29. 19 | 0,0060391 |
| 38. 28 | 0,0000434 |
| 50. 88 | 0,0000499 |
| 100 | 0,0000970 |

Se si costruiscono graficamente questi valori portando sull'asse delle ascisse il numero di parti in peso di alcool conte-

nute in 100 di miscuglio e su quello delle ordinate, i coefficienti di compressibilità a 0° si ottiene la curva rappresentata nella fig. II. Da essa si deduce che il miscuglio alcoolico, che presenta il minor coefficiente di compressibilità contiene 23 $^0/_0$ di alcool.

Non abbiamo portato sulla curva il punto corrispondente alla ricchezza alcoolica 50.88 $^0/_0$ per ristrettezza di spazio.

## CONCLUSIONI.

I risultamenti delle nostre esperienze conducono alle seguenti conclusioni:

1° L'aggiunta di piccole quantità di alcool etilico all'acqua ha per effetto di abbassarne il coefficiente di compressibilità. I miscugli alcoolici che contengono meno del 38 $^0/_0$ di alcool hanno alla temperatura di circa 20° e quelli che ne contengono meno del 50 $^0/_0$ hanno a 0° un coefficiente di compressibilità minore di quello dell'acqua.

2° Il coefficiente di compressibilità dei miscugli alcoolici va diminuendo coll'aumentare del contenuto in alcool fino alla proporzione del 23 $^0/_0$ di alcool. Quando la ricchezza in alcool raggiunge 50 $^0/_0$, allora il coefficiente di compressibilità a 0° è quasi coincidente con quello dell'acqua.

3° Come per l'acqua, anche per i miscugli alcoolici che contengono meno del 19 $^0/_0$ di alcool il coefficiente di compressibilità va diminuendo di valore collo aumentare della temperatura a partire da 0°, ma esiste per ciascun miscuglio una temperatura, alla quale quel coefficiente assume un valore minimo, per crescere al di là di tal limite colla temperatura stessa.

4° La temperatura del minimo di compressibilità dei miscugli alcoolici è sempre inferiore a quella dell'acqua, ed è

tanto più bassa quanto maggiore è la ricchezza alcoolica del miscuglio. Per un miscuglio contenente 19,67 % di alcool essa è già inferiore a 0°. Non sembra esistere una relazione semplice fra i valori delle temperature del massimo di densità e del minimo di compressibilità per l'acqua ed i miscugli alcoolici.

Laboratorio di Fisica del R. Istituto tecnico di Torino.
Giugno 1884.

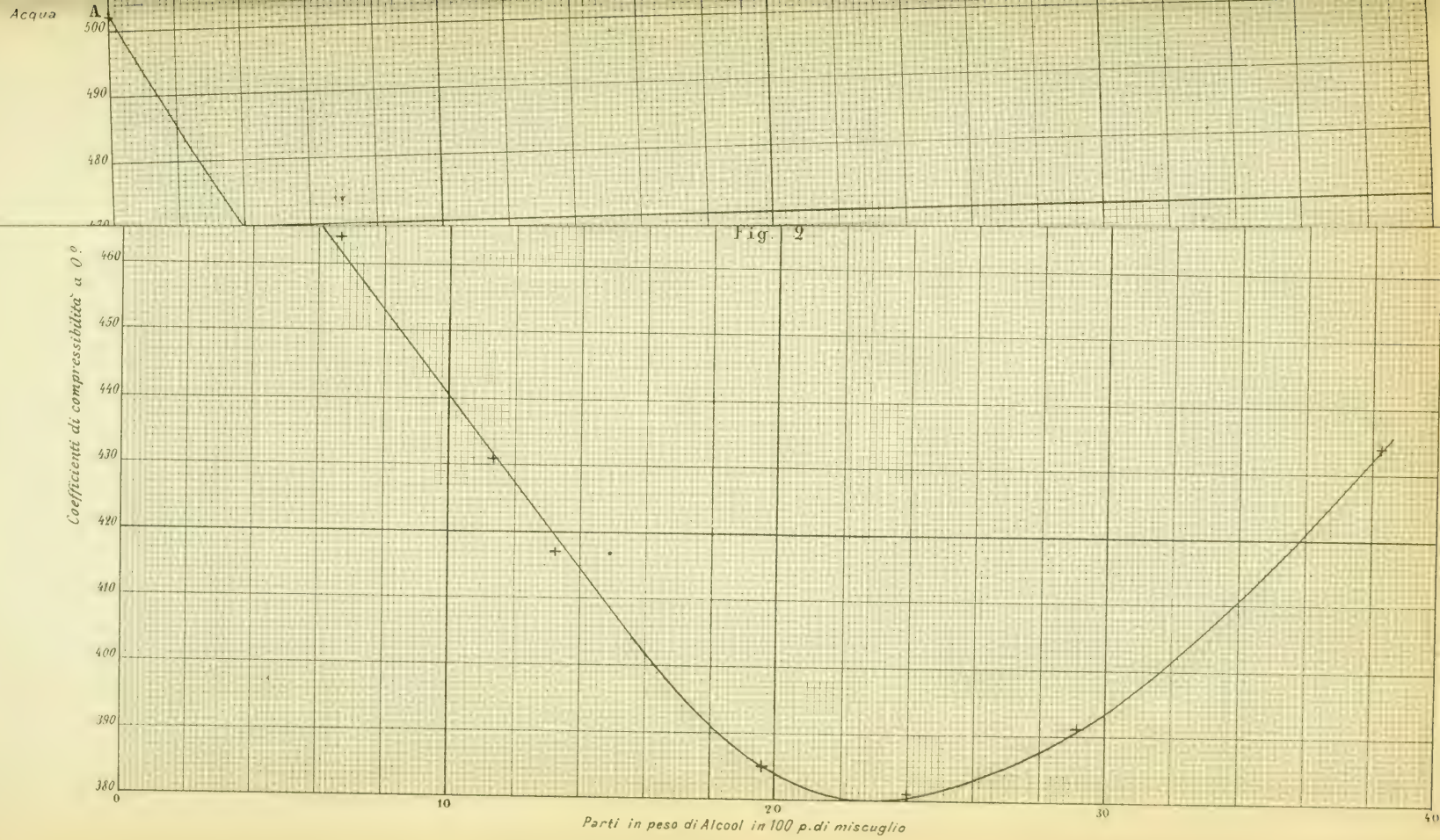

Acqua
A
500
490
480
460
450
440
430
420
410
400
390
380
Coefficienti di compressibilità a 0°
0
10
20
30
40
Parti in peso di Alcool in 100 p. di miscuglio

Fig. 2

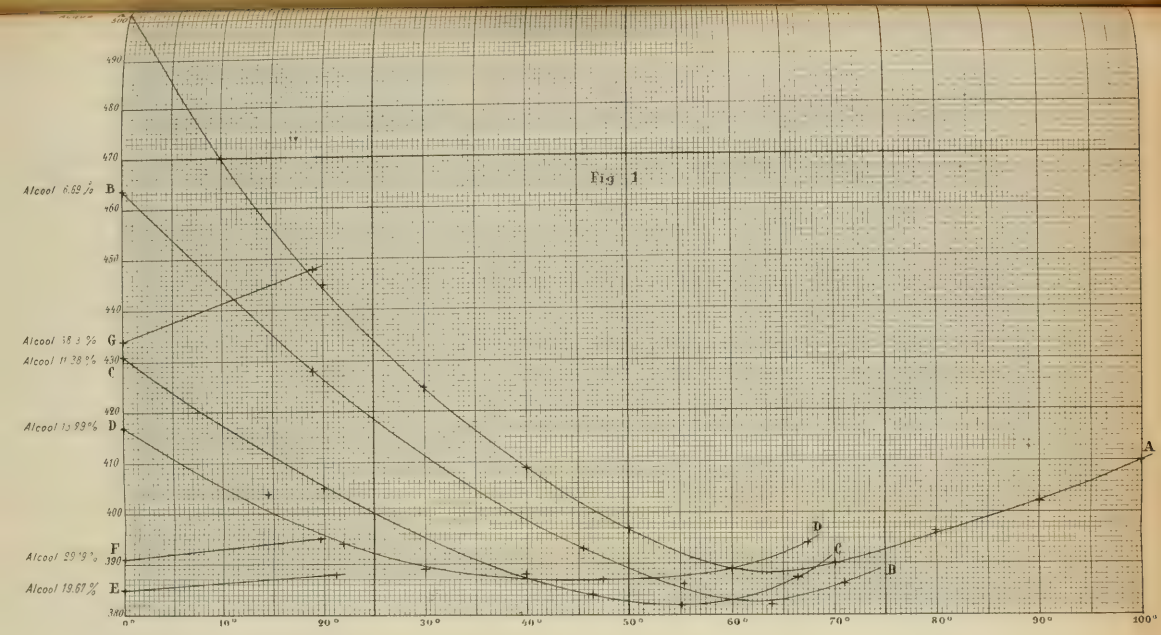


Fig 1
Alcool 6.69 %
Alcool 13.99 %
Alcool 19.67 %
A
B
C
D
E
F
G
0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°

Fig 2
Coefficiente di compressibilità a 0°
Parti in peso di Alcool in 100 p. di miscuglio
0
10
20
30
40

Il Socio Comm. Prof. Michele Lessona legge la seguente sua

## COMMEMORAZIONE

DI

# GIOVANNI BATTISTA ERCOLANI.

La famiglia nella quale nacque Giovanni Battista Ercolani è nobile e antica. Essa venne già in Bologna da Bagnacavallo, castello degli Estensi, ed ebbe parecchi uomini insigni, fra cui il conte Cesare Ercolani, generale di Carlo V.

Giovanni Battista Ercolani nacque in Bologna nell'anno 1819, e mostrò negli anni giovanili una vivacità di mente e una schiettezza di carattere che non tralasciarono dallo impensierire i suoi genitori. La vivacità e la schiettezza, in quei tempi e in quei luoghi, erano pregi pericolosi. Un giudice illustre apprezzò le qualità dello Ercolani fanciullo e ne predisse bene, e questo giudice illustre fu Giovanni Tommasini.

Ma un altro uomo dotto e buono, un grande scienziato, non solo aveva scorto la tempra dello ingegno e del carattere dello Ercolani fin dagli anni della sua prima gioventù, ma in quegli anni appunto s'era applicato con tutte le sue forze a guidarne la educazione scientifica e morale, a sorreggerlo e confortarlo cogli ammaestramenti preziosi, coi preziosi consigli e coi preziosissimi esempi. Quel grande scienziato era Antonio Alessandrini.

Lo Ercolani era per verità uno di quegli uomini che, in qualunque condizione, riescono sempre e sanno sempre cercare e trovare i buoni ammaestramenti. Ma ognuno intende come anche a quegli uomini sia grande ventura e renda incomparabilmente più breve e sicuro il cammino una guida sapiente, amorevole e buona, che incontrino in sul principio della vita intellettuale.

Antonio Alessandrini fu uomo veramente grande, e se in Italia il suo nome non è tanto universalmente noto quanto meriterebbe,

se non sono molti i cultori delle scienze biologiche che lo sappiano apprezzare, ciò deriva dalle condizioni infelici della nostra patria, nel passato, e per certi rispetti anche nel presente. Ma di lui avverrà come degli uomini veramente degni, che avrà giustizia dal tempo.

Lo Alessandrini fu valente in pari modo nella anatomia umana e nella anatomia comparata; ciò ora è la regola in Germania, ma allora anche in Germania era una eccezione, e in Italia poi una eccezione al tutto rara. Più raro merito ancora per lo Alessandrini fu questo, che egli iniziò e proseguì con tutte le poderose sue forze un grande studio di patologia comparata, di cui dimostrava la somma importanza sia per se stesso sia in rapporto colla patologia umana. Egli fu paleontologo e zoologo e nella zoologia osservatore minuto e profondo.

Un maestro di tal fatta, che vedeva le cose da un punto di vista tanto elevato e raccomandava lo studio diligente dei particolari come scala al grande conoscimento delle leggi vitali, non poteva a meno di avere una grande azione sopra una mente tanto vasta e tanto forte quanto era quella dello Ercolani. Lo impulso che il grande maestro dava agli studi del valoroso giovane aveva un effetto tanto durevole che lo Ercolani trattò maestrevolmente argomenti disparatissimi nello studio della anatomia, della fisiologia, della patologia degli animali e dell'uomo, cercando i più difficili, e ostinandosi a superare le difficoltà con animo meravigliosamente tenace. Egli seppe impadronirsi per tempo del maneggio del microscopio, quando questo stromento, che venne ad allargare tanto smisuratamente il campo della scienza, era ancora adoperato da pochi e trascurato o avversato da molti.

Sebbene nel corso degli studi medico-chirurgici lo Ercolani si occupasse di tutti i rami, per modo che riusciva abilissimo nelle manualità chirurgiche e prima ancora di laurearsi compiva con ottimo effetto una operazione di cistotomia, pure fin dagli ultimi anni del corso egli si era già deliberato a lasciare in disparte lo esercizio pratico e a darsi tutto alle ricerche della scienza. Si laureò in età di venti anni e poco dopo veniva fuori colla pubblicazione di un caso di trasmissione di moccio dal cavallo all'uomo.

Quello fu il primo lavoro dello Ercolani, pubblicato nell'anno 1842. Il caso riferito era il primo riconosciuto in Italia, uno fra i primi in tutto il mondo, solo da cinque anni avendo parlato di tal sorta di fatti il Rayer in Parigi. Il dotto autore della *Bio-*

*grafia medica piemontese*, il Bonino, il quale, come altri in Piemonte, non credeva alla comunicabilità della morva del cavallo all'uomo, impugnò quel fatto, lo Ercolani rispose, e quando, parecchi anni dopo, lo Ercolani venne in Piemonte, il Bonino lo andò a visitare per dirgli che egli riconosceva di aver avuto torto, della qual cosa lo Ercolani lodò poi il Bonino pubblicamente nella Accademia di Medicina di Torino.

La carriera scientifica dello Ercolani e quella dello Alessandrini erano la prima all'aurora e la seconda al tramonto; una aurora brillante cui tenne dietro uno splendido meriggio, un tramonto luminoso di cui la luce raggia ancora sul campo della scienza.

Il maestro e lo scolaro lavoravano con indicibile alacrità dividendo il loro tempo fra la ricerca scientifica, l'ordinamento e l'aumento delle collezioni. Il catalogo del museo di Bologna segna i preparati fatti in quel tempo dallo Ercolani. Ma per quanto gli occhi dei due scienziati si compiacessero nel raggio della scienza, un altro lume tuttavia si attirava pure il loro sguardo, il lume incerto e fioco che incominciava a penetrare nell'orrendo buio del Governo di allora.

Massimo d'Azeglio, che pur si dichiarava nemico delle cospirazioni, cospirava a modo suo, e governava gli animi dei liberali delle Romagne.

Il Cornero, che più tardi fu Prefetto di Bologna, aveva portato in quella città una medaglia in gesso col *F E R T*, pegno di speranza che passava nascostamente di mano in mano. Qui tuttavia eravi un dissenso fra lo Ercolani e lo Alessandrini. Tutti e due erano ardentemente liberali, tutti e due abborrivano dalla tirannia mostruosa che opprimeva la loro contrada, tutti e due anelavano a un rivolgimento. Ma lo Alessandrini non vedeva altra via che la repubblica, mentre lo Ercolani poneva ogni speranza nella Casa di Savoia. Questa dissidenza portava con sè lo sfogo di lunghi discorsi fra i due patrioti, discorsi sommessi, mormorati all'orecchio, e che se fossero stati uditi avrebbero potuto forse costar loro la vita, certamente la carcere e il bando.

Ma era vicino il giorno in cui ciò che lo Ercolani sommessamente diceva negli intimi colloquii al suo caro maestro, lo doveva gridare in piena assemblea, all'Italia tutta, da Roma.

La provincia di Bologna, partito da Roma Pio IX, elesse lo Ercolani a deputato della Costituente Romana, ed egli ebbe il coraggio di votare apertamente contro la proclamazione della

repubblica e di motivare il suo voto. Fu poi concorde colla assemblea contro l'intervento francese e in breve, caduta la repubblica romana, dovette esulare e con alcuni suoi concittadini si ritirò in Toscana.

Ma erano passati i giorni in cui la Toscana dava asilo ospitale ai liberali italiani. Gli fu imposto lo sfratto nelle ventiquattro ore ed egli venne in Piemonte.

Nissuno saprà mai quanti sacrifizi siano stati fatti, quante privazioni sopportate, quanti dolori sofferti allora da uomini che per amor della patria dovettero fuggire dalle loro provincie native, raccogliendosi qui in emigrazione.

Lo Ercolani sopportò con invitta costanza durissime prove nei primi tempi in cui fu il Piemonte, e dagli ozi forzati trasse un degno partito scrivendo e pubblicando due suoi volumi sulla storia della veterinaria. Il De Filippi, il Tommasi che allora era qui pure in emigrazione, il Farini cui lo legava una intima amicizia precedente, e altri uomini dotti e dabbene lo apprezzarono; in breve ebbe la cittadinanza e fu fatto Professore nella scuola veterinaria, con uno stipendio per verità scarsissimo, perchè fu per più anni di sole lire mille e dugento all'anno. Eppure in quel tempo pubblicò un gran numero di lavori, parecchi dei quali furono tradotti in francese, e anche nel giornale veterinario di Berlino, in quello di Vienna, nel *Repertorium* dello Hering. Il giornale veterinario di Vienna, parlando delle pubblicazioni dello Ercolani, lo proclamò lavoratore infaticabile e quella lode gli tornò cara. Si fu in quel tempo che egli pubblicò un volume sui parassiti, del quale, siccome incontentabile di ciò che faceva pel desiderio di far sempre meglio, egli si rallegrava che fosse scomparsa la edizione, della qual cosa invece gli studiosi si dovevano dolere.

La condizione dello Ercolani nella scuola veterinaria di Torino si venne a migliorare repentinamente, perchè ne fu fatto direttore; avrebbe potuto essere anche migliore se egli avesse voluto, vale a dire se avesse accettato senza mutamenti le cose quali le aveva trovate. Il suo predecessore aveva settemila lire all'anno e non ci sarebbe stato ragione perchè egli ne avesse meno. Ma a lui piacque che fosse alquanto migliorata la condizione dei colleghi e si contentò dello stipendio annuo di cinquemila lire.

La direzione di una scuola veterinaria è molto malagevole; lo Ercolani seppe vincere le malagevolezze e dare alla scuola uno

impulso poderoso nella via dei buoni insegnamenti e dei buoni studi. Tutto procedeva ottimamente e lo Ercolani si trovava alla perfine in grado di consacrarsi al suo còmpito senza preoccupazioni esteriori, quando una immensa sventura lo venne a colpire, sotto la quale la forte sua tempra poco mancò che non venisse al tutto a spezzarsi.

Marito e padre, nei travagli più duri della vita passata aveva trovato conforto e sostegno nel coraggio della compagna della sua vita e nello amore della sua figliuoletta.

Questa, venuta coi genitori bambina in Piemonte, era qui cresciuta e in sui vent'anni si era sposata, continuando a vivere collo sposo nella casa paterna. Nel primo puerperio, dove tutto s'era passato regolarmente e non si pensava ad ombra di pericolo, repentinamente la povera Cesarina morì.

Il disperato dolore dello Ercolani spaventò i suoi amici. Egli voleva lasciare l'insegnamento, rinunciare alla vita pubblica, ritirarsi dal mondo.

Fu consigliato caldamente a lasciare Torino e ritornare a Bologna ed egli si arrese a questo consiglio e si ritrovò colà dove aveva compiuto i suoi primi studi e i suoi primi lavori, affranto dal peso della sua sventura personale, confortato dal mutamento avvenuto nelle cose della sua città e dal modo ammirabile con cui essa si mostrava degna della nuova libera vita.

Raccolte tutte le sue forze, lo Ercolani ricominciò in Bologna la sua vita di grande cultore della scienza, e i miglioramenti introdotti negli insegnamenti e nelle collezioni di quella scuola di veterinaria, e le nuove importantissime pubblicazioni che venne facendo, mostrano in qual degno modo egli riuscisse a consolarsi.

L'istologia normale e patologica, la medicina veterinaria e la medicina umana, l'anatomia patologica, l'elmintologia, la teratologia comparata, la zoologia, ebbero da lui culto e progresso, scegliendo egli dappertutto gli argomenti più difficili ed esercitando in essi con pertinacia invitta la sua mirabile attitudine alle scoperte scientifiche.

È cosa singolare questa che mentre lo Ercolani era così strenuo investigatore e tanto si compiaceva di ricerche originali e nuove, avesse pure in pari modo un culto ardente per le cose spettanti alla erudizione. Di ciò egli diede splendido segno quasi in sul principio della sua carriera scientifica colla pubblicazione delle ricerche sugli scrittori di veterinaria, lavoro mirabile per la eru-

dizione e pel senno che a ogni pagina vi si rivelano, e che egli proseguì poi colla pubblicazione della bibliografia veterinaria. Parecchie altre sue pubblicazioni trattano di argomenti di erudizione. e basti menzionare gli studi intorno a Maestro Mauro e a Carlo Ruini. Il suo amore per la storia della scienza si venne a manifestare pure in altro modo: conoscitore maestro dei libri antichi più pregevoli, egli li cercò tutta la sua vita e riuscì a procurarsene per modo da avere una biblioteca di volumi di medicina umana e di medicina veterinaria dei primi secoli della stampa, di cui egli giustamente si compiaceva come di un caro tesoro.

Questa fu la più grande sorgente di spesa per lui, che in tutto il resto ebbe una vita per ogni rispetto misurata.

Fra le varie numerose pubblicazioni dello Ercolani quelle che più fecero parlare di lui negli ultimi anni della sua vita e di cui più si compiacque, avendoci lavorato intorno per ben quindici anni, si riferiscono alle sue ricerche intorno alla placenta nei pesci cartilaginosi e nei mammiferi, con applicazioni alla tassonomia zoologica e alla antropogenia. Nella più importante di queste pubblicazioni alcune tavole fanno vedere il modo in cui nei mammiferi avvengono i rapporti dell'ovo coll'utero.

Parecchi naturalisti valentissimi si adoperarono ad applicare la embriologia alla tassonomia zoologica. Lo Ercolani segna in questa via un passo oltre i suoi predecessori, e prende per tal modo un posto elevato nella scienza. Ciò compresero bene i dotti contemporanei e da ogni parte gli diedero segni non dubbi del conto in cui lo tenevano.

Il Turner dice: « Il signor Ercolani di Bologna, di cui la memoria sulla struttura della placenta in vari animali agguaglia in importanza e interessamento il classico studio del Baer e dello Eschricht, ha dato un aspetto molto preciso a questa quistione » (*Lectures on the Comparative Anatomy of the Placenta* 1876). Il Winkler e lo Henning, in Germania, scrissero « il lavoro dello Ercolani sulla placenta è il migliore che sia stato fatto da lungo tempo (*Studien über der Bau den Menschlichen Placenta.* Leipzig, 1872).

Il Dottor Marcy di Boston. nell'anno 1880, tradusse due delle memorie dello Ercolani sulla placenta, dando questo giudizio:

« La evidente imparzialità dell'autore, quale si vede nelle sue numerose osservazioni, la molteplicità dei fatti addotti, la modesta e coscienziosa esposizione della sua opinione e le belle

illustrazioni dei suoi studi nelle tavole che accompagnano il volume, colpiscono il lettore che non abbia idee preconcette, e portano il convincimento che le deduzioni presentate sono i risultamenti del meditato lavoro, e non teorie preconcette che egli si sia sforzato di dimostrare. Tutto ciò fa sì che il nome dello Ercolani deve esser posto con quelli dei grandi benefattori della scienza e deve essere trasmesso alle generazioni avvenire, e onorato insieme con quelli di Eustachio, Malpighi, Morgagni e altri segnalati anatomici della primitiva scuola italiana ».

I dotti più celebri ebbero parole di grande lode per lo Ercolani, Owen, Darwin, Haeckel, Huxley, Milne Edwards; e Bischoff, il glorioso vecchio, gli scriveva: « Ho molto materiale di studio, ma sono vecchio, e sarei ben contento di cederlo a voi, che lo sapreste così bene illustrare... »

Queste parole valgono più di ogni massima onorificenza.

Durante la sua malattia, che fu penosa e lunga ed ebbe fine colla morte addì 16 Novembre 1883, lo Ercolani ripetutamente espresse il desiderio che i suoi funerali fossero al tutto modesti. Ma non si può impedire a una città, non si può impedire a una nazione, che manifestino il loro dolore quando segue una perdita tanto dolorosa, e questo dolore fu manifestato in modo commovente e solenne.

Invero, lo Ercolani fu uomo eccezionale per la potenza dello ingegno, la devozione alla scienza e alla patria, al compimento d'ogni suo dovere, la coltura letteraria, l'affetto alla gioventù, il sentimento dell'amicizia, la operosità costante, l'altezza dell'animo, l'austerità della vita.

# PUBBLICAZIONI

## 1842.

1. *Della trasmissione del cimurro dai bruti all'uomo.* Bologna.

## 1848.

2. *Alcune considerazioni sulla grandine dei porci.* Bologna.

## 1851-54.

3. *Ricerche storico-analitiche sugli scrittori di Veterinaria*, vol. 2. Torino.

## 1852.

4. *Osservazioni sulla Spiroptera megastoma del cavallo*, con figure. Torino.
5. *Della tubercolosi nei carnivori e di un deposito di materia tubercolare nei bronchi di un cavallo.* Torino.
6. *Ordinamento ed indicazione succinta delle principali preparazioni di Anatomia patologica venute in dono alla R. Scuola Veterinaria di Torino.* Torino.
7. *Brevi considerazioni sulla torsione del collo dell' utero.* Torino.
8. *Storia genetica e metamorfosi dello strongilo del cavallo*, con tavole. Torino.
9. *Preambolo ai documenti che servir debbono allo studio dell'innesto della peripneumonia epizootica col metodo del Dr. Willems.* Torino.
10. *Ricerche comparative sull' innesto dei morbi contagiosi: La peripneumonia bovina ed il vaiuolo arabo dell'uomo.* Torino.

## 1853.

11. *Ricerche comparative sull' innesto dei morbi contagiosi.* Articolo secondo: *La peripneumonia bovina, il vaiuolo pecorino e la sifilide dell'uomo.* Articolo terzo: *La peripneumonia bovina, il tifo bovino e la rabbia canina.* Articolo quarto e ultimo: *Il vaccino o cowpox, il vaiuolo pecorino, il cimurro o gourme dei Francesi, il moccio o morva, la rogna, le affezioni carbonchiose e generali conclusioni relative alla peripneumonia.* Torino.

12. *Sopra alcuni punti relativi all'innesto della pleuropneumonia essudativa dei bovini col metodo Willems.* Torino.

13. *Telengeectasia, ossia tumore sanguigno nella cavità interna del ventricolo sinistro del cuore di un cavallo.* Torino.

14. *Genesi verminosa frequente nei tubercoli polmonari della pecora.* Torino.

15. *Sopra un calcolo gastrico di un cavallo (in collaborazione col Prof. Chiappero).* Torino.

## 1854.

16. *Sul preteso verme o tendine della lingua dei cani.* Torino.

17. *Osservazioni anatomico-fisiologiche sopra le ghiandole cutanee degli animali domestici,* con tavole. Torino.

18. *Considerazioni pratiche sopra le recenti osservazioni di metamorfosi degli elminti.* Torino.

19. *Osservazioni teorico-pratiche sopra i polipi delle narici.* Torino.

20. *Osservazioni teorico-pratiche sopra le esostosi.* Torino.

21. *Nuovo metodo di cura per tentare di sanare i cavalli mocciosi.* Torino.

22. *Resoconto delle prime esperienze sulla inspirazione del nitrato d'argento in polvere contro il moccio.* Torino.

23. *Sur l'embryogénie et la propagation des vers intestinaux (Compte rendu, etc.).* Torino.

24. *Ricerche sperimentali sulla produzione del calore animale (in collaborazione col Prof. Vella).* Torino.

25. *Osservazioni medico-zoologiche sull'echinococco.* Torino.

26. *Lettere sull'insegnamento della Veterinaria.* Milano.

27. *Osservazioni comparate sullo Strongylus trigonocephalus* Rud. *e l'Anchylostoma duodenale* Dubini. Milano.

28. *Nouvelles observations sur le développement et la vie des nématodes (Compte rendu, etc., in collaborazione col Prof. Vella).* Torino.

## 1855.

29. *Nuove ricerche sulle vecchie cagioni che impediscono il vomito nel cavallo (in collaborazione col Prof. Vella).* Torino.

30. *Del cancro.* Torino.

31. *Storia della castrazione di una vacca col metodo vaginale del signor Charlier.* Torino.

32. *Ricerche patologiche sulla cachessia purulenta o pioemia nel cavallo.* Torino.

33. *Ricerche fisiologiche e patologiche sopra i parti gemellari.* Torino.

34 *Sviluppo del distoma endolobo.* Torino.

35. *Due parole sulla Memoria del Dottore Tonini: « Della causa efficiente della polmonea nei bovini. »* Torino.

## 1856.

36. *Gestazione di sedici mesi di una vacca per torsione del corpo dell'utero e chiusura completa della parte inferiore del corno dell'utero gestante.* Torino.

37. *Sopra un caso di lacerazione del fegato osservato in un cavallo.* Torino.

38. *Ricerche storiche sull'antichità dei moderni metodi operatorii per castrare i cavalli a proposito di un codice inedito di Veterinaria del* 1600, *del Capitano Asinari piemontese.* Torino.

39. *Tubercolosi nasale del porco (in collaborazione col Prof. Vella).* Torino.

40. *Aneurisma passivo del cuore in un cavallo bolso, con alcune considerazioni sulle malattie del cuore degli animali domestici, nonchè sulla bolsedine.* Torino.

41. *Nota sulla cauterizzazione. Fino dove giunge, e in quale proporzione il calorico trapassa i tessuti sui quali viene applicato (in collaborazione col Prof. Vella).* Torino.

42. *Catarro nasale o corizza acuta dei bovini.* Torino.

43. *Classificazione dei mostri negli animali domestici del Prof. Gurlt, coll'aggiunta delle nuove osservazioni sullo stesso argomento del Prof. Antonio Alessandrini, e la nuova proposta di classificazione del Prof. Leyh.* Torino.

44. *Ricerche anatomiche e fisiologiche sulla struttura e funzione della vescichetta seminale mediana di Bourgelat, utero maschile di Weber.* Torino.
*Nota in aggiunta alla predetta Memoria.* Torino, 1857.

45. *Ricerche storiche intorno alla malattia dei cavalli chiamato Limosporo dai Greci e da Polibio.* Torino.

46. *Sopra un Nanosomus laticeps Gurlt, raccolto da una pecora, con alcune considerazioni intorno al Nanismo degli animali domestici.* Torino.

47. *Cicalata sopra un argomento serio di Veterinaria.* Torino.

48. *Cicalata intorno ad una lettera del signor G. B. Mazzini.* Torino.

49. *Bibliografia veterinaria, dai primi tempi dell'êra nostra a tutto il secolo* XVIII, *in aggiunta alla parte bibliografica delle ricerche storiche sugli scrittori di Veterinaria.* Torino.

50. *Prelazione al corso di Anatomia patologica.* Torino.

## 1857.

51. *Intorno alla coagulazione del sangue entro i vasi e loro conseguente completa obliterazione nei polmoni dei bovini affetti da peripneumonia epizootica.* Torino.

52. *Sopra l'innesto delle afte.* Torino.

53. *Sopra l'estrazione per le vie naturali di un feto mummificato nell'utero di una vacca.* Torino.

54. *Lettere due ad alcuni veterinari morti.* Torino.

55. *Risposta alle osservazioni critiche del Prof. Reviglio sull'innesto della pleuropneumonia epizootica.* Torino.

## 1859.

56. *Dei parassiti e dei morbi parassitari degli animali domestici,* vol. I. Bologna.

57. *Prolusione al corso di Anatomia patologica veterinaria.* Torino.

## 1860.

58. *Brevi considerazioni intorno ai metodi operatorii proposti per la cura del prolasso del retto, specialmente nel cavallo.* Torino.

59. *Determinazione di un'azione terapeutica poco nota ed importante dell'assa fetida (in collaborazione del Prof. Bassi).* Torino.

60. *Intorno al modo di prodursi nel maggior numero dei casi dell'enfisema sottocutaneo.* Torino.

61. *Delle anchilosi in generale e di quelle delle vertebre dorsali e lombari in particolare.* Torino.

62. *Quali sono le cagioni per cui l'enfisema polmonare produce in alcuni casi il pneumoderma e in altri non lo produce.* Torino.

63. *Delle lesioni organiche comuni al moccio, al farcino ed alla così detta peripneumonia gangrenosa, comprovanti l'identica natura di queste credute forme morbose diverse (in collaborazione del Prof. Bassi).* Torino.

64. *Dei residui del corpo di Wolf nel testicolo dei solipedi osservati e descritti per la prima volta.* Torino.

65. *Cura del moccio cogli arseniti di stricnina (in collaborazione col Prof. Bassi).* Torino.

66. *Delle malattie degli uccelli domestici.* Articolo primo: *Morbi sporadici.* Torino.

67. *Sul periodo d'incubazione della rabbia negli animali che furono morsicati da altri animali rabbiosi, e proposta di riforme alle vigenti leggi di polizia sanitaria.* Torino.

68. *Brevi considerazioni intorno alla proposta di affidare le Scuole Veterinarie al Ministero di Agricoltura e Commercio.* Torino.

69. *Dei casi narrati di sudore sanguigno negli animali.* Torino.

## 1861.

70. *Osservazioni anatomico-fisiologiche intorno all'organo cheratogeno o generatore delle produzioni cornee cutanee del corpo dei mammiferi domestici*, con tavole. Torino.

71. *Delle malattie degli uccelli domestici.* Articolo secondo ed ultimo; *Morbi epizootici.* Torino.

72. *Intorno ad una dilatazione della porzione toracica dell'esofago osservata in una pecora.* Torino.

73. *Fungo o cancro ematode delle ossa osservato in un cavallo.* Torino.

74. *Moccio acuto in una capra.* Torino.

75. *Le dottrine del Prof. Bouley intorno al moccio (in collaborazione del Prof. Bassi).* Torino.

76. *Discorso inaugurale per l'attuazione del nuovo regolamento per le R. Scuole superiori di Medicina Veterinaria.* Torino.

77. *Brevi considerazioni sulla dottrina di Virchow intorno alla leucocitosi e all'embolismo, a proposito di una Memoria sulla pioemia del veterinario Frank.* Torino.

78. *È il metodo Grimelli che si adopera alla Scuola di Torino per curare i cavalli mocciosi? No (in collaborazione col Prof. Bassi).* Torino.

## 1862.

79. *Cura del moccio cogli arseniti di stricnina. Stato della questione in Europa nel* 1861 *(in collaborazione col Prof. Bassi).* Torino.

80. *Sulla possibile guarigione spontanea negli animali delle invaginazioni intestinali strozzate.* Torino.

81. *Ricerche storiche intorno a Maestro Mauro, veterinario del* XIV *secolo.* Torino.

82. *Sulla necessità di ordinare sopra basi uniformi l' insegnamento veterinario in Italia.* Torino.

## 1863.

83. *Discorso inaugurale per l'apertura del corso degli studi nella R. Scuola Veterinaria di Torino per l' anno* 1862-63. Torino.

## 1864.

84. *Dichiarazione intorno al rapporto della Commissione nominata dal Governo per ordinare l'insegnamento veterinario in Italia.*

85. *Sulla importanza della Veterinaria e sulla necessità di ordinarne l'insegnamento.* Bologna.

86. *Intorno all'efficacia della salicina nella cura delle affezioni tifoidee negli animali domestici.* Torino.

87. *Osservazioni sulle giovani larve appena sbucciate dall'uovo dell'oestrus equi L. Gastrus equi Meigen,* con tavole. Bologna.

## 1865.

88. *Sulla trasformazione degli elementi istologici nell'organismo animale e più specialmente delle cellule midollari in corpuscoli ossei e dei corpuscoli del tessuto connettivo in cellule epiteliali,* con tavole. Bologna.

## 1866.

89. *Delle concrezioni calcari nel fegato dei cavalli*, con 2 tavole. Bologna.

90. *Osservazioni sulla struttura normale e sulle alterazioni patologiche del tessuto fibroso*, con 5 tavole. Bologna.

91. *Sulla introduzione e diffusione del tifo bovino in Isvizzera.* Bologna.

## 1867.

92. *Delle glandule otricolari dell'utero e dell'organo glandulare di nuova formazione che nella gravidanza si sviluppa nell'utero delle femmine dei mammiferi e nella specie umana*, con 10 tavole. Bologna.

93. *Descrizione metodica del Museo di Anatomia patologica comparata della R. Università di Bologna.* Memoria prima: *Delle fratture negli animali*, con 5 tavole. Bologna.

94. *Descrizione metodica dei preparati esistenti nel Museo di Anatomia patologica comparata della R. Università di Bologna.* Memoria seconda: *Delle concrezioni calcari nel fegato dei cavalli*, con 2 tavole. Bologna.

95. *Bibliografia veterinaria italiana dal* 1846 *a tutto il* 1866, con un'appendice. Torino.

## 1868.

96. *Dei tessuti e degli organi erettili*, con 10 tavole. Bologna.

## 1869.

97. *Sulla placenta e sulla nutrizione dei feti nell'utero*, con 1 tavola. Bologna.

98. *Sul processo formativo della porzione glandolare e materna della placenta*, con 6 tavole. Bologna.

## 1870.

99. *Delle malattie della placenta*, con 7 tavole. Bologna.

## 1871.

100. *Del perfetto ermafrodismo delle anguille*, con 1 tavola. Bologna.

## 1872.

101. *Intorno all'opuscolo di Holmbaum-Hornsckuck, de Anguillarum sexu ac generatione.* Modena.

102. *Descrizione metodica dei preparati esistenti nel Museo di Anatomia patologica comparata della R. Università di Bologna.* Memoria terza: *Osservazioni di Anatomia patologica comparata sulla vescica urinaria e sulle arterie ombelicali*, con 6 tavole. Bologna.

## 1873.

103. *Discorso inaugurale per l'inaugurazione degli studi nella R. Università di Bologna.* Bologna.

104. *Sulla parte che hanno le glandole otricolari dell'utero nella formazione della porzione materna della placenta e nella nutrizione dei feti nell'alvo materno*, con 4 tavole. Bologna.

105. *Sulla fabbricazione artificiale del panello per fertilizzare la terra con muffe.* Bologna.

106. *Carlo Ruini. Curiosità storiche e bibliografiche intorno alla scoperta della circolazione del sangue.* Bologna.

## 1874.

107. *Sulla dimorfobiosi, o diverso modo di vivere e riprodursi sotto duplice forma di una stessa specie di animali*, con 2 tavole. Bologna.

108. *Della struttura anatomica della caduca uterina nei casi di gravidanza extra-uterina nella donna*, con 1 tavola. Bologna.

## 1875.

109. *Osservazioni elmintologiche sulla dimorfobiosi dei nematodi, sulla filaria immitis e sopra una nuova specie di distoma dei cani.* Bologna.

110. *Della placenta nei mostri per inclusione e nei casi di gravidanza extra-uterina nella donna e in alcuni animali.* Bologna.

111. *Note anatomiche sull'orecchio esterno e sul timpano negli uccelli*, con 1 tavola, Modena).

112. *Sulla struttura intima del tessuto tendinoso*, con 1 tavola. Bologna.

## 1876.

113. *In commemorazione del* XV *anniversario della morte del Professore Antonio Alessandrini. — Osservazioni teratologiche sopra un Pseudocornus aprosopus.* ERC., con 2 tavole. Bologna.

114. *Dell'onychomykosis dell'uomo e dei solipedi*, con 1 tavola Bologna.

## 1877.

115. *Sull'unità del tipo anatomico della placenta nei mammiferi e nell'umana specie e sull'unità fisiologica della nutrizione dei feti in tutti i vertebrati*, con 5 tavole. Bologna.

116. *Sulle errate apparenze macroscopiche che hanno impedito fino ad ora di conoscere l'intima struttura della placenta umana e sull'unità di tipo anatomico della placenta nei mammiferi e nella donna.* Torino e Bologna.

## 1878.

117. *Metamorfosi delle piante. Prime ricerche sulla trasformazione di una crittogama del genere* Momyces *in una pianta Fanerogama Dicotiledonale, e ritorno alla forma primitiva crittomatica dai rami e dai semi della detta specie di Cuscuta: Cuscuta e Orobanca.* Bologna.

118. *Sull'attecchimento delle pianticelle di cuscuta volgare, nata da semi sulle giovani piante d'erba medica.* Bologna.

119. *Intorno alle prime fasi di sviluppo e sulla duplice costituzione anatomica della* Phelipaea ramosa MEY. Bologna.

120. *Sul processo formativo del callo osseo nelle diverse fratture delle ossa nell'uomo e negli animali.* Bologna.

121. *Sulla malattia dominante nel bestiame*, peripneumonia epizootica. Milano.

122. *Sulla filosofia zoologica a proposito del libro di Pietro Siciliani.* Roma.

## 1879.

123. *Osservazioni sopra alcuni costumi del* Vespertilio murinus L. *e ricerche comparate sulla pelvi e sul parto in questo animale, e le assimetrie pelviche, che nella donna richieggono l'operazione cesarea o la sinfisiotomia*, con 2 tavole. Bologna.

124. *Discorso sull' ordinamento degli Istituti scientifici in Italia.* Bologna.

## 1880.

125. *Studi isto-fisio-anatomo-patologici e clinici sull'ano preternaturale accidentale (La memoria è del Prof. Rizzoli, ma il Prof. Ercolani vi collaborò per la parte istologica e anatomo-patologica).* Bologna.

126. *Della placenta nei pesci cartilaginei e nei mammiferi e delle sue applicazioni alla Tassonomia e all'Antropogmia* (un vol. di 380 pag. in-4° con atlante. Bologna.

127. *Francesco Rizzoli.* Bologna.

## 1881.

128. *Sulla ovulazione dei distomi epatico e lanceolato delle pecore e dei buoi.* Bologna.

129. *Dell'adattamento della specie all'ambiente, nuove ricerche sulla storia genetica dei trematodi*, con 3 tavole. Bologna.

130. *Sul parto pretermesso o mancato nelle femmine dei* myoxus glis *e nella specie umana.* Bologna.

131. *Francesco Selmi, commemorazione.* Bologna.

132. *Sulla cachessia ittero-verminosa delle pecore e dei buoi.* Bologna.

## 1882.

133. *Della polidactylia e della polimelia nell'uomo e nei vertebrati,* con 4 tavole. Bologna.

134. *Dell'adattamento della specie all'ambiente, nuove ricerche sulla storia genetica dei trematodi.* Memoria seconda, con 3 tavole. Bologna.

## 1883.

135. *Nuove ricerche di Anatomia normale e patologica sulla placenta dei mammiferi e della donna, lettere tre dirette al chiarissimo signor Prof. Alberto Kölliker,* con 3 tavole. Bologna.

136. *Sulle alterazioni patologiche portate dalla sifilide nella placenta umana.* Bologna.

---

(Questo elenco dei lavori pubblicati dal Prof. G. B. Ercolani fu compilato dal Dottore Alessandro Lanzillotti-Buonsanti, e stampato nel numero 11 (30 Novembre 1883) della *Rivista mensile di Milano* la Clinica Veterinaria).

Il Socio Cav. Prof. Angelo Mosso presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. C. Éméry, intitolato:

UN

# FOSFENO ELETTRICO SPONTANEO.

Già da parecchi anni vado analizzando quei fenomeni i quali si manifestano all'occhio, nei primi istanti che seguono il destarsi dal riposo prolungato della notte, cioè in un momento in cui l'occhio possiede ancora il massimo della sua eccitabilità alla luce, e, se l'ipotesi fotochimica della percezione ottica è vera, serba ancora una grande provvista delle sostanze sensibili ai raggi luminosi.

Il fenomeno che sono per descrivere mi è già noto da lungo tempo, e l'ho osservato centinaia di volte; non l'ho pubblicato finora, perchè non sapeva trovarne una spiegazione plausibile. Oggi credo di potere far seguire alla descrizione del fatto una interpretazione fisiologica di esso.

Dirò anzitutto che soglio tenere aperte le imposte di legno della finestra nella mia camera da letto, per cui, al mattino, quella finestra è fortemente illuminata; quando mi desto, gli occhi restano chiusi finchè io li apra volontariamente. Così mi è possibile dirigere il primo sguardo dove voglio e sottoporre la retina a quegli stimoli che desidero adoperare.

Ma, già fin da quel momento del risveglio, la retina, benchè protetta dal velo delle palpebre, non è rimasta immune dall'influenza della luce. Un chiarore rosso penetra attraverso le palpebre nella pupilla, e, se aprendo gli occhi guardo una superficie bianca, o molto chiara, essa mi apparisce da prima verde: però questa tinta sbiadisce prestissimo e l'immagine dello oggetto assume la sua colorazione naturale.

Il verde era dovuto al contrasto successivo, determinato dalla luce rossa trasmessa dalle palpebre. A prova di ciò, basta uno sperimento semplicissimo: coprire gli occhi, anche per poco, con un oggetto opaco, prima di aprirli: ad esempio, porre il capo sotto le coltri del letto. La retina non essendo più stimolata da luce colorata, percepirà le prime immagini col loro colore normale.

Fin qui nulla che non si possa assai facilmente spiegare ed intendere. Il fenomeno di cui voglio occuparmi è di tutt'altra natura. Ho riferito quello, soltanto per mostrare come la retina possa trovarsi modificata più o meno fortemente dalla luce, ad occhi chiusi: se questa azione della luce è stata troppo intensa, il fenomeno di cui ora verrò a dire è affievolito, e può anche non essere più percettibile.

Se, destatomi in una camera non troppo intensamente illuminata, io apro gli occhi volgendoli alla finestra, dalla quale si vede il cielo, o un muro bianco, o altro oggetto molto chiaro, e se, dopo un breve istante, torno a chiuderli, l'immagine secondaria della finestra mi apparisce, per una frazione di secondo, splendidissima e di un bel colore azzurro-violaceo: passato questo primo momento, la colorazione s'indebolisce rapidamente e sparisce; rimane soltanto la solita immagine secondaria positiva, più o meno intensa e durevole. La stessa osservazione può essere ripetuta più volte, avendo cura di far riposare alquanto gli occhi fra uno sperimento e l'altro. Ottengo ancora lo stesso fenomeno, facendo agire l'immagine della finestra sopra una regione qualsiasi della periferia della retina, se non che l'intensità del colore violetto diviene molto minore. Aggiungerò che un collega, di cui richiamai l'attenzione sul fatto, mi dice di averlo osservato anche lui.

Volendo trovare una spiegazione del fatto, sarà d'uopo confrontarlo con altri fatti analoghi e di natura meno oscura. Parmi che siano tali certi fenomeni che seguono all'eccitamento elettrico della retina.

Helmholtz ha descritto accuratamente questi fenomeni, ed ha notato la eccitabilità molto diversa dei singoli osservatori. Egli stesso (1) ha sperimentato con correnti piuttosto forti (12—24 Daniell), a tal segno che, per mitigare le sensazioni cutanee

(1) *Physiologische Optik*, p. 201.

dolorose, consiglia di applicare elettrodi a larga superficie. Le osservazioni dell'illustre fisiologo sono in gran parte simili alle mie, per cui, senza riferirle per esteso, passerò a descrivere le esperienze che ho istituite nel laboratorio del mio amico Professore Mosso.

Ho adoperato una pila di 8 elementi Daniell di piccolo sesto uniti in tensione. Il circuito era chiuso da un reostato. Un circuito derivato partiva dai due estremi del reostato e conduceva ai due elettrodi, rappresentati da piccole spugne bagnate in una soluzione di cloruro di sodio; una chiave di Du Bois-Reymond, collocata come ponte su questo circuito, permetteva di abolire con la sua chiusura o lasciar libero con la sua apertura il passaggio della corrente agli elettrodi. Introducendo delle resistenze nel reostato, era agevole regolare l'intensità della corrente derivata.

Dopo diversi tentativi, ho trovato che il modo più conveniente di applicare gli elettrodi è di poggiare il polo che deve agire sulla retina sul margine osseo superiore o inferiore dell'orbita, in modo che tocchi leggermente la palpebra corrispondente; l'altro polo si applica al zigoma o alla fronte. L'effetto che si ottiene è lo stesso quando il polo indifferente si poggia in altra parte del corpo più lontana dall'occhio, se non che è d'uopo allora adoprare correnti più forti che irritano la pelle. Operando come ho detto, mi bastava introdurre nel reostato una resistenza di 100 a 400 unità Siemens, per dare alla corrente derivata una intensità sufficiente. Le esperienze si facevano in una camera quasi buia e avente le pareti dipinte in nero.

Poggiando l'elettrode positivo al margine soprorbitale, ottengo alla chiusura un forte lampo, e tutta la retina rimane rischiarata da debole luce violetta, durante il passaggio della corrente. Alla apertura, vedo un lampo più debole, ma nella periferia inferiore del campo visuale mi si manifesta una fascia semilunare rischiarata da luce azzurro-violacea, che persiste per breve tempo (almeno $^3/_4''$ — $1''$), indebolendosi rapidamente: è difficile determinare la durata di questo fenomeno, che alla sua fine è appena sensibile e si confonde con la luce propria della retina.

Invertendo i poli, ho alla chiusura un lampo molto debole, e il campo visuale si oscura, per abolizione della luce propria, ma nella parte inferiore del campo visuale stesso, vedo durante il passaggio della corrente una fascia semilunare azzurro-violacea,

simile a quella determinata dall'apertura della corrente ascendente. All'apertura, vedo un forte lampo, la fascia sparisce e la luce propria si ridesta.

Ponendo gli elettrodi al margine orbitale inferiore e sulla fronte, ottengo gli stessi fenomeni, se non che la fascia violacea apparisce nella periferia superiore del campo visuale. Spostando lungo il margine orbitale il punto d'applicazione dell'elettrode, si ottiene uno spostamento corrispondente del luogo del fosfeno semilunare.

Ho osservato questi fatti sui miei due occhi, ma più distintamente sull'occhio destro. Anche il signor Aducco, Assistente del Laboratorio, ha veduto il fosfeno semilunare all'apertura della corrente ascendente e durante il passaggio della corrente discendente.

Voglio notare espressamente che questo fosfeno semilunare (il quale, per quanto io sappia, non è stato finora segnalato da altri) ha precisamente il medesimo colore della immagine secondaria violacea che segue all'azione intensa dei raggi luminosi, dopo il riposo prolungato. Esso si manifesta in quella regione della retina che, essendo più vicina all'elettrode, è stata più direttamente stimolata dalla corrente, come l'altro fenomeno insorge nelle parti della retina che ebbero a risentire più vivace l'azione della luce.

Il fosfeno ora descritto a me sembra un fenomeno indipendente dall'azione generale della corrente sulla retina. Volendo pure ammettere con Helmholtz che l'azione della corrente elettrica sulla retina sia dovuta allo stato elettrotonico in cui entrano le fibre del nervo ottico, per cui quelli stimoli che producono la sensazione normale della luce propria della retina, hanno poi azione maggiore o minore del solito, bisogna trovare pel fosfeno semilunare una spiegazione diversa. Io ritengo che si tratti di un'eccitazione degli elementi proprii della retina in quella parte che trovasi molto vicina ad uno degli elettrodi. La retina è eccitata quando la corrente l'attraversa dall'interno all'esterno, o quando è cessata l'azione di una corrente diretta dall'esterno all'interno.

Ora gli sperimenti di Holmgren (1) e specialmente quelli

(1) *Ueber die Retinaströme. — Untersuch. Physiol. Instit.* Heidelberg, 1880, III.

di Kühne e Steiner (1) hanno dimostrato che, nella retina, evvi realmente, allo stato normale, una corrente che va dalla superficie esterna all'interna e che questa corrente si modifica in seguito all'azione della luce. Secondo Kühne e Steiner, si avrebbe, durante l'azione della luce, una oscillazione negativa della corrente fisiologica. — Tale deve essere ancora la modificazione della corrente, che si determina nella retina dopo l'applicazione del polo negativo in vicinanza dell'occhio. Avremo del pari una oscillazione negativa, nel momento in cui s'interrompe una corrente, quando l'elettrode positivo era applicato vicino all'occhio. È notevole in questo caso che l'impressione luminosa destata dalla interruzione della corrente dura per un tempo relativamente lungo, il che vorrebbe dire che la modificazione indotta nella corrente propria della retina (forse per un effetto di polarizzazione) non cessa immediatamente, ma si prolunga indebolendosi a gradi.

Dopo queste considerazioni, partendo dalla grande rassomiglianza che parmi di riconoscere fra il fenomeno che insorge dopo l'azione della luce e quello che è dovuto alla corrente elettrica, cerco ora di trovare una spiegazione del primo. E mi si affaccia alla mente la supposizione che, cessata l'azione di una luce viva e di breve durata in una retina riposata, possa determinarsi in essa una nuova oscillazione negativa della corrente fisiologica; questa modificazione negativa sarebbe capace di eccitare la retina e di produrre una impressione luminosa subiettiva. — È vero che siffatte modificazioni negative, dopo cessata l'azione della luce non sono state finora osservate da quei fisiologi i quali hanno studiato le correnti della retina; però essi non hanno potuto operare sopra occhi così completamente riposati come quelli di chi si desta al mattino; forse in tali condizioni i fenomeni elettrici dovuti all'azione luminosa acquistano alcune particolarità che più tardi non si rinnovano.

Si potrà chiedere perchè l'impressione luminosa dovuta alla variazione elettrica negativa è violetta; molti fatti nella fisiologia della retina tendono a provare che una delle terminazioni nervose più sensibili e più diffuse, fino nelle regioni periferiche, sia precisamente quella che serve alla percezione dei raggi azzurri

---

(1) *Ueber das electromotrische Verhalten der Netzhaut;* ibid.

o violetti. Questa è una considerazione molto importante per la teoria della visione dei colori. Ma non è questo il luogo di discuterne le conseguenze: constatiamo solo il fatto che questi stessi elementi sono eccitati, prima degli altri, dalla corrente elettrica.

Se l'interpretazione che ho cercato di dare del fenomeno è giusta, avremmo qui un caso interessante per la fisiologia generale, cioè quello di elementi nervosi eccitati da una variazione fisiologica della propria corrente elettrica. Comprendo benissimo che questa interpretazione ha un fondamento assai debole, che è la rassomiglianza fra il fenomeno ottico dovuto alla luce e quello dipendente dall'applicazione della corrente elettrica. Finora non ho saputo trovare altra spiegazione che fosse più soddisfacente.

Torino, Giugno 1884.

In questa adunanza vennero eletti a Soci nazionali residenti i signori Cav. Giorgio SPEZIA, Prof. di Mineralogia, e Giuseppe GIBELLI, Professore di Botanica nella R. Università di Torino, ed a Socio Corrispondente per la Sezione di Fisica il signor Gustavo WIEDEMANN, Professore nell'Università di Lipsia.

---

*L'Accademico Segretario*
A. SOBRERO.

# INDICE

## DEL VOLUME XIX

ELENCO degli Accademici ..... *Pag.* 3

ELEZIONE del Comm. Prof. MICHELE LESSONA a rappresentante nel Consiglio Amministrativo del Consorzio Universitario ..... » 351

ELEZIONI di Soci Nazionali e Corrispondenti..... » 808

---

BASSO (Giuseppe) — Sopra un modo di misurare l'intensità delle correnti elettriche ..... » 238

BATTELLI (Angelo) — Sui sistemi catottrici centrati..... » 297

BIZZOZERO (Giulio) — Presentazione di un lavoro manoscritto del Dottore L. GRIFFINI, intitolato: *Contribuzione alla Patologia del tessuto epiteliare cilindrico*..... » 219

—— Relazione di un lavoro del Prof. L. GRIFFINI: *Contribuzione alla Patologia del tessuto epiteliare cilindrico* ..... » 291

BONARDI (Edoardo) — Contribuzione all'istologia del sistema digerente dell'*Helix pomatia*..... » 33

BRUGNATELLI (Luigi) — Sulla composizione di una roccia pirossenica dei dintorni di Rieti ..... » 292

CAMERANO (Lorenzo) — Intorno alla Neotenia ed allo sviluppo degli anfibi..... » 84

—— Monografia degli idrofilini italiani..... » 220

CAPPA (Scipione) — Sul limite dell'aderenza che si può svolgere fra due cilindri ad assi qualunque che si trasmettono il movimento rotatorio..... » 154

—— Sul movimento di rotazione di una massa liquida intorno ad un asse ..... » 631

CHARRIER (Angelo) — Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti per l'anno 1885 ..... » 558

CLARETTA (Gaudenzio) — Comunicazione di una lettera dell'illustre Storico Gian Leonardo Sismondo dei Sismondi ..... » 406

Cossa (Alfonso) — Presentazione di una Memoria stampata di C. Friedel ed E. Sarasin ..... *Pag.* 98

—— Relazione per l'aggiudicazione del premio Bressa nel quadriennio 1879-82 ..... » 199

—— Comunicazione intorno ad un'Idrocrasia della valle di Susa . . » 405

—— Annunzio della morte del socio corrispondente Adolfo Vurtz . » 727

Curioni (Giovanni) — Relazione sulla Memoria del signor Ingegnere Prof. Guidi: *Sugli archi elastici* ..... » 216

—— Sulla potenza congiuntiva longitudinale nelle travi sollecitate da forze perpendicolari ai loro assi ..... » 364

Daccomo (G.) — Contributo allo studio chimico del triclorofenolo... » 118

D'Aiutolo (Giovanni) — Intorno ad un esemplare di capsula soprarenale accessoria sul corpo pampiniforme di un feto..... » 713

Dorna (Alessandro) — Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti per l'anno 1884 ed altri lavori dell'Osservatorio » 54

—— Relazione sulla memoria dell'Ing. G. De Berardinis: *Sullo scostamento della linea geodetica dalle sezioni normali di una superficie* ..... » 94

—— Nuovo materiale scientifico e prime osservazioni con anelli micrometrici all'Osservatorio di Torino ..... » 410

—— Prime osservazioni con anelli micrometrici all'Osservatorio di Torino — Nota sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici con stelle ..... » 529

—— Sulla possibilità che il vulcano di Krakatoa possa avere proiettate materie fuori dell'atmosfera ..... » 751

—— Lavori dell'Osservatorio astronomico di Torino ..... » 218
241, 320, 431, 644, 750.

D'Ovidio (Enrico) — Presentazione di due lavori manoscritti, uno del Dottor Corrado Segre, e l'altro dell'Ing. Gio. De Berardinis » 52

—— Relazione sulla Memoria del Dott. Corrado Segre, intitolata: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* ..... » 81

—— Relazione sulla Memoria del Dott. Corrado Segre: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* ..... » 138

—— Relazione sulla Memoria del Dott. Gino Loria che ha per titolo: *Ricerche sulla geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie* ..... » 140

—— Presentazione di un lavoro manoscritto dell'Ing. Camillo Guidi: *Sugli archi elastici* ..... » 195

EMERY (Carlo) — Un fosfeno elettrico spontaneo ..... *Pag.* 802

FABRETTI (Ariodante) — Discorso per la commemorazione del primo centenario della R. Accademia delle scienze di Torino..... » 355

—— Presentazione di alcuni oggetti mandati in dono all'Accademia dal signor H. RASSAM..... » 431

FERRARIS (Galileo) — Comunicazione di una lettera dell'Avvocato Filippo CANTAMESSA..... » 242

FUSARI (Romeo) — Sull'origine delle fibre nervose nello strato molecolare delle circonvoluzioni cerebellari dell'uomo..... » 47

GENOCCHI (Angelo) — Presentazione di un opuscolo del Principe BONCOMPAGNI che ha per titolo: *Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace* ..... » 33

—— Presentazione di alcuni opuscoli ..... » 504

GUGLIELMO (Giovanni) — Intorno ad alcune modificazioni delle pompe pneumatiche a mercurio..... » 505

—— V. NACCARI (Andrea).

GUIDI (Camillo) — Dell'azione del vento contro gli archi delle tettoie » 283

JADANZA (Nicodemo) — Sui sistemi diottrici composti..... » 19

—— Cannocchiali ridotti..... » 583

—— Sulla misura di un arco di parallelo terrestre..... » 736

LESSONA (Michele) — Eletto rappresentante dell'Accademia nel Consiglio Amministrativo del Consorzio Universitario ..... » 351

—— Presentazione di un lavoro manoscritto del Dott. L. CAMERANO, intitolato: *Ricerche intorno alla distribuzione dei colori nel regno animale*..... » 433

—— Presenta un lavoro manoscritto del Dott. L. CAMERANO, intitolato: *Monografia degli anfibi urodeli italiani*..... » 728

—— Commemorazione di Giovanni Battista ERCOLANI..... » 783

LETTERE di condoglianza per la morte dell'illustre Quintino SELLA. » 489

LORIA (Gino) — Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale » 603

LUVINI (Giovanni) — Sullo stato sferoidale..... » 445

MACCHIATI (L.) — Azioni che esercitano i sali di ferro sulle piante . » 187

MANNO (Antonio) — La prima pagina di storia della R. Accademia delle Scienze di Torino ..... » 397

MATTIROLO (Emilio) e MONACO (Ernesto) — Sulla composizione di un Diallagio proveniente dal distretto di Syssert (Monti Urali)... » 640

MONACO (Ernesto) — V. MATTIROLO (Emilio).

MONARI (Adolfo) — Azione dell'ammoniaca sull'alcool etilico..... *Pag.* 130

MONDINO (C.) — Sulla struttura delle fibre nervose midollate periferiche ..... » 469

NACCARI (Andrea) e GUGLIELMO (G.) — Sul riscaldamento degli elettrodi prodotto dalla scintilla d'induzione nell'aria molto rarefatta.. » 209

—— Sul riscaldamento degli elettrodi prodotto dalla scintilla elettrica » 380

NACCARI (Andrea) — Relazione sulla Memoria del signor Dott. G. VICENTINI, che ha per titolo : *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni alcooliche di alcuni cloruri*.... ..... » 711

—— Presentazione di un lavoro manoscritto del sig. Angelo BATTELLI, avente per titolo: *Sulle proprietà termo-elettriche delle leghe. Studio sperimentale* ..... » 728

—— Relazione sulla Memoria del sig. Angelo BATTELLI, che ha per titolo: *Sulle proprietà termo-elettriche delle leghe*..... » 734

NOVARESE (Enrico) — Sulle accelerazioni nel moto di una figura piana nel proprio piano ..... » 501

PADOVA (Ernesto) — Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione pesante che gira attorno ad un punto del suo asse di simmetria..... » 753

PAGLIANI (Stefano) e PALAZZO (Luigi) — Sulla compressibilità dei miscugli di alcool etilico ed acqua... ..... » 763

PALAZZO (Luigi) e BATTELLI (Angelo) — Intorno alla fusione dei miscugli di alcune sostanze non metalliche ..... » 514

—— V. PAGLIANI (Stefano).

PIOLTI (Giuseppe) — Il porfido del vallone di Roburent ..... » 437

PISENTI (Gaetano) — Sulla cicatrizzazione delle ferite del rene e sulla rigenerazione parziale di quest'organo..... ..... » 719

POLLONERA (Carlo) — Monografia del genere *Vitrina*..... » 322

Presentazione di due lavori manoscritti, uno del sig Dott. Alessandro PORTIS, col titolo: *Contribuzione alla Ornitolitologia italiana*, e l'altro del Dott. Giuseppe VICENTINI, intitolato : *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni alcooliche di alcuni cloruri*. » 646

ROITI (Antonio) — Determinazione della resistenza elettrica di un filo in misura assoluta..... » 483

ROTONDI (Ermenegildo) — Ricerche di chimica elettrolitica — Elettrolisi dell'olio di anilina ..... .. ..... » 142

—— Ricerche chimiche sopra i saponi..... » 146

SACCO (Federico) — Nuove specie fossili di molluschi lacustri e terrestri in Piemonte ..... *Pag.* 247

—— L'alta valle Padana durante l'epoca delle terrazze in relazione col contemporaneo sollevamento della circostante catena Alpina-Appenninica ..... » 609

SALVADORI (Tommaso) — Intorno ad una specie di Falco nuova per la fauna italiana ..... » 343

—— Relazione sulla Memoria del Dott. L. CAMERANO, intitolata: *Ricerche intorno alla distribuzione dei colori nel regno animale.* » 477

—— Relazione sulla Memoria del sig. Dott. Alessandro PORTIS, intitolata: *Contribuzione all'Ornitolitologia italiana* ..... » 647

—— Relazione sulla Memoria del Dott. Prof. L. CAMERANO, intitolata: *Monografia degli anfibi urodeli italiani* ..... » 731

SEGRE (Corrado) — Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie ..... » 159

—— Approvazione della Memoria: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, nei volumi delle Memorie ..... » 241

—— Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque ..... » 265

—— Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque ..... » 692

SIACCI (Francesco) — Presentazione di un'opera stampata del signor F. CHAPEL ..... » 52

—— Presentazione di un opuscolo del sig. E. NARDUCCI ..... » 321

—— Alcuni teoremi sulla resistenza incontrata da una superficie in moto dentro un fluido ..... » 407

TARDY (Placido) — Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti ..... » 649

ZANOTTI-BIANCO (Ottavio) — Sopra una vecchia e poco nota misura del semidiametro terrestre ..... » 605

New York Botanical Garden Library
3 5185 00297 4788